

RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GABRIELE DARBO

**Sulla rappresentazione parametrica della soluzione
generale di un sistema di equazioni lineari in un
modulo sopra un anello principale**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 37 (1967), p. 307-311

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__37__307_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

dove $\Phi: X^p \rightarrow X^q$ è un omomorfismo di A -moduli, e $x \in X^r$. Si può, mediante gli isomorfismi canonici $A^p \otimes_A X = X^p$, $A^q \otimes_A X = X^q$, identificare Φ con l'omomorfismo

$$L \otimes_A X: A^p \otimes_A X \rightarrow A^q \otimes_A X$$

L'insieme delle soluzioni di (1) sarà dato pertanto dal nucleo dell'omomorfismo $L \otimes_A X$.

Consideriamo la sequenza esatta

$$(2) \quad 0 \rightarrow \text{Ker } L \rightarrow A^p \rightarrow A^q \rightarrow \text{Coker } L \rightarrow 0$$

$\text{Ker } L$ essendo libero in quanto sottomodulo di un modulo libero (A è principale!), avremo che la (2) è una risoluzione libera di $\text{Coker } L$.

Tensorializzando la (2) con X otterremo il complesso

$$(3) \quad 0 \rightarrow (\text{Ker } L) \otimes X \rightarrow X^p \xrightarrow{\Phi} X^q \rightarrow \text{Coker } L \otimes X \rightarrow 0$$

In genere l'esattezza della (3) può venir meno in X^p .

Calcolando il quoziente d'omologia si ha come è noto la sequenza esatta ¹⁾:

$$(4) \quad 0 \rightarrow (\text{Ker } L) \otimes X \rightarrow \text{Ker } \Phi \rightarrow \text{Tor}^A(\text{Coker } L, X) \rightarrow 0.$$

Se $\text{Tor}^A(\text{Coker } L, X) = 0$ si ottiene:

$$(\text{Ker } L) \otimes X = \text{Ker } \Phi$$

Poichè $\text{Ker } L \subset A_p$, risulta essere $\text{Ker } L$ isomorfo a A^k dove $k = p - \text{rang } L$ ($\text{rang } L$ è la caratteristica della matrice L). Esiste dunque un morfismo iniettivo

$$\theta: A^k \rightarrow A^p$$

tale che il morfismo, pure iniettivo ²⁾

$$\theta \otimes X: A^k \otimes X \rightarrow A^p \otimes X$$

¹⁾ Questa sequenza è spezzante se X è divisibile come A -modulo, tale essendo allora $(\text{Ker } L) \otimes X$.

²⁾ La sequenza $0 \rightarrow A^k \xrightarrow{\theta} A^p \xrightarrow{\tau} A^q$ è esatta e $\theta(A^k)$ è componente diretta in A^p .

M è libero la cosa è ovvia essendo $\text{Tor}^4(M, X) = 0$; altrimenti M ammette una risoluzione del tipo

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\sigma} A \rightarrow M \rightarrow 0$$

con $\sigma \in A$ e $\sigma \neq 0$. Tensorializzando con X si ricava la sequenza esatta (a meno di identificazioni canoniche)

$$0 \rightarrow \text{Tor}^4(M, X) \rightarrow X \xrightarrow{\sigma} X \rightarrow M \otimes X \rightarrow 0$$

e quindi $\text{Tor}^4(M, X) = \text{Ker } \sigma$ che ha dimensione finita per ipotesi.

4. - Con il criterio dato al n. 3 risulta immediata l'applicazione dei risultati ottenuti precedentemente al caso dei sistemi di equazioni differenziali lineari con coefficienti costanti. Mettiamoci, tanto per fare un esempio, nel campo reale e consideriamo lo spazio X delle funzioni C^∞ sulla retta: Questo spazio si consideri come A -modulo, A essendo l'anello degli operatori differenziali (lineari a coefficienti costanti); A in questo caso coincide con l'anello $R[D]$ dei polinomi nel simbolo di derivazione D ed è perciò principale. Esso è altresì una R -algebra ed ogni suo elemento non nullo opera come endomorfismo su X avente nucleo di dimensione finita, uguale al grado del polinomio in D (o, se si preferisce, all'ordine dell'operatore). Si può dunque esprimere la soluzione generale del sistema mediante la rappresentazione (6) in cui le $\theta_{j,i}$ sono operatori differenziali e le V_r sono certe funzioni C^∞ che appartengono al sottomodulo di torsione di X ; cioè quelle funzioni che sono somme di prodotti di polinomiali, esponenziali, e sinusoidali, che soddisfano insomma a qualche equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti. La soluzione generale viene descritta dunque al variare di k funzioni arbitrarie u_1, \dots, u_k e di h costanti arbitrarie c_1, \dots, c_h . Notiamo ancora che in questo caso X è un A -modulo divisibile e perciò le righe di (5) sono « spezzanti » anche nella categoria dei A -moduli. Si può assumere, quindi, che il morfismo μ considerato al n. 2 sia A -compatibile e da ciò seguono facilmente ulteriori informazioni sulla rappresentazione (6).