RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

A. BARLOTTI

Sulle 2-curve nei piani grafici

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 37 (1967), p. 91-97
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__37__91_0>

SULLE 2-CURVE NEI PIANI GRAFICI

di A. BARLOTTI (*a Firenze*) *)

1. In un piano grafico qualsiasi diamo il nome di *n-curva* a un insieme, C, di punti che goda delle due seguenti proprietà:

i) ogni retta incontra C in al più n punti;

ii) l'insieme C è completo nei confronti della proprietà precedente: cioè non si può ampliare C, mediante l'aggiunta di punti, senza che venga meno la *i*).

Questa definizione ci sembra che possa presentare un duplice interesse. Essa infatti porta ad esaminare in che rapporto stanno, nei piani sopra un corpo, le n-curve con le curve algebriche irriducibili di ordine n, e permette inoltre di introdurre enti, in un certo senso analoghi a tali curve, in piani nei quali non è agevole, e può portare a singolari paradossi [1]), dare analiticamente una definizione di curva.

Nel piano sopra il campo complesso una curva algebrica irriducibile di ordine $n(> 1)$ è una n-curva. Riteniamo che non sia ancora risolta la questione di stabilire se, viceversa, su un tale piano una n-curva (con $n > 1$), che eventualmente soddisfi a qualche ulteriore condizione di natura grafica o topologica, sia una curva algebrica di ordine n (cfr., p. es., [2] pagg. 351-353).

Le n-curve di un piano lineare finito, $S_{2,q}$, di ordine q sono i $(k; n)$-archi completi (cfr. [1]). Le coniche irriducibili di $S_{2,q}$, per q dispari, sono delle 2-curve che in ogni punto posseggono una sola retta tangente [2]). Un noto

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la matematica del C.N.R.

Indirizzo dell'A.: Via Cairoli, 72, Firenze.

[1]) Cfr. [4].

[2]) Diremo che una retta è *secante*, *h-secante*, *tangente* o *esterna* per una n-curva a seconda che contenga rispettivamente n, h (con $1 < h < n$), uno o zero punti di essa.

teorema di B. Segre (cfr. [5]) assicura che viceversa, per q dispari, ogni 2-curva di $S_{2,q}$ che in un punto (e quindi in ogni punto) possegga una sola retta tangente è una conica irriducibile.

Nella presente nota vogliamo indicare dei procedimenti costruttivi mediante i quali si ottengono delle 2-curve che godono di particolari proprietà.

Ad esempio in un piano numerabile, scelti a priori due sistemi E e T di rette che soddisfino certe condizioni, è possibile ottenere una 2-curva per la quale E è il sistema delle rette esterne e T quello delle tangenti [cfr. n. 2, *b*)]. Poichè $E \cup T$ può essere l'insieme vuoto ne risulta l'esistenza di 2-curve per le quali ogni retta del piano è una secante.

Le considerazioni che svolgeremo si possono estendere senza difficoltà introducendo delle n-curve nel piano o delle n-varietà in un iperspazio a un numero qualunque di dimensioni.

2. Chiamiamo *piano numerabile* un piano grafico infinito i cui elementi costituiscano un insieme numerabile, cioè un piano tale che si possa stabilire un'applicazione biunivoca, Ω, dei suoi elementi (punti e rette) sull'insieme dei numeri naturali [3]). Se π è un piano numerabile, ed è fissata la Ω, diremo indice di un elemento, α, di π il numero naturale, i, che corrisponde ad α nella Ω.

Esempi di piani numerabili sono il piano razionale e i piani liberi, F_m, ($m \geq 4$) (Marshall Hall Jr., cfr. [3]) generati come estensione libera di una struttura di incidenza costituita da $m-2$ punti appartenenti ad una retta e da due punti esterni a questa.

Qui di seguito indicheremo alcuni modi con i quali si ottengono delle 2-curve in un piano numerabile, π.

a) Si costruisca nel piano π una successione, B_2, B_3, ... di k-archi [4]) nel modo seguente: B_2 è costituito da una qualunque coppia di punti distinti. Definito B_r, se F_{r+1} è il punto di indice più basso fra quelli che non sono contenuti in alcuna retta congiungente due punti di B_r, l'arco B_{r+1} è quello che si ottiene aggiungendo P_{r+1} ai punti di B_r. L'insieme $\bigcup_{r=2}^{\infty} B_r$ è allora una 2-curva, come si verifica facilmente.

[3]) È subito visto che un piano grafico è numerabile quando risulta numerabile l'insieme dei punti di una sua retta.

[4]) In un piano un k-arco è un insieme di k (≥ 2) punti di cui mai tre risultano allineati.

