Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Franco De Franchis

Sui moti polinomiali

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 43 (1970), p. 125-139

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1970__43__125_0>

SUI MOTI POLINOMIALI

FRANCO DE FRANCHIS *)

Introduzione.

In un precedente lavoro, [1], sono stati definiti, con riguardo ad un sistema particellare in moto rispetto ad un riferimento omografico (fluido) i tensori

$$
\begin{cases} K_G^{ls} = \Sigma\, m(x^l - x_G{}^l) v^s, \\ A_G^{lt} = \Sigma\, m(x^l - x_G{}^l)(x^t - x_G{}^t) \end{cases} \tag{1}
$$

che denotano, rispettivamente, il momento baricentrale delle quantità di moto ed un tensore doppio, dipendente dalla struttura materiale del sistema, le cui componenti presentano comportamento analogo a quello dei momenti baricentrali del 2° ordine (momenti e prodotti di inerzia) introdotti nella Geometria delle masse.

Con riguardo a due riferimenti omografici $(O, \boldsymbol{a})$ e $(\Omega, \boldsymbol{b})$ con O, Ω, $\boldsymbol{a}_{(t)}$, $\boldsymbol{b}_{(\rho)}$ ($t, \rho = 1, 2, 3$) funzioni geometriche del tempo si è, altresì, introdotto il tensore

$$
V_t^{(\tau)s} = \frac{\partial y^\rho}{\partial x^t} \mathring{b}^s_{(\rho)}, \tag{2}
$$

indicando x^t le coordinate del generico punto P nel riferimento $(O, \boldsymbol{a})$ e le y^ρ quelle del riferimento $(\Omega, \boldsymbol{b})$; quindi $P = O + x^t \boldsymbol{a}_{(t)} = \Omega + y^\rho \boldsymbol{b}_{(\rho)}$.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo di Ricerca N. 29 del Comitato Nazionale per la matematica del C.N.R., per l'anno accademico 1966-67.

Indirizzo dell'A.: Istituto Metematico, Università, Palermo.

Si sono considerate le relazioni

$$\overset{\circ}{b}{}^{s}_{(\rho)} = V_t^{(\tau)s} b^t_{(\rho)}, \tag{3}$$

che generalizzano le formule di Poisson. Il tensore $V_t^{(\tau)s}$ viene, dunque, ad avere comportamento analogo al vettore ω_τ nello studio dei moti rigidi.

Si è avuto, anche, occasione di considerare una generalizzazione del legame tra velocità angolare e momento baricentrale della quantità di moto nei sistemi rigidi pervenendo, stante (1), alla relazione

$$K_G^{(\tau)ls} = A_G^{lt} V_t^{(\tau)s}. \tag{4}$$

In [4], a pag. 482, C. Truesdell e R. Toupin considerano tensori analoghi al momento generalizzato delle quantità di moto. Con riguardo al generico sistema particellare S, assumendo come polo un punto mobile Ω e posto $r^h = x^h - x_\Omega{}^h$, i tensori suaccennati possono assumere l'aspetto

$$K_\Omega^{h_1 \dots h_p, t} = \Sigma\, m r^{h_1} \dots r^{h_p} v^t, \tag{5}$$

$$R_\Omega^{h_1 \dots h_p, t}{}_q = \Sigma\, m r^{h_1} \dots r^{h_p} v^t v^q - v_\Omega{}^t\, \Sigma\, m r^{h_1} \dots r^{h_p} v^q, \text{ ecc.} \tag{5'}$$

essendo le somme estese a tutti i punti del sistema S [1]).

Nel presente lavoro useremo i tensori (5) e (5') [2]) di tipo euleriano, e opportuni analoghi di tipo lagrangiano. Cominceremo col generalizzare (§ 1) le (3) con riguardo a moti polinomiali di ordine n qualunque. Stabiliremo delle relazioni analoghe a quelle che intercedono tra le componenti della quantità di moto e del momento delle quantità di moto di un sistema rigido rispetto ad una terna solidale da un lato e le derivate della forza viva rispetto alle caratteristiche dall'altro (§ 2).

Poscia generalizzeremo le (4) e stabiliremo delle equazioni che, note le condizioni iniziali, consentono di determinare opportuni analoghi del tensore $V_t^{(\tau)r}$ e dei vettori $\boldsymbol{b}_{(\rho)}$ per un generico moto polinomiale; tali

[1]) Nelle definizioni introdotte in [4] viene assunto come polo Ω l'origine della terna di riferimento, ossia un punto fisso ed il sistema considerato è continuo.

[2]) In [4] a proposito dei tensori (5) e (5') è detto testualmente: « their dynamical significance is as yet unknown and their properties remain to be learned ».

equazioni hanno, per i sistemi vincolati a compiere moti polinomiali di ordine *n*, un ruolo analogo a quello delle equazioni di Eulero per i sistemi rigidi (§ 4).

Esporremo, anche, alcune osservazioni sui momenti generalizzati (§ 3 e 4) ed estenderemo, sotto due forme diverse, un teorema dell'Almansi nonchè la nozione di spazio dell'Appell con riguardo ai moti polinomiali, (§ 5), sostanzialmente proseguendo una ricerca iniziata in [1] e [2].

