

RENDICONTI  
*del*  
SEMINARIO MATEMATICO  
*della*  
UNIVERSITÀ DI PADOVA

G. CASADEI

G. TOSELLI

**Calcolo della distribuzione stazionaria della  
temperatura nell'interno di un reattore  
nucleare col metodo di Ritz**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,*  
tome 37 (1967), p. 341-355

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1967\\_\\_37\\_\\_341\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__37__341_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

CALCOLO DELLA DISTRIBUZIONE STAZIONARIA  
DELLA TEMPERATURA  
NELL'INTERNO DI UN REATTORE NUCLEARE  
COL METODO DI RITZ

di G. CASADEI - G. TOSELLI (*a Bologna* \*)

**Sommario.**

Viene descritto un metodo per determinare la distribuzione stazionaria della temperatura all'interno di un reattore nucleare attraversato da canali refrigeranti paralleli tra loro, nell'ipotesi che non ci sia conduzione nel combustibile nella direzione dei canali, per cui lo studio può essere limitato ad una sezione perpendicolare ai canali stessi.

Applicando il metodo variazionale di Ritz, la soluzione numerica dell'equazione di Poisson che regola la distribuzione stazionaria della temperatura viene calcolata mediante la combinazione lineare di polinomi di 6°, 7°, 8° grado. Mancando qualunque criterio di utilità pratica per determinare l'errore da cui è affetta la soluzione, l'attendibilità dei risultati numerici di questo problema è stata ottenuta mediante il confronto con risultati ottenuti per altra via.

**1. Introduzione.**

Lo studio della distribuzione stazionaria della temperatura nell'interno di un reattore nucleare attraversato da canali refrigeranti cilindrici paralleli tra loro, nell'ipotesi che non ci sia conduzione all'interno del combustibile nella direzione dei canali stessi, può essere limitato ad una sezione perpendicolare ai canali.

---

\*) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la matematica del C.N.R.

Indirizzo degli AA.: Centro di calcolo del CNEN, via Mazzini 2, Bologna.

Inoltre supponendo che i centri dei canali refrigeranti siano distribuiti sui vertici di poligoni regolari, per ragioni di simmetria, si può limitare lo studio solo a una parte della sezione.

Con riferimento alla figura 1 la determinazione della soluzione dell'equazione differenziale di Poisson che regola il fenomeno:

$$(1) \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = - \frac{Q}{K}$$

può essere limitata al dominio  $ABCD$  nel caso che i poligoni siano quadrati e al dominio  $EFGH$  nel caso che i poligoni siano esagoni.  $Q$  è la sorgente di calore per unità di superficie e  $K$  è la conducibilità termica del mezzo. Le condizioni al contorno da associare alla (1) sono le seguenti:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad \text{su } \mathcal{C}, \\ T = f \quad \text{su } \mathcal{C}_0, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{ove } \mathcal{C} \text{ è la spezzata formata dai seg-} \\ \text{menti } AB, BC \text{ e } CD \text{ o rispettivamente} \\ \text{dai segmenti } EF, FG \text{ e } HG. \\ \text{ove } \mathcal{C}_0 \text{ è l'arco } AD \text{ o rispettivamente} \\ \text{l'arco } EH. \end{array}$$

