

# RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

ADALBERTO ORSATTI

## **Una proprietà caratteristica dei gruppi abeliani torsionalmente completi**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,*  
tome 42 (1969), p. 325-328

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1969\\_\\_42\\_\\_325\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1969__42__325_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

# UNA PROPRIETÀ CARATTERISTICA DEI GRUPPI ABELIANI TORSIONALMENTE COMPLETI

ADALBERTO ORSATTI \*)

## Introduzione.

Tutti i gruppi considerati in questa nota sono abeliani e la notazione è quella additiva.

Sia  $G$  un gruppo e denotiamo con  $G_\infty$  il sottogruppo degli elementi di altezza infinita, cioè l'intersezione dei sottogruppi  $nG$  con  $n$  intero positivo. È chiaro che  $G_\infty$  contiene il sottogruppo divisibile massimale di  $G$  ed è ben noto che — se  $G$  non è libero da torsione — questa inclusione è in generale propria. Anzi, utilizzando una argomentazione di Rangaswamy [6], si dimostra facilmente che per ogni gruppo  $H$  esiste un gruppo  $G$  tale che  $G_\infty$  sia isomorfo ad  $H$ .

D'altra parte, se  $G$  è un gruppo misto con sottogruppo di torsione  $t(G)$ , particolari proprietà di  $t(G)$  implicano che  $G_\infty$  sia un gruppo divisibile. Ad esempio, abbiamo provato in [5] la seguente proposizione: se per ogni primo  $p$  la componente  $p$ -primaria di  $t(G)$  è somma diretta di un gruppo divisibile e di uno di esponente finito, allora  $G_\infty$  è divisibile. (Più in generale  $G_\infty$  è divisibile se tale è  $t(G)_\infty$  e se ogni componente primaria di  $t(G)$  è un addendo diretto di  $G$ ).

Sorge così il problema di caratterizzare la classe formata dai gruppi di torsione  $T$  che godono della seguente proprietà: se  $T$  è il

---

\*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la Matematica del C.N.R.

Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, Padova.

sottogruppo di torsione di un gruppo  $G$ , allora  $G_\infty$  è divisibile. Non è essenzialmente restrittivo limitare lo studio alla classe  $\mathcal{T}$  costituita da gruppi di torsione e ridotti per i quali la proprietà è vera. È evidente che un gruppo  $T$  appartiene a  $\mathcal{T}$  se e solo se per ogni gruppo ridotto  $G$  il cui sottogruppo di torsione sia isomorfo a  $T$  risulta  $G_\infty=0$ .

Nella presente nota si dimostra che la classe  $\mathcal{T}$  è quella dei gruppi torsionalmente completi.

1. Richiamiamo brevemente alcune definizioni e qualche proprietà della topologia naturale e dei gruppi di cotorsione.

Ogni gruppo  $G$  è un gruppo topologico nella topologia naturale (o  $n$ -adica) che si definisce prendendo come base di intorni dello zero i sottogruppi  $nG$  con  $n$  intero positivo.  $G$ , con questa topologia, risulta uno spazio di Hausdorff se e solo se  $G_\infty=0$ . Se  $G_\infty=0$  diremo che  $G$  è un gruppo di Hausdorff. Denoteremo con  $\widehat{G}$  il completamento naturale di  $G$ , cioè il completamento di  $G/G_\infty$  rispetto alla struttura uniforme di Hausdorff indotta dalla topologia naturale. Un gruppo completo è di Hausdorff.

Un gruppo di torsione dicesi torsionalmente completo se è di Hausdorff e se coincide con il sottogruppo di torsione del proprio completamento naturale, [4].

Siano  $Q$  il gruppo additivo dei razionali e  $Z$  quello degli interi. Un gruppo  $G$  dicesi di cotorsione, [2], se è ridotto (ossia  $\text{Hom}(Q, G)=0$ ) e se ogni estensione di  $G$  tramite un gruppo libero da torsione è una somma diretta (ossia  $\text{Ext}(Q, G)=0$ ). Per ogni gruppo ridotto  $G$  esiste la sequenza esatta canonica

$$(1) \quad 0 \rightarrow G \rightarrow \text{Ext}(Q/Z, G) \rightarrow \text{Ext}(Q, G) \rightarrow 0$$

che fornisce una iniezione di  $G$  nel gruppo di cotorsione  $\text{Ext}(Q/Z, G)$  con conucleo libero da torsione e divisibile, [2].  $\text{Ext}(Q/Z, G)$  si dirà il completamento cotorsionale di  $G$  e si indicherà anche con  $G^c$ .

Se  $A$  e  $B$  sono gruppi,  $\text{Pext}(A, B)$  indica il gruppo delle estensioni pure di  $B$  tramite  $A$ . Si ha  $\text{Pext}(A, B)=[\text{Ext} A, B]_\infty$ , [1], [2]. Il completamento naturale di ogni gruppo  $G$  è canonicamente isomorfo a  $\text{Ext}(Q/Z, G)/\text{Pext}(Q/Z, G)$  cioè a  $G/(G^c)_\infty$ , [3].

