Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

P. Boero

Metodi omologici elementari nella teoria dei sistemi di equazioni, I

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 37 (1967), p. 289-306

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__37__289_0>

METODI OMOLOGICI ELEMENTARI NELLA TEORIA DEI SISTEMI DI EQUAZIONI, I

di P. Boero (*a Genova*) *)

Il presente lavoro costituisce la prima parte dell'esposizione dei risultati ottenuti nella ricerca di metodi algebrici soddisfacenti per affrontare i problemi di rappresentazione delle soluzioni di sistemi omogenei di equazioni di convoluzione (e quindi, in particolare, di equazioni differenziali lineari, o alle differenze finite, o di tipo misto, ecc.).

Punto di partenza di queste ricerche sono stati i risultati di rappresentazione ottenuti da G. Darbo ([2]) per sistemi di equazioni differenziali lineari: l'ipotesi di principalità, soddisfatta nel caso dell'anello degli operatori differenziali lineari, è stata attenuata, e si è potuto estendere la caratterizzazione degli anelli di operatori che danno luogo a sistemi « di ordine globale finito ».

Nel presente lavoro, si affronta l'analisi delle condizioni algebriche sotto le quali continuano a valere risultati di rappresentazione del tipo di quelli della nota sopracitata, con riferimento preciso agli sviluppi che una tale estensione rende possibili.

Nella I parte, sono così analizzate in modo sistematico — in relazione alle applicazioni alla teoria dei sistemi — le proprietà di alcune classi di domini di integrità (come domini di Prufer e domini di Bezout); quindi si danno dei teoremi di rappresentazione validi per tali domini di operatori.

Nella II parte, vengono estese all'analisi dei sottoanelli dell'anello delle funzioni olomorfe sul piano alcune tecniche classicamente adottate per l'analisi della struttura algebrica di tale anello, e viene messo in luce

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la matematica del C.N.R.
Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico dell'Università, Via L. B. Alberti, Genova.

il legame tra varie condizioni di tipo algebrico e topologico sui sottoanelli (quali la condizione di essere domini di Bezout, il fatto che gli ideali principali sono chiusi e viceversa, ecc.).

Viene infine affrontato, con l'ausilio di tali risultati preliminari, lo studio dei sottoanelli di $\mathfrak{H}(C)$ costituiti dalle funzioni di ordine al più eguale a μ ($\mu \geqslant 0$), e dell'anello delle funzioni intere di tipo esponenziale, che sarà l'ambiente naturale per gli sviluppi successivi: infatti, via trasformata di Laplace, lo studio della struttura algebrica di molte algebre di convoluzione è ridotto allo studio di sottoanelli dell'anello delle funzioni intere di tipo esponenziale.

PARTE I – *Considerazioni algebriche*

1. Sia D un dominio di integrità, cioè un anello commutativo con identità privo di divisori dello 0.

TEOREMA 1: *sono equivalenti le seguenti condizioni su* D:

(P_1): *gli ideali di* D *di tipo finito sono principali*

(P_2): *ogni sotto-*D*-modulo di tipo finito di* D *è libero*

(P_3): *ogni sotto-*D*-modulo di tipo finito di* D^p *è libero*

(P_4): *ogni* D*-omomorfismo*

$$L : D^p \longrightarrow D$$

ha immagine libera

(P_5): *ogni* D*-omomorfismo*:

$$L : D^p \longrightarrow D^q$$

ha immagine libera

(P_6): *ogni* D*-omomorfismo*

$$L : D^p \longrightarrow D$$

ha immagine proiettiva e nucleo libero

(P_7): *ogni* D*-omomorfismo*

$$L : D^p \longrightarrow D^q$$

ha immagine proiettiva e nucleo libero (p, q *interi positivi*).

L'equivalenza tra (P_2) e (P_1) segue subito dal fatto che un sotto-D-modulo di D può essere identificato con un ideale di D, e viceversa. Le implicazioni: $(P_3) \Rightarrow (P_2) <$; $(P_5) \Rightarrow (P_4)$; $(P_7) \Rightarrow (P_6)$ sono ovvie. L'equivalenza tra (P_3), (P_5), (P_7) è facilmente dimostrata: basta osservare che, se vale (P_5), allora, dato un D-modulo M di tipo finito (diciamo s) che sia sotto-D-modulo di D^q, il diagramma:

$$D^s \longrightarrow M \longrightarrow D^q$$

fornisce una rappresentazione di M come immagine del D-omomorfismo di D^s in D^q ottenuto componendo l'epimorfismo canonico di D^s su M con il monomorfismo di inclusione di M in D^q; inoltre, da (P_7) segue (P_5), in base al diagramma:

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} L \longrightarrow D^p \longrightarrow \operatorname{Im} L \longrightarrow D^q$$

che fornisce una rappresentazione di Ker L come D-modulo libero isomorfo a D^r $(r \leqslant p)$, e quindi di Im L come nucleo di un D-omomorfismo di D^p su D^r; infine, da (P_3) segue subito (P_7).