Nulla si può dire a priori su come siano costituiti gli insiemi delle rette tangenti ed esterne [cfr. [2]] di questa 2-curva. Daremo ora una diversa costruzione che porta a delle 2-curve aventi gli insiemi delle tangenti e delle rette esterne opportunamente preassegnati.

b) Consideriamo nel piano π due insiemi, E e T, di rette tali che:

I. $E \cap T = \varnothing$.

II. Se una retta non appartiene ad E, vi sono infiniti punti di essa dai quali non passano rette di $E \cup T$, diverse dalla retta stessa qualora questa appartenga a T. Esiste almeno una retta non appartenente ad E.

Se sono soddisfatte tali condizioni si può provare che *esiste una 2-curva per la quale E è l'insieme delle rette esterne e T è l'insieme delle tangenti.*

Dimostrazione: Indichiamo con P_i (con r_i) il punto (la retta) di indice i. Si definisca, per induzione, una successione di punti nel modo seguente: sia r_{j_1} quella, fra le rette non appartenenti ad E, che ha indice più piccolo, e sia P_{i_1} quello, fra i punti di r_{j_1} non situati su rette di E, che ha indice più piccolo. Supposto poi di aver definito $P_{i_2}, \dots, P_{i_{s-1}}$, si definisca P_{i_s} nel modo seguente. Sia r_{j_s} la retta di indice più piccolo fra quelle che non appartengono a nessuno di questi tre insiemi:

1) E;

2) l'insieme delle rette appartenenti a T e contenenti uno dei punti $P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_{s-1}}$;

3) l'insieme delle rette congiungenti due dei punti $P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_{s-1}}$.

La retta r_{j_s} esiste certamente poichè il fatto che valga la II porta come conseguenza immediata che nel piano vi sono infinite rette non appartenenti ad $E \cup T$, mentre le rette dell'insieme 3) sono in numero finito.

Diciamo P_{i_s} il punto di indice più piccolo, fra quelli di r_{j_s}, che non appartiene a nessuna retta di uno degli insiemi 1), 2), 3). L'esistenza del punto P_{i_s} è assicurata dalla II e dal fatto che i punti di r_{j_s} per i quali passano le rette dell'insieme 3) sono in numero finito.

L'insieme, $\mathfrak{I}$, dei punti P_{i_l} ($l = 1, 2, \dots$) è una 2-curva per la quale E è il sistema delle rette esterne e T quello delle tangenti.

Infatti l'ipotesi che $\mathfrak{I}$ contenga tre punti allineati, P_{i_a}, P_{i_b} e P_{i_c}, con $i_a < i_b < i_c$, è in contrasto con il procedimento usato per definire P_{i_c} a partire da $P_{i_1}, \dots, P_{i_{c-1}}$. Per la stessa ragione nessuna retta di T può contenere due punti di $\mathfrak{I}$ e nessuna retta di E un punto di $\mathfrak{I}$. Inoltre ogni retta di T contiene esattamente un punto di $\mathfrak{I}$ e ogni retta non appartenente ad $E \cup T$ contiene esattamente due punti di $\mathfrak{I}$. Infatti supponiamo, per assurdo, che ciò non sia vero e indichiamo con r_d la retta di indice minimo per cui la cosa non si verifica. Diciamo $P_{i_1}, \ldots, P_{i_{h-1}}$ i punti di $\mathfrak{I}$ che si ottengono, col procedimento stabilito, in corrispondenza alle rette di indice minore di d. Il modo usato per definire P_{i_h} porta allora che questo punto va scelto su r_d; per la II, e poichè le congiungenti $P_{i_1}, \ldots, P_{i_{h-1}}$ due a due sono in numero finito, la via indicata porta effettivamente a determinare P_{i_h} sulla d. Si ha così una contraddizione se $r_d \in T$. Qualora invece r_d non appartenga ad $E \cup T$ si trova poi che tale retta deve contenere anche $P_{i_{h+1}}$ e quindi si giunge ancora ad un assurdo. Notiamo infine che per ogni punto del piano passa almeno una retta non appartenente ad $E \cup T$, cioè una secante di $\mathfrak{I}$. Ciò è una conseguenza immediata della proprietà II ammessa per i sistemi E e T. Infatti l'esistenza di una retta non appartenente ad E porta che vi sono (infinite) rette non appartenenti ad $E \cup T$. Ma allora se vi fosse un punto del piano per il quale passano solo rette di $E \cup T$, le intersezioni di queste con una qualunque retta non appartenente ad $E \cup T$ esaurirebbero i punti di quest'ultima, e ciò è contro la II. È così provato completamente l'asserto.