1. Teorema del momento generalizzato delle quantità di moto e analogo delle formule di Poisson per moti palinomiali.

È da notare che, in base all'equazione fondamentale della Meccanica, per un punto generico P di S si ha

$$ma^i = F^i, \tag{6}$$

con manifesto significato dei simboli.

Moltiplicando i due membri per $r^{h_1} \cdot r^{h_2} \ldots \cdot r^{h_p}$ e sommando le relazioni ottenute per tutti i punti del sistema si ha:

$$\Sigma\, m r^{h_1} \ldots r^{h_p} a^i = \Sigma\, r^{h_1} \ldots r^{h_p} F^i \equiv \mathfrak{F}_\Omega^{h_1 \ldots h_p,\, i}. \tag{7}$$

La $\mathfrak{F}_\Omega$ introdotta in (7) dicesi *momento* (euleriano) *generalizzato delle forze rispetto al punto* Ω.

La (7), per le (5) e (5'), può scriversi:

$$\mathring{K}_\Omega^{h_1 \ldots h_p,\, i} = \mathfrak{F}_\Omega^{h_1 \ldots h_p,\, i} + \sum_{s=1}^{p} R_\Omega^{h_1 \ldots h_{s-1} h_{s+1} \ldots h_p,\, i,\, h_s}. \tag{8}$$

Vogliamo ora generalizzare le (3) al caso di moti polinomiali qualunque (non necessariamente omografici), nel senso più avanti precisato.

Oltre Ω sia dato, in funzione di t, un sistema di vettori $\boldsymbol{b}_{\rho_1 \ldots \rho_p}$ completamente simmetrico rispetto agli indici $\rho_1, \ldots, \rho_p$, per p variabile tra 1 e n. Diremo *polinomiale di grado m* un moto rappresentabile mediante un'equazione del tipo

$$P(y^1, y^2, y^3, t) = \Omega + y^{\rho_1} \boldsymbol{b}_{\rho_1} + y^{\rho_1} y^{\rho_2} \boldsymbol{b}_{\rho_1 \rho_2} + \ldots + y^{\rho_1} \ldots y^{\rho_n} \boldsymbol{b}_{\rho_1 \ldots \rho_n} \tag{9}$$

per $n=m$. Si riconosce facilmente che se $P(y^1, y^2, y^3, t)$ e $Q(z^1, z^2, z^3, t)$ sono polinomi di ordine m nelle y e z rispettivamente che definiscono lo stesso moto polinomiale di ordine m le y sono funzioni lineari invertibili delle z.

In conseguenza delle (9) si ha, per le y nulle, $p!\boldsymbol{b}_{\rho_1 \dots \rho_p} = P_{/\rho_1 \dots \rho_p}$ ove con la sbarretta si denota derivazione tensoriale; passando alle componenti con riguardo ad una prefissata terna cartesiana ortogonale $(O, \boldsymbol{c}^1, \boldsymbol{c}^2, \boldsymbol{c}^3)$, usando indici latini con riguardo alle coordinate x^s di P in questa terna e indici greci con riguardo alle y^ρ, si ha:

$$p!b^s_{\rho_1 \dots \rho_p} = \boldsymbol{c}^s \times P_{/\rho_1 \dots \rho_p} = x^s_{/\rho_1 \dots \rho_p}. \tag{10}$$

Derivando rispetto al tempo:

$$p!\overset{\circ}{b}{}^s_{\rho_1 \dots \rho_p} = \boldsymbol{c}^s \times \boldsymbol{v}_{/\rho_1 \dots \rho_p}. \tag{11}$$

Poniamo ancora

$$\begin{aligned} V^s_{t_1 \dots t_i} &= \frac{\partial y^{\rho_1}}{\partial x^{t_1}} \cdots \frac{\partial y^{\rho_i}}{\partial x^{t_i}} \overset{\circ}{b}{}^s_{\rho_1 \dots \rho_i} = \frac{1}{i!} \frac{\partial y^{\rho_i}}{\partial x^{t_1}} \cdots \frac{\partial y^{\rho_1}}{\partial x^{t_i}} \boldsymbol{c}^s \times \boldsymbol{v}_{/\rho_1 \dots \rho_i} = \\ &= \frac{1}{i!} \boldsymbol{c}^s \times \frac{\partial^{t_1 + \dots + t_i} \boldsymbol{v}}{\partial x^{t_1} \dots \partial x^{t_i}} = \frac{1}{i!} \frac{\partial^{t_1 + \dots + t_i} v^s}{\partial x^{t_1} \dots \partial x^{t_i}}. \end{aligned} \tag{12}$$

Le $V^s_{t_1 \dots t_i}$ costituiscono, a meno del fattore $\frac{1}{i!}$, il gradiente i^{mo} della velocità.