Per concludere la dimostrazione del teorema, basta allora provare che da (P_1) segue (P_3). Per questo si può procedere per induzione: se N è sottomodulo di D^p, ed è finitamente generato, allora, intersecandolo con D^{p-1} e con D ed utilizzando l'« identità modulare » e l'ipotesi induttiva, è possibile rappresentarlo come somma diretta di D-moduli liberi, e quindi come D-modulo libero.

Corollario 1 *a*): *sia D un dominio di integrità soddisfacente ad una delle condizioni del teorema* 1. *Allora, ogni D-modulo proiettivo di tipo finito è libero.*

Infatti, se M è un D-modulo di tipo finito, diciamo s, si può costruire un epimorfismo:

$$D^s \longrightarrow M .$$

Se M è supposto proiettivo, M si può allora rappresentare come sotto-modulo di D^s, e di qui il corollario.

2. I domini soddisfacenti a (P_2) sono noti come domini di Bezout (Bourbaki, [1], pag. 85). Il teorema 1 fornisce quindi un certo numero di condizioni necessarie e sufficienti affinchè un dominio di integrità sia di Bezout: di tali condizioni avremo bisogno per le nostre applicazioni.

I domini di Bezout, pur rappresentando una generalizzazione dei domini principali che si presenta molto utile e spontanea quando ci si limiti a considerare problemi « di tipo finito » (ad esempio sistemi di un numero finito di equazioni in un numero finito di incognite), sono caratterizzati da condizioni eccessivamente restrittive; una ulteriore generalizzazione è rappresentata, come è noto, dai domini « di Prüfer ». Essi possono essere caratterizzati tra le altre da una delle due seguenti condizioni (D essendo un dominio di integrità):

(P_8): *ogni D-modulo di tipo finito e privo di torsione è proiettivo*;

(P_9): *se B è un sottoanello del campo quoziente* $\widetilde{D}$ *di D, e B contiene D, allora B è integralmente chiuso (in* $\widetilde{D}$*).*

Confrontando con il teorema 1, si hanno allora subito i seguenti corollari:

COROLLARIO 1 *b*): *sia D un dominio di Prufer per il quale ogni D-omomorfismo*:

$$L : D^p \longrightarrow D^q$$

ha nucleo libero. Allora D è un dominio di Bezout.

COROLLARIO 1 *c*): *sia D un dominio di integrità. D è un dominio di Bezout se e solo se è soddisfatta la seguente condizione*:

(P_{10}): *ogni D-modulo di tipo finito e privo di torsione è libero.*

La dimostrazione di quest'ultimo corollario è semplice: la condizione (P_{10}) implica ovviamente (P_4). Viceversa, se D è un dominio di Bezout, è anche dominio di Prüfer, ed inoltre vale il corollario 1 *a*).

Sia D un dominio di Bezout, D' un sottoanello di D; sia inoltre I' un ideale di D', di tipo finito, e $\{x_2, \ldots, x_n\} = G$ un sistema di generatori. Consideriamo l'ideale I generato da G in D: I è principale, ma, in genere, I' non è principale e $I \cap D' \subset I'$ propriamente. Sussiste però il seguente

TEOREMA 2: *supponiamo che, per ogni* $d \in D'$, $d \neq 0$, *e per ogni* $t \in \in D - D'$, *si abbia* $dt \in D - D'$. *Allora condizione necessaria e sufficiente affinchè* I' *sia principale è che un generatore di* I *sia elemento di* I'.

La dimostrazione può essere condotta osservando anzitutto che $I' \subset \subset I \cap D'$. D'altra parte, indicato con α un generatore di I appartenente ad I', in base alle ipotesi fatte risulta che $I \cap D' = \alpha D'$ e che $\alpha D' \subset I'$, e di qui il risultato voluto.