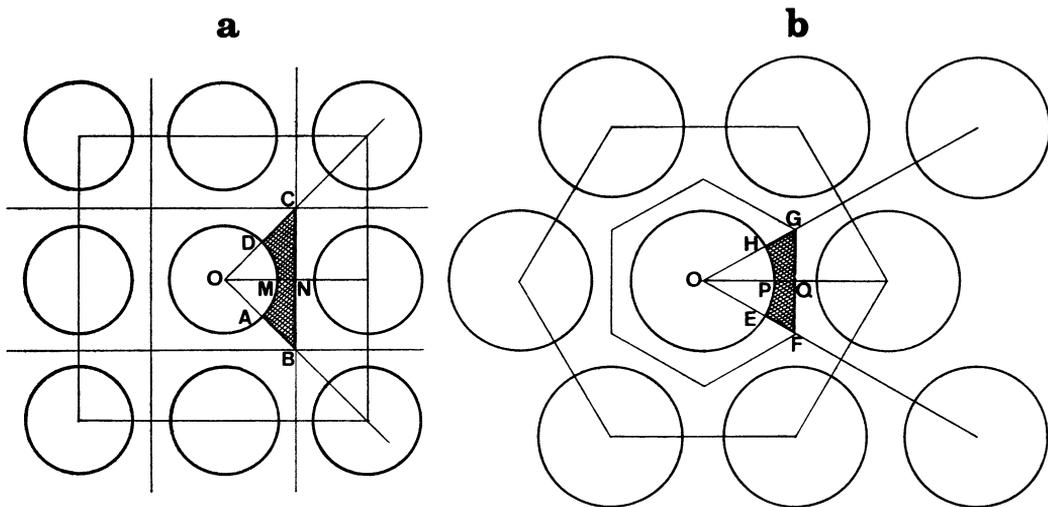


Fig. 1 - Sezione di un reattore in cui i centri dei canali refrigeranti sono distribuiti sui vertici di quadrati (a) e sui vertici di esagoni regolari (b).

Si può dimostrare che il problema di determinare la soluzione della (1) con le condizioni al contorno (2) è equivalente a quello di determinare

la funzione  $u(x, y)$ , minimizzante l'integrale:

$$(3) \quad I(u) = \iint_D \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \frac{Q}{K} u \right] dx dy$$

dove la  $u$  soddisfa le condizioni al contorno (2):

condizione necessaria e sufficiente per l'equivalenza dei due problemi è che non sia vuota la classe di funzioni  $u$  così definita:

$$(4) \quad \begin{cases} u & \text{continua, con le derivate parziali prime nel do-} \\ & \text{ominio } ABCD \text{ (o rispettivamente } EFGH) \\ u = f & \text{su } \mathcal{C}_0 \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{su } \mathcal{C} \\ I(u) & \text{finito} \end{cases}$$

Seguendo il metodo di Ritz, una soluzione approssimata del problema (3), equivalente al problema (1), è cercata nella forma:

$$(5) \quad u_n^*(x, y) = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x, y)$$

ove le  $\varphi_k$  sono dei polinomi in  $x$  e  $y$  che soddisfano le condizioni (4).

Prendendo come sistema di riferimento un sistema di coordinate cartesiane  $Oxy$ , ove  $O$  coincide col centro di un canale refrigerante, i segmenti  $BC$ ,  $AB$  e  $CD$  (o rispettivamente  $FG$ ,  $EF$  e  $GH$ ) appartengono alle rette di equazioni:

$$x = l, \quad y = \pm \mu x$$

ove  $\mu$  nel caso del reticolo quadrato è uguale a 1, nel caso del reticolo esagonale è uguale a  $\sqrt{3}/3$ .

Supponendo  $f$  costante, non si lede la generalità del problema ponendo  $f = 0$  e poichè l'arco  $AD$  (o rispettivamente  $EH$ ) appartiene al cerchio di equazione:

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

le  $\varphi_k(x, y)$  avranno la forma:

$$(6) \quad \varphi_k(x, y) = (x^2 + y^2 - r^2) P_k(x, y)$$

ove  $P_k$  sono polinomi da ricercarsi in modo che siano soddisfatte le con-

dizioni:

$$(7) \quad -\frac{\partial P_k}{\partial x} y + \frac{\partial P_k}{\partial y} x = 0 \quad \text{per } y = \pm \mu x$$

$$(x^2 + y^2 - r^2) \frac{\partial P_k}{\partial x} + 2xP_k = 0 \quad \text{per } x = l$$

Occorre tuttavia osservare che la soluzione del problema è una funzione simmetrica rispetto all'asse  $x$ ; ora le (7) non sono sufficienti, in generale, ad assicurare che i polinomi  $P_k(x, y)$  abbiano la stessa proprietà di simmetria. Convienne aggiungere esplicitamente la condizione:

$$(8) \quad P_k(x, y) = P_k(x, -y)$$

In tal modo le  $u^*$  definite dalla (5) soddisfano tutte le condizioni (4) e la classe delle  $u^*$  non è vuota se i  $P_k$  sono di grado non inferiore a quattro.

## 2. Determinazione delle funzioni di Ritz.

Posto

$$(9) \quad P(x, y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y +$$

$$a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 +$$

$$a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 +$$

$$a_{40}x^4 + a_{31}x^3y + a_{22}x^2y^2 + a_{13}xy^3 + a_{04}y^4 +$$

$$a_{50}x^5 + a_{41}x^4y + a_{32}x^3y^2 + a_{23}x^2y^3 + a_{14}xy^4 + a_{05}y^5 +$$

$$a_{60}x^6 + a_{51}x^5y + a_{42}x^4y^2 + a_{33}x^3y^3 + a_{24}x^2y^4 + a_{15}xy^5 + a_{06}y^6$$

i coefficienti  $a_{ij}$  vengono determinati in modo che la (9) soddisfi le condizioni (7) e (8).