Poichè per (9) si ha:

$$\begin{cases} x^t = x_\Omega{}^t + y^{\rho_1} b^t_{\rho_1} + \dots + y^{\rho_1} \dots y^{\rho_n} b^t_{\rho_1 \dots \rho_n}, \\ v^t = v_\Omega{}^t + y^{\rho_1} \overset{\circ}{b}{}^t_{\rho_1} + \dots + y^{\rho_1} \dots y^{\rho_n} \overset{\circ}{b}{}^t_{\rho_1 \dots \rho_n}, \end{cases} \tag{13}$$

risulta, in base alla simmetria dei sistemi $\boldsymbol{b}_{\rho_1 \dots \rho_i}$, per esempio

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x^t}{\partial y^\sigma} = b_\sigma{}^t + 2y^{\rho_2} b^t_{\sigma\rho_2} + 3y^{\rho_2} y^{\rho_3} b^t_{\sigma\rho_2\rho_3} + \dots + ny^{\rho_2} \dots y^{\rho_n} b^t_{\sigma\rho_2 \dots \rho_n}, \\ v^t_{/\sigma} = \overset{\circ}{b}_\sigma{}^t + 2y^{\rho_2} \overset{\circ}{b}{}^t_{\sigma\rho_2} + 3y^{\rho_2} y^{\rho_3} \overset{\circ}{b}{}^t_{\sigma\rho_2\rho_3} + \dots + ny^{\rho_2} \dots y^{\rho_n} \overset{\circ}{b}{}^t_{\sigma\rho_1 \dots \rho_n}. \end{cases} \tag{14}$$

Allora in Ω (ossia per le y nulle) si ha:

$$(15) \qquad \left(\frac{\partial a^t}{\partial y^\sigma}\right)_\Omega = b_\sigma{}^t\,, \quad (v^t_{/\rho_1})_\Omega = \overset{\circ}{b}{}^t_{\rho_1}\,, \;\ldots,\; (v^t_{/\rho_1 \ldots \rho_n})_\Omega = n!\; \overset{\circ}{b}{}^t_{\rho_1 \ldots \rho_n}$$

da cui, tra l'altro, si vede il significato fisico delle $\boldsymbol{b}_{\rho_1 \ldots \rho_i}$.

Risolvendo le (12) rispetto alle b, per i variabile da 1 a n, in conseguenza delle (15) si hanno le

$$(16) \qquad \overset{\circ}{b}{}^s_{\rho_1 \ldots \rho_i} = V^s_{t_1 \ldots t_i} b^{t_1}_{\rho_1} \ldots b^{t_i}_{\rho_i}\,,$$

che costituiscono la suaccennata generalizzazione delle (3).

Identifichiamo V^s, ossia $V^s_{t_1 \ldots t_i}$ per $i=0$, con $v_\Omega{}^s$. Inoltre, teniamo conto che le (16) sono solubili in corrispondenza di valori iniziali arbitrari delle $b_\rho{}^t$; ne segue, in base a $(13)_2$ e (16), che l'atto di moto polinomiale v^t (all'istante iniziale) è determinato dal sistema $V^s_{t_1 \ldots t_i}$ $(i=0,\, 1,\, \ldots,\, n)$. Tale sistema costituisce, quindi, l'analogo per i moti polinomiali delle caratteristiche $u,\, v,\, w,\, p,\, q,\, r$ di un moto rigido (cfr. [5], pag. 184). Le quantità $V^s_{t_1 \ldots t_i}$ possono, allora, chiamarsi *caratteristiche del moto polinomiale all'istante considerato.*

Pensate le $V^s_{t_1 \ldots t_i}$ come funzioni assegnate del tempo, le (16) rappresentano una generalizzazione delle formule di Poisson (riferite ad una terna fissa), includente (3) come caso particolare.

Risolte le (3) (ossia le (16) per $i=1$), la risoluzione delle (16) per i da 2 ad n si effettua mediante integrazioni rispetto al tempo.

2. Epressione dei momenti generalizzati delle quantità di moto di ordini 0, 1, ..., n mediante la forza viva nel caso di un moto polinomiale di ordine n.

È noto che, con riguardo ad un sistema rigido, la forza viva può pensarsi come funzione delle caratteristiche del moto rigido, cioè delle componenti $u,\, v,\, w,\, p,\, q,\, r$ dei vettori caratteristici $\boldsymbol{v}_\Omega$ ed $\boldsymbol{\omega}$ rispetto ad una terna solidale; le derivate parziali rispetto ad $u,\, v,\, w$, e $p,\, q,\, r$ della $\mathcal{T}$ si identificano, rispettivamente, con le componenti secondo la medesima terna della quantità di moto $\boldsymbol{Q}$ e del momento delle quantità di moto $\boldsymbol{K}_\Omega$ rispetto ad Ω.

Tali relazioni sono suscettibili di generalizzazione nel caso in esame. Invero, per le (13)

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{2} \Sigma\, m(\boldsymbol{v}_\Omega + y^{\rho_1} \overset{\circ}{\boldsymbol{b}}_{\rho_1} + \; \ldots \; + y^{\rho_1} \; \ldots \; y^{\rho_n} \overset{\circ}{\boldsymbol{b}}_{\rho_1 \ldots \rho_n})^2, \tag{17}$$

onde

$$\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial v_\Omega{}^i} = \Sigma\, m(v_\Omega{}^i + y^{\rho_1} \overset{\circ}{b}{}^i_{\rho_1} + \; \ldots \; + y^{\rho_1} \; \ldots \; y^{\rho_n} \overset{\circ}{b}{}^i_{\rho_1 \ldots \rho_n}), \tag{18}$$

ossia

$$\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial v_\Omega{}^i} = \Sigma\, m v^i = Q^i. \tag{19}$$