Conviene mettere in evidenza la condizione di validità del teorema 2, che acquisterà notevole importanza nello studio dei sottoanelli dell'anello delle funzioni intere; sia D dominio di integrità, D' sottoanello di D; *diremo che* D' *soddisfa alla condizione* (Z_0) *in* D *se, per ogni* $d \in D'$, $d \neq 0$, *e per ogni* $t \in D - D'$, *si ha*: $dt \in D - D'$.

Il teorema 2 può essere immediatamente esteso ai domini di Prüfer:

TEOREMA 3: *sia D un dominio di Prüfer e D' sottoanello di D. D' è dominio di Prüfer se soddisfa alla condizione* (Z_0) *in D, e se ogni sopranello di D' in* $\widetilde{D}'$ *è del tipo* D'_T ($T \subset D'$, T *sistema moltiplicativo*).

Basta provare che D' soddisfa alla condizione (P_9). Per questo supponiamo che B sia un sottoanello di $\widetilde{D}'$ contenente D', e che $y \in \widetilde{D}' - B$ sia radice di un polinomio a coefficienti in B, con coefficiente del monomio di grado massimo uguale all'identità moltiplicativa di B. Risulta che B e D sono sottoanelli di $\widetilde{D}$, e $B \cup D$ è un sottoanello di $\widetilde{D}$ contenente D, quindi integralmente chiuso per ipotesi. Allora $y \in B \cup D$: ma da ciò, posto $y = y'/y''$, con $y', y'' \in D'$ seguirebbe, se $y \notin B = D'_T$, una uguaglianza del tipo $y'q = y''d$, con $q \in D'$, $d \in D - D'$, assurda per ipotesi.

3. Per concludere questa rassegna di fatti algebrici ed omologici elementari relativi a certe classi di domini di integrità (domini di Bezout e domini di Prüfer), è opportuno — per le applicazioni che seguiranno — mettere in luce due proprietà essenziali per la rappresentazione delle soluzioni di sistemi di equazioni:

sia D un dominio di integrità. Consideriamo un D-omomorfismo:

$$L : D^p \longrightarrow D^q \qquad (p;\ q \text{ interi positivi})$$

se D è un dominio di Prüfer, vale:

(P_{11}): Ker L *è di tipo finito, e proiettivo*

se D è dominio di Bezout, vale:

(P_{12}): Ker L *è libero* (*di tipo finito*).

Tutto ciò segue in modo ovvio dalle proprietà precedentemente stabilite, considerando la sequenza esatta:

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} L \longrightarrow D^p \longrightarrow \operatorname{Im} L \longrightarrow 0 .$$

Avremo bisogno in seguito di considerare domini di integrità soddisfacenti alle sole condizioni (P_{11}) o (P_{12}); per ora conviene osservare che, relativamente ai D-omomorfismi:

$$L : D^p \longrightarrow D^q$$

le condizioni $(P_4) \dots (P_7)$, (P_{11}), (P_{12}) non dipendono dalla dimensione q di D^q (se sono verificate per ogni L e per $q = 1$, sono verificate per ogni L e per ogni q intero positivo), mentre dipendono in modo essenziale dalla dimensione di D^p (ad esempio, per $p = 1$ e per ogni L sono vere in ogni dominio di integrità D).

4. Sia D un dominio di integrità (ad esempio, un'algebra di convoluzione), ed X un D-modulo. Consideriamo un D-omomorfismo:

$$L : D^p \longrightarrow D^q \qquad (p,\ q \text{ interi positivi})$$

esso si può rappresentare con una matrice

$$\begin{pmatrix} d_{11} & \dots & d_{1p} \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot \\ d_{q1} & \dots & d_{qp} \end{pmatrix}$$

con elementi in D; l'omomorfismo indotto:

$$\Gamma : D^p \otimes_D X \longrightarrow D^q \otimes_D X$$

ha, in genere, nucleo non nullo. Il nucleo si può pensare come insieme delle soluzioni del sistema di q equazioni in p incognite:

$$\begin{cases} d_{11}x_1 + \dots + d_{1p}x_p = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ d_{1q}x_1 + \dots + d_{qp}x_p = 0 \end{cases}$$

Teorema 4: *sia D un dominio di integrità soddisfacente alla condizione* (P_{11}). *Allora, all'omomorfismo Γ si può associare una sequenza esatta*:

$$\text{(I)} \quad 0 \longrightarrow (\operatorname{Ker} L) \otimes_D X \longrightarrow \operatorname{Ker} \Gamma \longrightarrow \operatorname{Tor}^D(\operatorname{Coker} L, X) \longrightarrow 0 \, .$$

Consideriamo infatti la sequenza esatta:

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} L \longrightarrow D^p \longrightarrow D^q \longrightarrow \operatorname{Coker} L \longrightarrow 0$$

essendo $\operatorname{Ker} L$ proiettivo per ipotesi, si tratta di una risoluzione proiettiva di $\operatorname{Coker} L$. Tensorializzando con X, si ottiene immediatamente la sequenza esatta (I) (osservare che *Coker* L può avere dimensione omologica 0, 1, 2; nel caso che D sia dominio di Prüfer, la dimensione omologica è al più 1).