Qualora $E \cup T$ sia l'insieme vuoto, l'insieme $\mathfrak{I}$ è una 2-curva che è incontrata in due punti (distinti) da ogni retta del piano.

c) Il procedimento usato in *b*) per giungere ad $\mathfrak{I}$ può essere modificato nel modo seguente.

Partiamo da due insiemi E e T_0 per cui valgono le proprietà I e II [cfr. *b*)] e definiamo P_{i_1} come in *b*). Ampliamo poi eventualmente l'insieme T_0 con l'aggiunta di altre rette in modo che E e l'insieme T_1 che così si ottiene soddisfino alle I e II. Supponiamo ora di aver definito i punti $P_{i_2}, \ldots, P_{i_{s-1}}$ e l'insieme di rette T_{s-1} e definiamo P_{i_s} e T_s nel modo seguente.

Il punto P_{i_s} si ottiene con il procedimento usato per ottenere l'analogo punto in *b*), salvo a sostituire in esso T con T_{s-1}.

L'insieme T_s è un insieme di rette preso in modo che:

i) $T_s \supseteq T_{s-1}$;

ii) E e T_s soddisfino alle I e II (quando si sostituisca in esse T con T_s).

iii) nessuna delle rette di T_s contiene due dei punti $P_{i_1}, P_{i_2}, \ldots, P_{i_s}$.

Poniamo $T = \bigcup_{s=1}^{\infty} T_s$. *Se $E \cup T$ non contiene nessun fascio di rette, l'insieme $\mathfrak{I}$ dei punti P_{i_l} $(l = 1, 2, \ldots)$ è ancora una 2-curva per la quale E è l'insieme delle rette esterne e T è quello delle rette tangenti.*

La dimostrazione di ciò è in quasi tutti i suoi punti analoga a quella data in b) (penultimo capoverso). Ci possiamo quindi limitare a provare che su ogni retta di T c'è esattamente un punto di $\mathfrak{J}$. Per questo supponiamo dapprima che ci sia una retta, t, di T contenente due punti, P_{i_a} e P_{i_b}, di $\mathfrak{J}$, con $i_a < i_b$, e indichiamo con m il minimo valore di s per cui è $t \in T_s$. Per il modo come si costruisce T_m segue che deve essere $m < b$. Ma allora l'ipotesi che P_{i_b} appartenga a t contrasta con il procedimento usato per definire P_{i_b}, in quanto l'insieme T_{b-1} contiene t, essendo $m \leqq \leqq b - 1$, e inoltre P_{i_a} appartiene già a t. Quindi nessuna retta di T può contenere due punti di $\mathfrak{J}$. Osserviamo poi che se la retta t appartiene a T_s, essa non può appartenere ad E, e quindi segue, come in b), che su t si trova almeno un punto di $\mathfrak{J}$. È così provato che t contiene esattamente un punto di $\mathfrak{J}$.

Esaminiamo rapidamente i risultati a cui porta, in alcuni casi particolari, il procedimento esposto.

Supponiamo dapprima che $E \cup T_0$ sia l'insieme vuoto e fissiamo due interi, k e m, con $k > 0$, $m > 1$. T_1 sia formato dalle k rette di indice minimo passanti per P_{i_1} e T_s si ottenga aggiungendo a T_{s-1} l'insieme delle k rette di indice minimo che passano per P_{i_s}, non contengono nessuno dei punti $P_{i_1}, \ldots, P_{i_{s-1}}$ e non passano per nessun punto nel quale si intersechino m rette di T_{s-1}. L'insieme $\mathfrak{J}$ è in tal caso una 2-curva priva di rette esterne, dotata di k tangenti in ogni suo punto e tale che per nessun punto che non appartenga alla 2-curva passano più di m tangenti di questa.

Facciamo ora l'ipotesi che $E \cup T_0$ sia l'insieme vuoto e indichiamo con $Q_1, Q_2, \ldots$ la successione dei punti di π ordinati secondo il valore crescente dei loro indici. Fissato un intero k maggiore di uno, T_1 sia l'insieme delle k rette di indice minimo passanti per Q_1. Supposto di aver definito T_{s-1}, se per Q_s passano k' ($\leqslant k$) rette di T_{s-1}, l'insieme T_s si ottiene aggiungendo a T_{s-1} le $k-k'$ rette di indice minimo che passano per Q_s, non passano per un punto nel quale si intersechino già k rette di T_{s-1} e sono distinte dalle congiungenti due dei punti $P_{i_1}, \ldots, P_{i_s}$. Il procedimento indicato sopra porta allora ad una 2-curva priva di rette esterne e tale che da ogni punto del piano escono esattamente k sue tangenti.