Analogamente, intendendosi

$$K_\Omega^{*\rho_1 \ldots \rho_p,\, i} = \Sigma\, m v^i y^{\rho_1} \; \ldots \; y^{\rho_p}, \tag{20}$$

si ha

$$K_\Omega^{*\rho,\, i} = \Sigma\, m v^i y^\rho = \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \overset{\circ}{b}_\rho{}^i} \tag{21}$$

e, in generale [3])

$$K_\Omega^{*\rho_1 \ldots \rho_p,\, i} = \Sigma\, m v^i y^{\rho_1} \; \ldots \; y^{\rho_p} = \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \overset{\circ}{b}{}^i_{\rho_1 \ldots \rho_p}}. \tag{21'}$$

Essendo $\mathfrak{T}$ una forma quadratica nelle v^i e $\overset{\circ}{b}{}^i_{\rho_1 \ldots \rho_p}$ (p $= 1, 2, \ldots, n$), da (19) e (21′) segue:

$$\begin{aligned} 2\mathfrak{T} &= Q_i v_\Omega{}^i + \sum_{p=1}^{n} \delta_{ij} K_\Omega^{*\rho_1 \ldots \rho_p,\, i} \overset{\circ}{b}{}^j_{\rho_1 \ldots \rho_p} = \\ &= \sum_{p=0}^{n} \delta_{ij} K_\Omega^{*\rho_1 \ldots \rho_p,\, i} \overset{\circ}{b}{}^j_{\rho_1 \ldots \rho_p}, \end{aligned} \tag{22}$$

---

[3]) La $\mathfrak{T}$, nella (17), si pensi definita per valori qualunque di $\overset{\circ}{\boldsymbol{b}}_{\rho_1 \ldots \rho_i}$, anche non simmetrici rispetto agli indici; da questo punto di vista si intendono eseguite le derivazioni.

ove $K_{\Omega}^{*\rho_1 \dots \rho_p, i}$ e $b^j_{\rho_1 \dots \rho_p}$ per $p=0$ sono definiti da

$$K_{\Omega}^{*i}=Q^i \quad , \quad b^i=x_{\Omega}{}^i \qquad (\text{onde } \overset{\circ}{b}{}^i=v_{\Omega}{}^i). \tag{23}$$

Per $p=1, 2, \dots$ consideriamo il tensore a p indici

$$A_*^{\rho_1 \dots \rho_p}=\Sigma\, my^{\rho_1} \dots y^{\rho_p}, \tag{24}$$

completamente simmetrico. Stante (21′), le (17) e (20) divengono

$$\begin{cases} \mathcal{T}=\frac{1}{2} \sum\limits_{p,\, q=0}^{n} A_*^{\rho_1 \dots \rho_p,\, \sigma_1 \dots \sigma_q} \overset{\circ}{b}{}^i_{\rho_1 \dots \rho_p} \overset{\circ}{b}_{i\sigma_1 \dots \sigma_q}, \\ K_{\Omega}^{*\rho_1 \dots \rho_p,\, i}=\sum\limits_{p=0}^{n} A_*^{\rho_1 \dots \rho_p,\, \sigma_1 \dots \sigma_q} \overset{\circ}{b}{}^i_{\sigma_1 \dots \sigma_q}. \end{cases} \tag{25}$$

Fissato un istante t_0, a tale istante siano

$$x_{\Omega}{}^i=0, \quad b^i_{\rho_1}=\delta^i_{\rho_1}, \quad b^i_{\rho_1 \dots \rho_p}=0 \quad (p=2, 3, \dots, n); \tag{26}$$

allora per (13) e (20) si ha:

$$r_j=x_i=y_i\,, \qquad K^{*\rho_1 \dots \rho_p,\, i}_{\Omega}=K^{\rho_1 \dots \rho_p,\, i}_{\Omega}. \tag{27}$$

3. Espressione dei momenti generalizzati delle quantità di moto mediante un'opportuna generalizzazione dell'omografia di inerzia e le caratteristiche di un moto polinomiale.

Scriviamo l'analoga della (4) assumendo come polo un generico punto Ω (eventualmtente variabile) anzichè G, come segue

$$K_{\Omega}{}^{ls}=A^{lt}V_t{}^s. \tag{28}$$

Si ha, per la $(13)_2$,

$$K_{\Omega}^{lh,\, s}=\Sigma\, mr^l r^h v^s=\Sigma\, mr^l r^h[v_{\Omega}{}^s+y^{\rho_1}\overset{\circ}{b}{}^s_{\rho_1}+ \dots +y^{\rho_1} \dots y^{\rho_n}\overset{\circ}{b}_{\rho_1 \dots \rho_n}] \tag{29}$$

e per le (16)

$$(30) \qquad K_\Omega^{lh,\,s} = \Sigma\, m r^l r^h [v_\Omega{}^s + y^{\rho_1} b^{t_1}_{\rho_1} V^s_{t_1} + \ldots + y^{\rho_1} \ldots y^{\rho_n} b^{t_1}_{\rho_1} \ldots b^{t_n}_{\rho_n} V^s_{t_1 \ldots t_n}].$$

All'istante $t=t_0$, per le (26) e (27), tale relazione diviene

$$(30') \qquad K_\Omega^{lh,\,s} = \Sigma\, m r^l r^h [v_\Omega{}^s + r^{t_1} V^s_{t_1} + \ldots + r^{t_1} \ldots r^{t_n} V^s_{t_1 \ldots t_n}].$$

Per $p=1, 2, \ldots$ introduciamo il tensore a p indici completamente simmetrico

$$(31) \qquad A^{s_1 \ldots s_p} = \Sigma\, m r^{s_1} \ldots r^{s_p},$$

uguale a $A_*^{s_1 \ldots s_p}$ per $t=t_0$.