La condizione di simmetria (8) impone che i coefficienti dei termini contenenti potenze dispari di  $y$  siano tutti nulli, ossia:

$$(10) \quad a_{01} = a_{11} = a_{21} = a_{31} = a_{41} = a_{51} = a_{03} = a_{13} = a_{23} = a_{33} =$$

$$= a_{05} = a_{15} = 0 .$$

Tenendo conto delle (10), la prima delle (7) dà luogo alle seguenti

sei equazioni:

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{10} = 0 \\ a_{02} = a_{20} \\ 2a_{12}\mu - a_{12}\mu^3 - 3a_{30}\mu = 0 \\ 2a_{22}\mu + 4a_{04}\mu^3 - 2a_{22}\mu^3 - 4a_{40}\mu = 0 \\ 2a_{32}\mu + 4a_{14}\mu^3 - a_{14}\mu^5 - 3a_{32}\mu^3 - 5a_{50}\mu = 0 \\ 2a_{42}\mu + 4a_{24}\mu^3 - 4a_{06}\mu^5 - 2a_{24}\mu^5 - 4a_{42}\mu^3 - 6a_{60}\mu = 0 . \end{array} \right.$$

La seconda delle (7), sempre tenendo conto delle (10), dà luogo alle seguenti quattro equazioni:

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} (l^2 - r^2)(a_{10} + 2la_{20} + 3l^2a_{30} + 4l^3a_{40} + 5l^4a_{50} + 6l^5a_{60}) + \\ + 2l(a_{00} + a_{10}l + a_{20}l^2 + a_{30}l^3 + a_{40}l^4 + a_{50}l^5 + a_{60}l^6) = 0 \\ (l^2 - r^2)(a_{12} + 2a_{22}l + 3a_{32}l^2 + 4a_{42}l^3) + 2l(a_{02} + a_{12}l + a_{22}l^2 + a_{32}l^3 + \\ + a_{42}l^4) + a_{10} + 2la_{20} + 3l^2a_{30} + 4l^3a_{40} + 5l^4a_{50} + 6l^5a_{60} = 0 \\ (l^2 - r^2)(a_{14} + 2a_{24}l) + 2l(a_{04} + a_{14}l + a_{24}l^2) + \\ + a_{12} + 2a_{22}l + 3a_{32}l^2 + 4a_{42}l^3 = 0 \\ 2la_{06} + a_{14} + 2la_{24} = 0 . \end{array} \right.$$

I sistemi (11) e (12) ci permettono di determinare i valori dei coefficienti non nulli del polinomio  $P(x, y)$ .

Per determinare tali valori bisogna distinguere i due casi:  $\mu = 1$  e  $\mu = \sqrt{3}/3$ .

Primo caso:  $\mu = 1$ .

I sistemi (11) e (12) forniscono le seguenti equazioni:

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{02} = a_{20} \\ a_{12} = 3a_{30} \\ a_{04} = a_{40} \\ a_{32} = 3a_{14} - 5a_{50} \\ a_{24} = a_{42} + 3(a_{60} - a_{06}) \\ (l^2 - r^2)(2a_{20} + 3la_{30} + 4l^2a_{40} + 5l^3a_{50} + 6l^4a_{60}) + \\ + 2(a_{00} + a_{20}l^2 + a_{30}l^3 + a_{40}l^4 + a_{50}l^5 + a_{60}l^6) = 0 \\ (l^2 - r^2)(a_{12} + 2a_{22}l + 3a_{32}l^2 + 4a_{42}l^3) + 2l(a_{02} + a_{12}l + a_{22}l^2 + \\ + a_{32}l^3 + a_{42}l^4) + l(2a_{20} + 3la_{30} + 4l^2a_{40} + 5l^3a_{50} + 6l^4a_{60}) = 0 \\ (l^2 - r^2)(a_{14} + 2la_{24}) + 2l(a_{04} + a_{14}l + a_{24}l^2) + a_{12} + 2a_{22}l + 3a_{32}l^2 + \\ + 4a_{42}l^3 = 0 \\ 2la_{06} + a_{14} + 2a_{24}l = 0 . \end{array} \right.$$