Un gruppo completo nella topologia naturale è di cotorsione. Un gruppo di cotorsione è completo se di Hausdorff.

**2. TEOREMA.** *Per ogni gruppo ridotto  $G$  le condizioni che seguono sono equivalenti.*

(a) *Per ogni sequenza esatta del tipo*

$$(*) \quad 0 \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow X \rightarrow 0$$

*con  $H$  ridotto ed  $X$  libero da torsione si ha  $H_{\infty} = 0$ .*

(b)  $\text{Pext}(Q/Z, G) = 0$ .

(c) *Il sottogruppo di torsione  $t(G)$  di  $G$  è torsionalmente completo.*

(d)  $\widehat{G} \cong G^c$ .

**DIM.** (a)  $\Rightarrow$  (b). Consideriamo la sequenza esatta (1).  $\text{Ext}(Q/Z, G)$  è ridotto ad  $\text{Ext}(Q, G)$  è libero da torsione. Pertanto  $\text{Pext}(Q/Z, G) = 0$ .

(b)  $\Rightarrow$  (a). Consideriamo la sequenza esatta (\*) scritta nell'enunciato (a). L'iniezione di  $G$  in  $H$  è pura poichè  $X$  è libero da torsione. Pertanto la (\*) dà luogo, [3], alla sequenza esatta:

$$0 \rightarrow \text{Pext}(Q/Z, G) \rightarrow \text{Pext}(Q/Z, H) \rightarrow \text{Pext}(Q/Z, X) \rightarrow 0.$$

Ora  $\text{Pext}(Q/Z, X) = 0$ , poichè coincide con il sottogruppo divisibile massimale di  $\text{Ext}(Q/Z, X)$  che è di cotorsione e libero da torsione.

Quindi  $\text{Pext}(Q/Z, H) = \text{Pext}(Q/Z, G) = 0$ . Si ha pertanto  $(H^c)_{\infty} = 0$ .

Poichè  $H$  è ridotto,  $H$  è canonicamente isomorfo ad un sottogruppo di  $H^c$  e quindi anche  $H_{\infty} = 0$ .

(b)  $\Leftrightarrow$  (c). Abbiamo appena osservato che  $\text{Pext}(Q/Z, X) = 0$  per ogni gruppo libero da torsione  $X$ . Da questo fatto consegue che per ogni gruppo  $G$   $\text{Pext}(Q/Z, G)$  è canonicamente isomorfo a  $\text{Pext}(Q/Z, t(G))$ . Basta quindi provare che la condizione (b) è equivalente alla (c) per ogni gruppo ridotto e di torsione  $T$ . Se  $\text{Pext}(Q/Z, T) = 0$ , si ha  $\widehat{T} = T^c$  da cui, scrivendo per  $T$  la sequenza esatta (1),  $\widehat{T}/T \cong \text{Hom}(Q, T)$

che è libero da torsione. Allora  $T = t(\widehat{T})$ , cioè  $T$  è torsionalmente completo. Osserviamo ora che  $\text{Pext}(Q/Z, \widehat{T}) = 0$  poichè  $\widehat{T}$  è di co-torsione e di Hausdorff. Quindi, se  $T = t(\widehat{T})$ , si ha  $\text{Pext}(Q/Z, T) = 0$ .

(b)  $\Leftrightarrow$  (d). Infatti  $\widehat{G} \cong G^e$  se e solo se  $G^e$  non ha elementi di altezza infinita.

**COROLLARIO.** *Un gruppo ridotto e di torsione  $T$  appartiene alla classe  $\mathcal{G}$  se e solo se  $T$  è torsionalmente completo.*

**OSSERVAZIONE.** È ben noto che un gruppo ridotto e di torsione  $T$  è torsionalmente completo se e solo se per ogni primo  $p$  la componente  $p$ -primaria di  $T$  è un  $p$ -gruppo chiuso [1].

Pertanto la equivalenza tra le condizioni (b) e (c) del teorema precedente poteva dedursi anche da un teorema di Kulikov ([1], Theorem 34.6).

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] FUCHS L.: « *Abelian groups* », Budapest, 1958.
- [2] HARRISON D. K.: « *Infinite abelian groups and homological methods* », *Annals of Math.*, 69, (1959), 366-91.
- [3] HARRISON D. K.: « *On the structure of ext.* », *Topics in abelian groups*, Edited by J. M. Irwin and E. A. Walker, (1963), 195-209.
- [4] KAPLANSKY I., « *Infinite abelian groups* », Ann Arbor, 1954.
- [5] ORSATTI A.: « *Una caratterizzazione dei gruppi abeliani compatti o localmente compatti nella topologia naturale* », *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, XXXIX (1967), 219-225.
- [6] RANGASWAMY K. M.: « *On  $\Sigma$ -groups* », *Bull. Soc. Math. France*, 92, (1964), 259-62.

Manoscritto pervenuto in redazione il 18 febbraio 1969.