Per $t=t_0$ risulta allora pure

$$(32) \qquad K_\Omega^{lh,\,s} = A^{lh} v_\Omega{}^s + A^{lht_1} V^s_{t_1} + \ldots + A^{lht_1 \ldots t_n} V^s_{t_1 \ldots t_n},$$

che costituisce una generalizzazione della (28), e quindi di una nota espressione del momento delle quantità di moto.

Più generalmente si dimostra che l'analoga espressione per le quantità di moto (generalizzate) di ordine n è la seguente

$$(32') \qquad K_\Omega^{l_1 \ldots l_p,\,s} = A^{l_1 \ldots l_p} v_\Omega{}^s + A^{l_1 \ldots l_p t_1} V^s_{t_1} + \ldots + A^{l_1 \ldots l_p t_1 \ldots t_n} V^s_{t_1 \ldots t_n}.$$

In essa possiamo riguardare il sistema $A^{l_1 \ldots l_p t_1 \ldots t_i}$ $(i=0, \ldots, n)$ come una generalizzazione dell'omografia di inerzia.

4. Equazioni dei momenti lagrangiani generalizzati per sistemi a vincoli lisci oppure qualsiasi - Osservazioni sui momenti generalizzati.

Ci proponiamo di stabilire alcune equazioni che, con riguardo ad un generico moto polinomiale, consentano, a meno di condizioni iniziali, la determinazione delle V (oppure delle b); esse risolvono un problema analogo a quello risoluto dalle equazioni di Eulero con riguardo al moto di un sistema rigido intorno al baricentro.

Conformemente a (23) possiamo scrivere le (13) nella forma

$$(33)\qquad x^i = \sum_{p=0}^{n} b^i_{\rho_1 \dots \rho_p} y^{\rho_1} \dots y^{\rho_p}, \qquad v^i = \sum_{p=0}^{n} \overset{\circ}{b}{}^i_{\rho_1 \dots \rho_p} y^{\rho_1} \dots y^{\rho_p}$$

e considerare le $b^i_{\rho_1 \dots \rho_p} (p=0, \dots, n)$ come coordinate lagrangiane q_1, q_2, ..., q_N; le coordinate cartesiane dei punti M di S si esprimono linearmente nelle $b^i_{\rho_1 \dots \rho^p}$. Denotiamo con $\boldsymbol{F}^{(a)}$ la forza attiva agente sul generico punto M; poniamo

$$(34)\qquad Q_r^{\rho_1 \dots \rho_p} = \sum F_r^{(a)} \frac{\partial x^r}{\partial b^i_{\rho_1 \dots \rho_p}}, \qquad \mathfrak{F}_r^{*(a)\rho_1 \dots \rho_p} = \sum F_r^{(a)} y^{\rho_1} \dots y^{\rho_p}$$

e diciamo $\mathfrak{F}_r^{(a)\rho_1 \dots \rho_i}$ *momento lagrangiano generalizzato delle forze attive agenti su S*. Per $t=t_0$ esso si riduce al momento euleriano generalizzato della stessa forza (vedi (7) e $(27)_1$).

Da (33) e (34) segue

$$(35)\qquad \frac{\partial x^i}{\partial b^i_{\rho_1 \dots \rho_p}} = y^{\rho_1} \dots y^{\rho_p}, \qquad Q_r^{\rho_1 \dots \rho_p} = \mathfrak{F}_r^{*(a)\rho_1 \dots \rho_p},$$

onde per (25):

$$(36)\qquad \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial b^i_{\rho_1 \dots \rho_p}} = 0, \qquad \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \overset{\circ}{b}{}^i_{\rho_1 \dots \rho_r}} = K_i^{*\rho_1 \dots \rho_p} \qquad (p=0, \dots, n).$$

Di conseguenza, supposti lisci i vincoli, le equazioni di Lagrange si scrivono

$$(37)\qquad \overset{\circ}{K}{}_i^{*\rho_1 \dots \rho_p} = Q_i^{\rho_1 \dots \rho_p} \equiv \mathfrak{F}_i^{*(a)\rho_1 \dots \rho_p} \qquad (p=0, 1, \dots, n)$$

e per $(25)_2$,

$$(38)\qquad \sum_{q=0}^{n} A_*^{\rho_1 \dots \rho_p, \sigma_1 \dots \sigma_q} \overset{\circ\circ}{b}_{i\sigma_1 \dots \sigma_q} = \mathfrak{F}_i^{*(a)\rho_1 \dots \rho_p}.$$

Moltiplicando le (6) per $y^{\rho_1} \dots y^{\rho}$ in corrispondenza al generico punto di S, sommando e tenendo conto delle definizioni (20) si ha

$$(39)\qquad \overset{\circ}{K}{}_i^{*\rho_1 \dots \rho_p} = \mathfrak{F}_i^{*\rho_1 \dots \rho_p}$$

con

$$\mathfrak{F}_i^{*\rho_1 \dots \rho_p} = \Sigma F_i y^{\rho_1} \dots y^{\rho_p}. \tag{39'}$$

Le (39) possono dirsi le *equazioni dei momenti lagrangiani generalizzati* e si riferiscono a *tutte* le forze, attive e vincolari.