Considerando le prime cinque equazioni come definizioni delle variabili al primo membro in funzione di quelle al secondo, il sistema (13) si riduce ad un sistema composto dalle ultime quattro equazioni nelle dieci incognite:

$$a_{00}, a_{20}, a_{30}, a_{40}, a_{50}, a_{60}, a_{22}, a_{14}, a_{42}, a_{06}.$$

Questo sistema ammette  $\infty^6$  soluzioni dalle quali si ottengono i seguenti sei polinomi linearmente indipendenti:

$$14) \left\{ \begin{array}{l} P_1(x,y) = (6l^4 - 6l^2r^2 + r^4) + r^2(x^2 + y^2) - 2(x^4 + y^4 - x^2y^2) \\ P_2(x,y) = l^4 - 3l^2(x^2 + y^2) + 2l(x^3 + 3xy^2) - 3x^2y^2 \\ P_3(x,y) = 4l^5 - 10l^3(x^2 + y^2) + 5l^2(x^3 + 3xy^2) + (x^5 - 5x^3y^2) \\ P_4(x,y) = l(88l^6 - 144l^4r^2 + 90l^2r^4 - 15r^6) - 5l(14l^4 - 10l^2r^2 + 3r^4)(x^2 + y^2) - \\ - 4(2l^2 - r^2)(x^5 - 5x^3y^2) + 10l(2x^6 - 3x^2y^4 + 3y^6) \\ P_5(x,y) = l^4(3l^2 - 2r^2)(4l^2 - r^2) - l^2(4l^2 - r^2)(x^4 + y^4) + l^2(4l^2 + 7r^2)x^2y^2 - \\ - 2lr^2(xy^4 + 3x^3y^2) + r^2(x^4y^2 + y^4x^2) \\ P_6(x,y) = 3l^2(16l^4 - 6l^2r^2 + r^4) - 3l^2(26l^2 - r^2)(x^2 + y^2) + 40l^3(x^3 + 3xy^2) - \\ - 12l(3x^3y^2 + xy^4) + 2(x^6 + 3x^2y^4). \end{array} \right.$$

$$\text{Secondo caso: } \mu = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

In questo caso il sistema (13) si scrive:

$$15) \left\{ \begin{array}{l} a_{02} = a_{20} \\ 5a_{12} = 9a_{30} \\ a_{32} = 3a_{40} - a_{04} \\ 9a_{32} = 45a_{50} - 11a_{14} \\ 5a_{24} = 3a_{42} - 3a_{06} + 27a_{60} \\ (l^2 - r^2)(2a_{20} + 3la_{30} + 4l^2a_{40} + 5l^3a_{50} + 6l^4a_{60}) + \\ + 2(a_{00} + l^2a_{20} + l^3a_{30} + l^4a_{40} + l^5a_{50} + l^6a_{60}) = 0 \\ (l^2 - r^2)(a_{12} + 2la_{22} + 3l^2a_{32} + 4l^3a_{42}) + 2l(a_{20} + la_{12} + l^2a_{22} + \\ + l^3a_{32} + l^4a_{42}) + l(2a_{20} + 3la_{30} + 4l^2a_{40} + 5l^3a_{50} + 6l^4a_{60}) = 0 \\ (l^2 - r^2)(a_{14} + 2la_{24}) + 2l(a_{04} + la_{14} + l^2a_{24}) + a_{12} + 2la_{22} + \\ + 3l^2a_{32} + 4l^3a_{42} = 0 \\ a_{14} + 2la_{06} + 2la_{24} = 0 \end{array} \right.$$

e procedendo in modo analogo al caso  $\mu = 1$  si ottengono i seguenti sei polinomi:

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_1(x, y) = (2l^2 - r^2)^2 - (2l^2 - r^2)(x^2 + y^2) + 2(x^2y^2 - y^4) \\ P_2(x, y) = 2l^4 - 9l^2(x^2 + y^2) + 2l(5x^3 + 9xy^2) - 3(x^4 + 3x^2y^2) \\ P_3(x, y) = -8l^5 + 30l^3(x^2 + y^2) - 5l^2(5x^3 + 9xy^2) + 3(x^5 + 5x^3y^2) \\ P_4(x, y) = l^2(176l^4 - 180l^2r^2 + 45r^4) - 5l^2(16l^2 - 9r^2)(x^2 + y^2) - \\ - 4l(2x^5 - 35x^3y^2 + 45xy^4) + 10(x^6 - 6x^4y^2 + 9x^2y^4) \\ P_5(x, y) = -l^2(112l^4 - 116l^2r^2 + 27r^4) + 3l^2(18l^2 - 13r^2)(x^2 + y^2) + \\ + 2(2l^3 + 3r^2) + (x^4 + 3y^4) - 4l(11x^3y^2 - 9xy^4) - 2(x^6 + 9y^6) \\ P_6(x, y) = -\frac{1}{2}l^2(40l^4 - 36l^2r^2 + 9r^4) + \frac{1}{2}l^2(30l^2 - 9r^2) \cdot (x^2 + y^2) - \\ - l^3(5x^3 + 9xy^2) + 3l^3(x^4 + 3y^4) - 3l(x^5 + 5x^3y^2) + x^6 + 9x^4y^2. \end{array} \right.$$

Se il polinomio (9) fosse di quinto grado si troverebbero nelle (14) e (16) i primi tre polinomi, se fosse di quarto grado solo i primi due.

Per mezzo di tali polinomi tenendo conto della (6) si possono quindi definire le tre classi di funzioni:

$$(17) \quad \begin{aligned} u_2^*(x, y) &= \sum_{k=1}^2 a_k \varphi_k(x, y) \\ u_3^*(x, y) &= \sum_{k=1}^3 a_k \varphi_k(x, y) \\ u_6^*(x, y) &= \sum_{k=1}^6 a_k \varphi_k(x, y) \end{aligned}$$

nelle quali ricercare la soluzione del problema (3).

### 3. Determinazione della soluzione approssimata del problema.

Una soluzione approssimata del problema (3), equivalente al problema (1), all'interno di ciascuna delle classi definite della (17), si trova imponendo:

$$(18) \quad \frac{\partial I(u_n^*)}{\partial a_k} = 2 \iint_D \left[ \frac{\partial u_n^*}{\partial x} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} + \frac{\partial u_n^*}{\partial y} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} - \frac{Q}{K} \varphi_k \right] dx dy = 0$$

con  $k = 1, \dots, n$  per  $n = 2, 3, 6$ .

Posto

$$(19) \quad \alpha_{s,k} = \iint_D \left( \frac{\partial \varphi_s}{\partial x} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_s}{\partial y} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} \right) dx dy \quad \text{e}$$

$$\beta_k = \iint_D \left( -\frac{Q}{K} \right) \varphi_k dx dy$$

la (18), per mezzo della quale si determinano i coefficienti delle combinazioni lineari (17) tali per cui si abbia un minimo di  $I(u_n^*)$ , è equivalente al sistema lineare:

$$(20) \quad \sum_{s=1}^n \alpha_{s,k} a_s + \beta_k = 0 \quad \text{per } k = 1, \dots, n$$

Gli andamenti della temperatura ottenuti per  $n = 6$  nei tratti di contorno  $MNCD$  nel caso  $\mu = 1$  e  $PQGH$  nel caso  $\mu = \sqrt{3}/3$  sono riportati rispettivamente nelle figure 2 e 3.

In ciascuna delle due figure le curve contrassegnate coi numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 sono state ottenute nell'ordine per i seguenti valori di  $l/r$ :

$$1.0, \quad 1.1, \quad 1.2, \quad 1.4, \quad 1.6, \quad 1.8, \quad 2.0.$$

In ogni calcolo si è inoltre posto:

$$\frac{Q}{K} = 1.$$

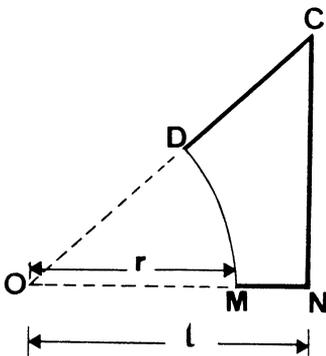
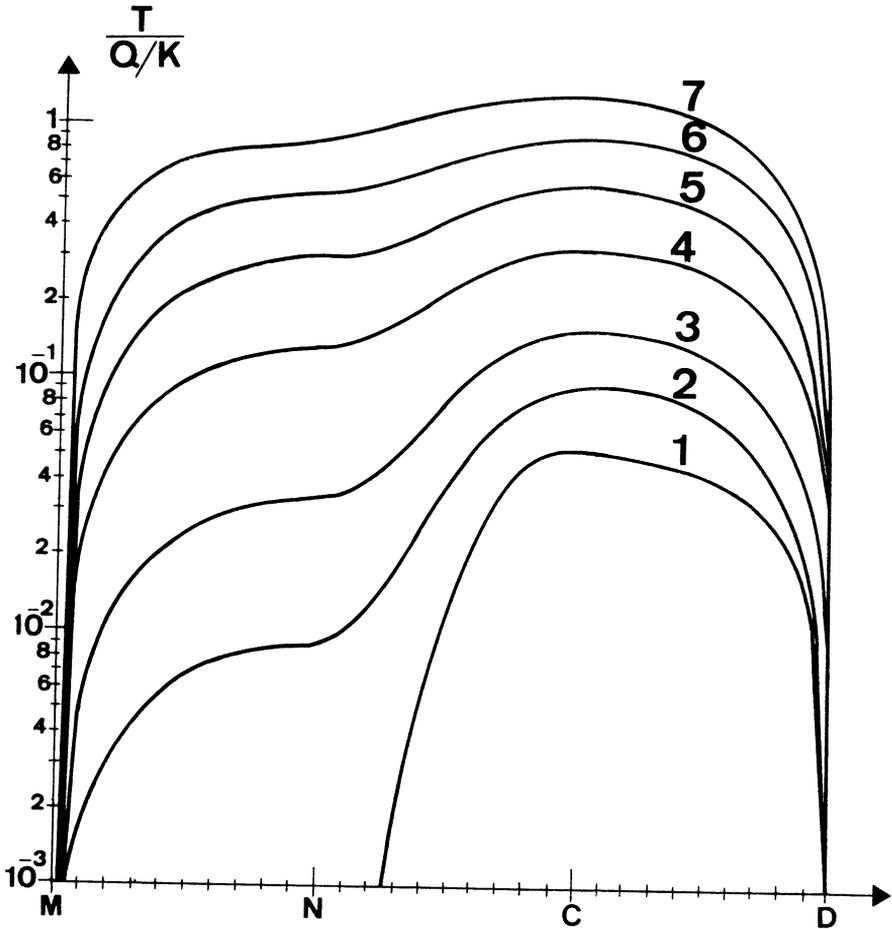


Fig. 2 - Distribuzione della temperatura lungo il contorno  $MNCD$  con riferimento alla Fig. 1, a.



Infine nelle quattro tabelle I, II, III, IV sono riportati alcuni risultati numerici ottenuti col metodo di Ritz e coi metodi descritti in [7] e [1].

Nelle tabelle I e II i valori numerici sono relativi a punti equidistanti del tratto di contorno  $NC$  della figura 2, mentre nelle tabelle III e IV a punti equidistanti del tratto di contorno  $QG$  della figura 3.

I valori delle tabelle I e III sono stati ottenuti con  $l/r = 2$  e quelli delle tabelle II e IV con  $l/r = 1.2$ .

Tab. I - Valori della temperatura lungo il tratto di contorno  $NC$ . Si può confrontare con la curva 7 della figura 2.

$\mu = 1$ $e/z = 2$	Ritz: $n=2$	Ritz: $n=3$	Ritz: $n=6$	Sparrow [7]	Biasini [1]
$T_H$	0.62080	0.62266	0.84416	0.88506	0.88069
	0.63407	0.63597	0.85711	0.89231	0.89260
	0.67409	0.67611	0.89507	0.91387	0.92688
	0.74136	0.74358	0.95517	0.94908	0.97939
	0.83595	0.83845	1.0319	0.99674	1.0441
	0.95650	0.95936	1.1165	1.0549	1.1138
	1.0987	1.1020	1.1969	1.1205	1.1816
	1.2535	1.2572	1.2590	1.1891	1.2412
	1.4045	1.4087	1.2910	1.2536	1.2875
	1.5255	1.5301	1.2908	1.3038	1.3168
$T_C$	1.5773	1.5820	1.2796	1.3248	1.3268

Tab. II - Valori della temperatura lungo il tratto di contorno  $NC$ . Si può confrontare con la curva 3 della figura 2.