La sequenza (I) si può considerare la base di tutte le considerazioni successive, sia di carattere algebrico che di carattere topologico, relative al problema della rappresentazione « parametrica » delle soluzioni di sistemi di equazioni; ed il Teorema 4 può ritenersi il più generale « teorema di rappresentazione ».

Supponiamo anzitutto che $\operatorname{Tor}^D(\operatorname{Coker} L, X) = 0$; in tale caso, se il dominio D soddisfa alla condizione (P_{12})-in particolare, se è un dominio di Bezout-$\operatorname{Ker} L$ è isomorfo a D^k $(k \leqslant p)$, e ciò consente di rappresentare le soluzioni del sistema mediante k parametri arbitrari di X. Precisamente, supponiamo che

$$\pi : D^k \longrightarrow D^p$$

sia monomorfismo di immersione del nucleo in D^v. A π è associata una matrice:

$$\begin{pmatrix} \pi_{11} \cdots \pi_{1k} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \pi_{v1} \cdots \pi_{vk} \end{pmatrix}$$

consideriamo allora k elementi arbitrari di X: siano essi

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_k$$

il « vettore »

$$x_1 = \pi_{11}u_1 + \ldots + \pi_{1k}u_k$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_v = \pi_{v1}u_1 + \ldots + \pi_{vk}u_k$$

rappresenta una soluzione del sistema, e tutte le soluzioni del sistema possono così rappresentarsi *in modo unico*: *fissati gli elementi* π_{ij}, *ogni soluzione è rappresentata mediante un solo sistema di parametri.*

Il caso: $\mathrm{Tor}^D(\mathrm{Coker}\, L, X) = 0$ è molto importante per le applicazioni alla teoria dei dispositivi, come avremo modo di analizzare in seguito; condizione sufficiente perchè esso si verifichi è che $\mathrm{Coker}\, L$ sia piatto (in particolare, proiettivo o libero). È opportuno ricordare che, se D è dominio di Prüfer, $\mathrm{Coker}\, L$ è piatto se e solo è proiettivo; in particolare, se D è dominio di Bezout, $\mathrm{Coker}\, L$ è piatto se e solo se è libero (infatti, $\mathrm{Coker}\, L$ è finitamente generato).

5. Se $\mathrm{Tor}^D(\mathrm{Coker}\, L, X) \neq 0$, l'analisi della struttura di $\mathrm{Ker}\, \Gamma$ non si presenta facile, a meno che — come accade in tutti i casi di interesse applicativo che avremo modo di considerare in seguito — l'anello D non sia dotato di una struttura di K-algebra (K essendo un dominio di integrità). Il caso banale in cui $K = D$ non consente evidentemente di trarre dalla sequenza esatta (I) alcuna ulteriore informazione; in genere, si considereranno casi in cui K è un corpo commutativo, ovvero un sottoanello di D.

Se M è un D-modulo, e D è una K-algebra, M assume naturalmente struttura di K-modulo: infatti, se $\mu \in M$ e $k \in K$, basta porre $k\mu = (k1)\mu$ (1 essendo l'identità moltiplicativa di D). Il passaggio dalla struttura di D-modulo alla struttura di K-modulo ha carattere funtoriale; di più, si tratta di un funtore esatto come funtore dalla categoria dei D-moduli alla categoria dei K-moduli. Va osservato però che, in generale, $\mathrm{Hom}_D(M, M') \subset \mathrm{Hom}_K(M, M')$ (M, M' moduli nel primo caso su D, nel secondo su K).