Le (37), valide nel caso di vincoli lisci, sono le analoghe *per le sole forze attive.*

Per (37) e (39') *la condizione che S sia a vincoli lisci è*

$$\mathfrak{F}_i^{*(v)\rho_1 \dots \rho_p} = 0 \qquad (p=0, 1, \dots, n) \tag{40}$$

e le *condizioni di equilibrio di S,* supposto a vincoli lisci, sono

$$\mathfrak{F}_i^{*(a)\rho_1 \dots \rho_p} = 0 \qquad (p=0, 1, \dots n) \tag{40'}$$

Consideriamo ora il sistema S' ottenuto da S con l'aggiunta dei ν vincoli:

$$f_j(q_1, \dots, q_N) = 0 \qquad (j=1, 2, \dots, \nu). \tag{41}$$

Stante l'attuale significato delle coordinate lagrangiane, le (38) vanno sostituite con le

$$\sum_{p=0}^{n} A_*^{\rho_1 \dots \rho_p, \sigma_1 \dots \sigma_q} \overset{\circ\circ}{b}{}^i_{\sigma_1 \dots \sigma_q} = \mathfrak{F}^{*(a)\rho_1 \dots \rho_p} + \sum_{j=1}^{\nu} \lambda^j \frac{\partial f_j}{\partial b^{\rho_1 \dots \rho_p}}. \tag{42}$$

Il sistema vincolato rappresentato dalle (41) e (42) può essere, in particolare, un corpo rigido; basta porre $n=1$ ed identificare le (41) coi vincoli di rigidità

$$f^{hk} = \delta^{\rho\sigma} b_\rho{}^h b_\sigma{}^k - \delta^{hk} = 0 \tag{41'}$$

onde $\dfrac{\partial f^{hk}}{\partial b_\tau{}^i} = \delta_i{}^h b^{k\tau} + \delta_i{}^k b^{h\tau}$.

Eliminando i parametri λ^j dalle (42) e (41') si ottengono equazioni equivalenti a quelle di Eulero (per $p=1$) o a quella della quantità di moto (per $p=0$).

È immediato dedurre alcune proprietà dei momenti generalizzati delle quantità di moto e delle forze. Riferiamoci, per es., ai momenti delle quantità di moto; in modo del tutto analogo si comportano i momenti delle forze agenti su S.

Sia $K_{\Omega}^{\rho_1 \cdots \rho_p, i}$ il momento di ordine p, rispetto ad Ω, delle quantità di moto e sia Ω' un punto diverso da Ω. Posto

$$\boldsymbol{r}=\Omega P, \quad \boldsymbol{r}'=\Omega' P, \quad \boldsymbol{r}^*=\Omega'\Omega,$$

con riguardo alle componenti si ha:

$$K_{\Omega'}^{\rho_1 \cdots \rho_p, i}=\Sigma\, m v_i(r^{\rho_1}+r^{*\rho_1}) \ldots (r^{\rho_p}+r^{*\rho_p}) \tag{43}$$

ossia:

$$K_{\Omega'}^{\rho_1 \cdots \rho_p, i}=K_{\Omega}^{\rho_1 \cdots \rho_p, i}+\sum_{l=1}^{p} r^{*\rho_l} K_{\Omega}^{\rho_1 \cdots \rho_{l-1}\rho_{l+1} \cdots \rho_p, i}+ \tag{44}$$
$$+\sum_{l,\,s=1}^{p} r^{*\rho_l} r^{*\rho_s} K^{\rho_1 \cdots \rho_{l-1}\rho_{l+1} \cdots \rho_{s-1}\rho_{s+1} \cdots \rho_p, i}+ \ldots + r^{*\rho_1} \ldots r^{*\rho_p} K_{\Omega}^{i}.$$

Se per un particolare punto Ω *è* $K_{\Omega}^{\rho_1 \cdots \rho_p, i}=0$ *per* $p=0, 1, \ldots, n$, *allora, qualunque sia* Ω', *si ha*:

$$K_{\Omega'}^{\rho_1 \cdots \rho_p, i}=0 \qquad (p=0, 1, \ldots, n). \tag{45}$$

Inoltre, *se* $K_{\Omega}^{\rho_1 \cdots \rho_n, i}=0$ *per ogni* Ω, *risulta*

$$K_{\Omega}^{\rho_1 \cdots \rho_p, i}=0 \qquad (p=0, 1, \ldots, n-1). \tag{46}$$

Invero, nella condizione posta, la quantità $K_{\Omega}^{\rho_1 \cdots \rho_n, i}$ espressa dalla (44) per $p=n$ è nulla comunque si scelgano $r^{*\rho_1}, \ldots, r^{*\rho_n}$, il che implica le (46).