Consideriamo infine il caso seguente. $E \cup T_0$ è ancora l'insieme vuoto e $Q_1, Q_2, \ldots$ è la successione dei punti di π ordinati secondo il valore crescente dei loro indici. Sia P_{i_1} il punto di indice minimo di π fra quelli situati sulla retta di indice minimo [cfr. c, secondo capoverso] e indichiamo con v_1 la retta di indice minimo passante per Q_1 e con T_1 l'insieme costituito dalla retta per Q_1 che è diversa da v_1 ed ha indice minimo. Allora per Q_1 passa almeno una retta appartenente a T_1, e per quest'ultimo insieme valgono ovviamente le proprietà I e II [cfr. *b*)] a cui si riducono, in questo caso particolare, le *i*), *ii*), *iii*) [cfr. *c*)]. Mostriamo ora che si possono definire per ogni s un punto P_{i_s}, una retta v_s e un insieme di rette T_s, in modo che v_s passi per Q_s e sia distinta dalle rette di T_{s-1}, che l'insieme T_s soddisfi alle *i*), *ii*) e *iii*), che le rette di T_s siano distinte dalle rette $v_1, \ldots, v_s$ e che per ognuno dei punti $Q_1, \ldots, Q_s$ escano almeno s rette di T_s. Ciò è già stato fatto per $s = 1$ e pertanto, procedendo per induzione, supponiamo che ciò sia stato fatto per $s = 1, 2, \ldots, g - 1$ e dimostriamo che si può fare anche per $s = g$. Si trovi la retta r_{j_g} e in essa il punto P_{i_g} come nel procedimento indicato in *b*) [sostituendo in esso T con T_{g-1}: cfr. *c*), terzo capoverso]. Sia v_g la retta per Q_g che ha indice minimo e non appartiene a T_{g-1}. Si definisca ora per ogni $k = 1, \ldots, g$ un insieme di rette M_k nel modo seguente:

1) se per Q_k passano almeno g rette di T_{g-1}, M_k è l'insieme vuoto;

2) se per Q_k passa solo un numero $\lambda_k < g$ di rette di T_{g-1}, M_k è formato dalle $g - \lambda_k$ rette di indice minimo fra quelle che passano per Q_k, non appartengono a T_{g-1}, sono diverse da $v_1, \ldots, v_g$ e dalle congiungenti a due a due i punti $P_{i_1}, \ldots, P_{i_g}$.

Poniamo $T_g = T_{g-1} \cup M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_g$. Si verifica subito che il punto P_{i_g}, la retta v_g e l'insieme T_g così definiti soddisfano alle condizioni richieste sopra per P_{i_s}, v_s e T_s, ed è così provata l'esistenza di questi elementi per ogni s. Inoltre l'insieme $T = \bigcup_{s=1}^{\infty} T_s$ non contiene nessun fascio di rette poichè per ogni punto del piano passa una retta v_i che non può appartenere a nessun T_s e quindi nemmeno a T.

L'insieme dei punti $P_{i_l} (l = 1, 2, \ldots)$ è allora una 2-curva tale che da ogni punto del piano escono infinite rette ad essa tangenti.

3. Supponiamo ora che π sia un piano grafico infinito non numerabile, il che equivale a supporre che l'insieme dei punti di una sua retta abbia potenza maggiore del numerabile. Facendo uso del principio di induzione trasfinita si ottengono ancora delle 2-curve con una costruzione che estende quella indicata nel n. 2 in *a*).

Non c'è invece un modo immediato di estendere, almeno senza ulteriori restrizioni, costruzioni del tipo di quelle indicate nel n. 2, *b*), *c*). Resta così aperta, ad esempio, la questione di trovare in un piano infinito non numerabile delle 2-curve per le quali ogni retta è una secante.

BIBLIOGRAFIA

[1] Barlotti A.: *Sui* $(k; n)$*-archi di un piano lineare finito*. Bollettino U.M.I., 1956, 3, 11, 553-556.
[2] Enriques F. e Chisini O. : *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*. Vol. I, Zanichelli, Bologna, 1915.
[3] Hall M. Jr.: *Projective planes*. Trans. Amer. Math. Soc., 1943, 54, 229-277.
[4] Killgrove R.: *Conics in arbitrary planes* (per il momento non pubblicato).
[5] Segre B.: *Ovals in a finite projective plane*. Canad. J. Math., 1955, 7, 414-416.

Manoscritto pervenuto in redazione il 25 gennaio 1966.