Ciò premesso, convenendo di indicare con tM il sottomodulo di torsione del D-modulo M, possiamo considerare il diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (\operatorname{Ker} L) \otimes_D X \arrow[r] & X^p \arrow[r, "\Gamma"] & X^q \arrow[r] & (\operatorname{Coker} L) \otimes_D X \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & (\operatorname{Ker} L) \otimes_D tX \arrow[r] \arrow[u] & tX^p \arrow[r] \arrow[u] & tX^q \arrow[r] \arrow[u] & (\operatorname{Coker} L) \otimes_D tX \arrow[r] \arrow[u] & 0
\end{tikzcd}$$

ottenuto in modo ovvio dalla risoluzione proiettiva di Coker Γ tensorializzata una volta con X, e l'altra con tX.

A tale diagramma si può associare il diagramma a righe esatte:

$$\text{(II)} \quad \begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (\operatorname{Ker} L) \otimes_D X \arrow[r] & \operatorname{Ker} \Gamma \arrow[r, "\delta"] & \operatorname{Tor}^D(\operatorname{Coker} L, X) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & (\operatorname{Ker} L) \otimes tX \arrow[r] \arrow[u] & \operatorname{Ker} t\Gamma \arrow[r, "\delta'"] \arrow[u, "\varepsilon'"'] & \operatorname{Tor}^D(\operatorname{Coker} L, tX) \arrow[r] \arrow[u, "\varepsilon"', "\wr"] & 0
\end{tikzcd}$$

ottenuto considerando le sequenze esatte associate alla prima ed alla seconda riga del diagramma precedente, e la traslazione dell'una nell'altra indotta dalla traslazione della prima nella seconda riga. In esso, ε è isomorfismo.

Il diagramma (II) è un diagramma nella categoria dei D-moduli; esso può essere interpretato — alla luce delle premesse fatte — come diagramma nella categoria dei K-moduli (essendo D una K-algebra). Nella categoria dei K-moduli, può accadere che l'epimorfismo δ' ammetta inverso a destra (ciò accade ad esempio se $\operatorname{Tor}^D(\operatorname{Coker} L, X)$ è proiettivo come K-modulo; ovvero se K è un corpo commutativo, il diagramma (II) divenendo un diagramma nella categoria degli spazi vettoriali). In tale caso, si ottiene subito un monomorfismo (di K-modulo):

$$\mu : \operatorname{Tor}^D(\operatorname{Coker} L, X) \longrightarrow \operatorname{Ker} \Gamma$$

che si fattorizza attraverso l'oggetto $\operatorname{Ker} t\Gamma$($D$-modulo di « torsione » rispetto a D, in quanto sottomodulo di tX^q). In conclusione, l'immagine del monomorfismo μ è un sottomodulo del K-modulo $\operatorname{Ker} \Gamma$, costituito da soli elementi di torsione (rispetto a D).

Supponiamo ora che $\operatorname{Ker} L$ sia libero (come D-modulo), e che Tor^D $(\operatorname{Coker} L, X)$ sia un K-modulo proiettivo di tipo finito (in particolare, se K è un corpo commutativo, uno spazio vettoriale su K di dimensione finita): si ottiene subito, per la soluzione generale del sistema di equazioni dato, una rappresentazione del tipo:

$$\text{(III)} \qquad \begin{aligned} x_1 &= \pi_{11}u_1 + \dots + \pi_{1k}u_k + v_{11}c_1 \dots + v_{1s}c_s \\ &\cdot \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\cdot \\ x_p &= \pi_{p1}u_s + \dots + \pi_{pk}u_k + v_{p1}c_1 + \dots + v_{ps}c_s \end{aligned}$$

ove π_{ij} sono elementi di D; v_{ij} sono elementi di torsione di X (rispetto a D); ed i parametri $u_1, \dots, u_k$; $c_1, \dots, c_s$, sono rispettivamente elementi di D e di K.

Alla (III) si giunge in modo naturale in base alle considerazioni precedenti osservando che, sotto l'ipotesi che Tor^D $(\mathrm{Coker}\, L, X)$ sia proiettivo e di tipo finito come K-modulo, $\mathrm{Ker}\, \Gamma$ si può rappresentare come somma diretta $(\mathrm{Ker}\, L) \otimes_D X$ e di Tor^D $(\mathrm{Coker}\, L, X)$; essendo inoltre $\mathrm{Ker}\, L$ libero (come D-modulo), per la componente $(\mathrm{Ker}\, L) \otimes_D X$ vale la rappresentazione stabilita con il teorema 4.