Ciò generalizza il noto fatto che l'annullarsi del momento delle quantità di moto rispetto a qualunque punto implica l'annullarsi della quantità di moto.

5. Introduzione del moto polinomiale dell'Appell associato al sistema S - Corrispondente generalizzazione di un teorema dell'Almansi.

Consideriamo un generico sistema S (continuo o particellare) animato di moto, eventualmente non polinomiale, e proponiamoci di generalizzare un teorema dell'Almansi (cfr. [2] e [3]) al caso di un atto di moto di trascinamento polinomiale.

Teniamo fissi t e le $b^i_{\rho_1 \dots \rho_p}$ e cerchiamo le $\overset{\circ}{b}{}^i_{\rho_1 \dots \rho_p}$ per cui l'energia cinetica relativa sia minima.

In corrispondenza all'atto di moto

$$B \equiv [b^i_{\rho_1 \dots \rho_p}, \ \overset{\circ}{b}{}^i_{\rho_1 \dots \rho_p}; \ p=0, 1, \dots, n]$$

si ha:

$$\mathcal{T}^{(r)} = \tfrac{1}{2} \Sigma\, m(v_i - v_i^{(\tau)})(v^i - v^{(\tau)i}), \qquad v^{(\tau)i} = \sum_{p=0}^{n} \overset{\circ}{b}{}^i_{\rho_1 \dots \rho_p} y^{\rho_1} \dots y^{\rho_p}. \tag{47}$$

Stante $(13)_2$, le $\overset{\circ}{b}{}^i_{\rho_1 \dots \rho_p}$ che rendono minima la $\mathcal{T}^{(r)}$ ritenendosi assegnate le $b^i_{\rho_1 \dots \rho_p}$ verificano le

$$\frac{\partial \mathcal{T}^{(r)}}{\partial \overset{\circ}{b}{}^i_{\rho_1 \dots \rho_p}} = - \Sigma\, m(v_i - v_i^{(\tau)}) \frac{\partial v^{(\tau)i}}{\partial \overset{\circ}{b}{}^i_{\rho_1 \dots \rho_p}} = - \Sigma\, m(v_i - v_i^{(\tau)}) y^{\rho_1} \dots y^{\rho_p} = 0. \tag{48}$$
$$(p=0, 1, \dots, n).$$

Per (20), le $(48)_3$ equivalgono alle

$$K_\Omega^{*(r)\rho_1 \dots \rho_p, i} = K_\Omega^{*\rho_1 \dots \rho_p, i} - K_\Omega^{*(\tau)\rho_1 \dots \rho_p, i} = 0 \qquad (p=0, 1, \dots, n) \tag{49}$$

essendo $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_i^{(r)} + \boldsymbol{v}_i^{(\tau)}$ e

$$K_\Omega^{*(r)\rho_1 \dots \rho_p, i} = \Sigma\, m v_i^{(r)} y^{\rho_1} \dots y^{\rho_p}, \quad K_\Omega^{*(\tau)\rho_1 \dots \rho_p, i} = \Sigma\, m v_i^{(\tau)} y^{\rho_1} \dots y^{\rho_p}. \tag{50}$$

Le $(49)_2$, stante $(25)_2$, si scrivono

$$\sum_{q=0}^{n} A_*^{\rho_1 \dots \rho_p, \sigma_1 \dots \sigma_q} \overset{\circ}{b}{}^i_{\sigma_1 \dots \sigma_q} = K_\Omega^{*\rho_1 \dots \rho_p, i} \qquad (p=0, \dots, n). \tag{51}$$

Si osservi ora che, in quanto equazioni di Lagrange nelle coordinate lagrangiane $b^i_{\sigma_1 \dots \sigma_p}$, le (38) sono risolubili [4]) rispetto alle $\overset{\circ\circ}{b}{}^i_{\sigma_1 \dots \sigma_p}$, qualunque siano le $\mathcal{F}^{*(a)\rho_1 \dots \rho_p}$; quindi *è diverso da zero il determinante delle* $A_*^{\rho_1 \dots \rho_p, \sigma_1 \dots \sigma_q}$ e, in conseguenza, le (51) sono risolubili rispetto alle $\overset{\circ}{b}{}^i_{\sigma_1 \dots \sigma_q}$.

---

[4]) Supponiamo che $\mathcal{T}$ espressa mediante la (17) sia una forma definita positiva. Tale ipotesi è certo verificata nel caso di un sitema continuo.

Essendo dato il moto di S, fissati comunque le $b^i_{\sigma_1 \dots \sigma_q}$ $(q=0, \dots, n)$ e l'istante t, si possono calcolare i valori delle $A_*^{\rho_1 \dots \rho_p, \sigma_1 \dots \sigma_q}$ e $K_\Omega^{*\rho_1 \dots \rho_p i}$, che competono al sistema S all'istante t sicchè, risolvendo le (51), si vengono in sostanza ad esprimere le $\mathring{b}^i_{\sigma_1 \dots \sigma_p}$ in funzione delle $b^i_{\sigma_1 \dots \sigma_p}$ $(p=0, \dots, n)$ e di t. Tali espressioni costituiscono un sistema normale di equazioni differenziali nelle $b^i_{\sigma_1 \dots \sigma_p}$ che, sotto late condizioni di regolarità sul moto di S, sono risolubili in corrispondenza a condizioni iniziali generiche, per es. del tipo (26).