$\mu = 1$ $e/\tau = 1.2$	Ritz: $n=2$	Ritz: $n=3$	Ritz: $n=6$	Sparrow [7]	Biasini [1]
$T_N$	0.02572	0.02580	0.03399	0.026448	0.026449
	0.02726	0.02735	0.03586	0.02793	0.02881
	0.03210	0.03219	0.04159	0.03254	0.03612
	0.04076	0.04088	0.05151	0.04067	0.04866
	0.05393	0.05409	0.06579	0.05272	0.06605
	0.07217	0.07239	0.08405	0.06886	0.08680
	0.09546	0.09574	0.10499	0.08866	0.10858
	0.12268	0.12304	0.12613	0.11079	0.12874
	0.1509	0.15139	0.14408	0.13274	0.14493
	0.17483	0.17536	0.15543	0.15043	0.15537
$T_C$	0.18548	0.18603	0.15878	0.15786	0.15897

Tab. III - Valori della temperatura lungo il tratto di contorno  $QG$ . Si può confrontare con la curva 7 della figura 3.

$\mu = \sqrt{3}/3$ $e/r = e$	Ritz: $n=2$	Ritz: $n=3$	Ritz: $n=6$	Sparrow [7]	Biasini [1]
$T_Q$	0.69481	0.69834	0.74385	0.74467	0.74353
	0.69833	0.70187	0.74609	0.74638	—
	0.70877	0.71236	0.75265	0.75144	0.75144
	0.72574	0.72942	0.76299	0.75963	—
	0.74855	0.75235	0.77623	0.77056	0.77335
	0.77609	0.78004	0.79119	0.78367	—
	0.80672	0.81081	0.80638	0.79814	0.80221
	0.83805	0.84231	0.82015	0.81288	—
	0.86682	0.87122	0.83092	0.82639	0.82808
	0.88857	0.89308	0.83745	0.83662	—
$T_G$	0.89741	0.90197	0.83945	0.84081	0.83939

Tab. IV - Valori della temperatura lungo il tratto di contorno  $QG$ . Si può confrontare con la curva 3 della figura 3.

$\mu = \sqrt{3}/3$ $e/\pi = 12$	Ritz: $n=2$	Ritz: $n=3$	Ritz: $n=6$	Sparrow [7]	Bissini [1]
$T_Q$	0.02618	0.02617	0.02615	0.02484	0.02492
	0.02661	0.02661	0.02659	0.02531	0.02552
	0.02793	0.02792	0.02790	0.02672	0.02728
	0.03012	0.03011	0.03009	0.02906	0.02914
	0.03316	0.03315	0.03313	0.03228	0.03391
	0.03699	0.03698	0.03695	0.03630	0.03836
	0.04144	0.04143	0.04139	0.04090	0.04294
	0.04622	0.04621	0.04616	0.04576	0.04771
	0.05082	0.05081	0.05075	0.05034	0.05182
	0.05446	0.05445	0.05439	0.05391	0.05469
$T_G$	0.0560	0.05599	0.05592	0.05540	0.05579

## BIBLIOGRAFIA

- [1] BIASINI L., CASADEI G. e RICHARD U.: *Sviluppo e messa a punto di alcuni metodi di matematica applicata*, Convegno indetto dalla Società lombarda di Fisica, Milano-Pavia 28 Nov. - 1° Dic. 1963; dal volume: « Fisica del Reattore » stampato dal C.N.R. nel Giugno 1965.
- [2] BERSELLI J., BIASINI L., CASADEI G. e RICHARD U.: *Distribuzione stazionaria della temperatura in un reattore nucleare attraversato da canali di refrigerazione*, Atti del Convegno su le equazioni alle derivate parziali, Nervi 25-27 Febbraio 1965.
- [3] COLLATZ L.: *The numerical treatment of differential equations*, Springer, 1960.
- [4] COURANT R., HILBERT D.: *Methods of mathematical physics*, « Interscience publishers », 1962, Vol. II.
- [5] KANTOROVICH L. V., KRYLOV V. L.: *Approximate methods of higher analysis*, P. Noordhoff, 1958.
- [6] RICHARDS P. B.: *The temperature distribution in a nuclear reactor pierced by circular cooling channels*, « Nuclear Engineering »: C.E.P. Symposium series/127.
- [7] SPARROW E. M.: *Temperature distribution and heat transfer results for an internally cooled heat generating solid*, « Journal of heat transfer », November 1960/389.
- [8] TONELLI L.: *Serie trigonometriche*, Zanichelli, Bologna, 1928.

Gli autori ringraziano il Prof. U. RICHARD e il Dr. L. Biasini per il contributo dato al presente lavoro.

Manoscritto pervenuto in redazione il 3 ottobre 1966.