Si può, dunque, determinare un moto polinomiale di ordine n che ad ogni istante minimizza l'energia cinetica relativa di S.

L'analogo risultato ottenuto nel precedente lavoro [1] rientra in quest'ultimo allorchè si scelga l'atto di moto B in modo che sia $b^i_{\rho_1 \dots \rho_p}=0$ per $p>1$.

Il considerato moto polinomiale di ordine n ottenuto in base alle (51) verifica in ogni istante le (49) ossia annulla i momenti generalizzati relativi delle quantità di moto di S degli ordini $0, 1, \dots, n$; esso può dirsi *moto polinomiale dell'Appell di ordine n associato ad* S, ed è determinato quando siano date le condizioni iniziali. A tale riguardo, non sono essenziali i valori iniziali delle b^i e $b_\rho{}^i$ mentre quelli delle $b^i_{\rho_1 \dots \rho_p}$ per $p>1$ lo sono.

Resta così esteso ai moti polinomiali di ordine n un teorema di Almansi: *Il moto di trascinamento polinomiale di ordine n, soddisfacente a date condizioni iniziali che ad ogni istante minimizza (mediante la propria distribuzione di velocità) l'energia cinetica relativa $\mathcal{T}^{(r)}$ del sistema materiale S è quello che (mediante la propria distribuzione di velocità) annulla i momenti generalizzati della quantità di moto relative di S degli ordini* 0, 1, ..., *n*.

Osserviamo che si può dare un'altra generalizzazione del teorema dell'Almansi. A tale scopo, consideriamo il caso in cui valgano le (26) e quindi anche le (27). Allora per (32′) le $(50)_2$ possono scriversi

$$K_\Omega^{l_1 \dots l_p, i} = K_\Omega^{(\tau) l_1 \dots l_p, i} = \sum A^{l_1 \dots l_p, t_1 \dots t_q} V^i_{t_1 \dots t_q}, \qquad (p=0, 1, \dots, n), \tag{52}$$

ove $V^i = \mathring{x}_\Omega{}^i = v_\Omega{}^i$.

Per le (26) le $A^{l_1 \dots l_p\ t_1 \dots t_q}$ coincidono con le $A_*^{l_1 \dots l_p, t_1 \dots t_q}$ e quindi, per una proprietà già accennata per queste ultime, il determinante delle

$A^{l_1 \dots l_p, t_1 \dots t_q}$ è diverso da zero. Inoltre, essendo noto il moto di S, ad ogni istante si possono calcolare i valori delle $A^{l_1 \dots l_p, t_1 \dots t_q}$ e delle $K_{\Omega}^{l_1 \dots l_p, i}$ sicchè dalle (52) si ricavano le $V^i_{t_1 \dots t_q}$ in funzione del tempo. Stante (26) e (27), per (12) le $V^i_{t_1 \dots t_q}$ coincidono con le $\overset{\circ}{b}{}^i_{t_1 \dots t_q}$ e le y^i coincidono con le x^i; in conseguenza, per $(33)_2$, le v^i risultano determinate per ogni punto di S.

Noto l'atto di moto all'istante t è univocamente determinato un moto del fluido di trascinamento avente, per ogni t, tale atto di moto. Questo moto di trascinamento, già considerato in [2], può dirsi *moto dell'Appell avente atto di moto polinomiale di ordine n nelle coordinate cartesiane associato ad S.*

Poichè ad ogni istante questo moto verifica le (48) e (52) si può enunciare la seguente seconda generalizzazione del teorema dell'Almansi: *Il moto di trascinamento avente ad ogni istante atto di moto polinomiale di ordine n nelle coordinate che minimizza l'energia cinetica relativa di S è quello che annulla i momenti generalizzati delle quantità di moto relative degli ordini* 0, ..., *n rispetto a qualche* (e quindi ad ogni) *punto* Ω.

Dal precedente teorema risulta [cfr. (49 per $p=0$] che $\boldsymbol{v}_G = \boldsymbol{v}_G^{(\tau)}$.

Ciò non implica affatto che $v_G{}^i$ uguagli la velocità $e_G{}^i$ dell'elemento del fluido di trascinamento sovrapposto a G; anzi può essere differente, come tra l'altro risulta da un esempio considerato nel precedente lavoro [2].

BIBLIOGRAFIA

[1] De Franchis, F.: *Qualche generalizzazione con lo spazio dell'Appell*, Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova, 1967, pp. 104-111.

[2] De Franchis, F., *Sul fluido ideale di riferimento, di un certo tipo generale, rispetto a cui è minima l'energia cinetica relativa di un dato sistema materiale*, Rendiconti del Seminario matematico dell'Università di Padova, 1967, pp. 65-71.

[3] Bressan, A.: *Osservazioni di Cinematica e di Dinamica connesse con lo spazio di energia minima*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Serie II, Vol. XIII, 1964.

[4] Truesdell, C. e Toupin, R.: *Handbuch der Physik,* Vol. III.
[5] Levi Civita, T. e Amaldi, U.: *Lezioni di Meccanica razionale,* Nicola Zanichelli, Vol. I.

Manoscritto pervenuto in redazione il 2 maggio 1969.