In conclusione, può enunciarsi il seguente teorema generale di rappresentazione:

TEOREMA 5: *sia K un dominio di integrità; Sia D un dominio di integrità soddisfacente alla condizione* (P_{12}); *supponiamo inoltre che D sia una K-algebra, ed X un D-modulo; consideriamo il sistema (di q equazioni in p incognite)*:

$$\begin{cases} d_{11}x_1 + \dots + d_{1p}x_p = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ d_{q1}x_1 + \dots + d_{qp}x_p = 0 \end{cases}$$

posto $L = (d_{ij})$, se Tor^D $(\mathrm{Coker}\, L, X)$ *è proiettivo di tipo finito come K-modulo, allora vale, per le soluzioni del sistema, una rappresentazione di tipo* (III).

Sotto le ipotesi fatte nel teorema 5, in genere non è vero che si possano determinare π_{ij} e v_{ij} in modo tale che ogni soluzione del sistema ammetta una unica rappresentazione di tipo (III). Ciò avviene peraltro se K è dominio di Bezout (in particolare, se K è un corpo commutativo). Infatti, se K è dominio di Bezout, ogni K-modulo di tipo finito e proiettivo è libero. Da ciò segue il corollario:

COROLLARIO 5 *a*): *supponiamo che D e K soddisfino a tutte le condizioni del Teorema* 5, *e che inoltre K sia dominio di Bezout. Allora, il fatto che* Tor^D $(\mathrm{Coker}\, L, X)$ *sia K-modulo proiettivo e di tipo finito è condizione sufficiente perchè si possano determinare π_{ij} e v_{ij} in modo tale che ogni soluzione del sistema ammetta una unica rappresentazione di tipo* (III).

6. Nel teorema 5 e nel corollario successivo, un ruolo importante è giocato dalla condizione che Tor^D (Coker L, X) sia un K-modulo proiettivo e di tipo finito. È utile allora conoscere delle condizioni su D, K, X che siano sufficienti perchè ciò accada: ne verrà la possibilità di usare il teorema 5 in modo semplice ed immediatamente operativo.

TEOREMA 6: *sia D un dominio di Bezout, K un dominio di integrità sia inoltre D una K-algebra, ed X un D-modulo. Allora, condizione necessaria e sufficiente perchè* Tor^D (Coker L, X) *sia un K-modulo proiettivo e di tipo finito è che ogni elemento di D operi su X come K-omomorfismo avente nucleo proiettivo di tipo finito (come K-modulo).*

Che la condizione sia necessaria è ovvio (sistemi di una equazione in una incognita). Per provare che la condizione è sufficiente, basta provare che da essa segue che Tor^D (Coker L, X) è di tipo finito e proiettivo, in quanto K-modulo. Osserviamo che Coker L è un D modulo finitamente generato, e come tale rappresentabile come somma diretta di un numero finito di D-moduli ciclici: infatti, dato il D-omomorfismo L, Im L si distribuisce sulle componenti di D^q, e si ottengono, per le q componenti, q sottomoduli finitamente generati, quindi liberi (essendo D un dominio di Bezout). Passando al quoziente, Coker L si può allora rappresentare come somma diretta di q quozienti del tipo Coker δ_i:

$$\text{(IV)} \qquad 0 \longrightarrow D \xrightarrow{\delta_i} D \longrightarrow \mathrm{Coker}\,\delta_i \longrightarrow 0$$

($\delta_i \in D$). Basterà allora provare che Tor^D (Coker δ_i, X) è proiettivo e di tipo finito come K-modulo; per questo osserviamo che la sequenza esatta (IV) è una risoluzione libera di Coker δ_i (essendo D un dominio di Bezout), quindi, tensorializzando con il D-modulo X, si ottiene la sequenza esatta:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}^D(\mathrm{Coker}\,\delta_i, X) \longrightarrow X \longrightarrow X \longrightarrow (\mathrm{Coker}\,\delta_i) \otimes_D X \longrightarrow 0$$

d ciò segue, come volevasi, che Tor^D (Coker δ_i, X) è proiettivo e di tipo finito, in quanto nucleo di un K-endomorfismo di X ottenuto facendo operare su X l'elemento δ_i. Va osservato che la condizione che D sia dominio di Bezout gioca un ruolo essenziale nella dimostrazione fatta, ed appare difficilmente attenuabile se si vuole mantenere valido l'enunciato del teorema.

Parte II – *Sottoanelli di* $\mathfrak{H}(\boldsymbol{C})$

1. Indichiamo con $\mathfrak{H}(\boldsymbol{C})$ l'anello delle funzioni intere (olomorfe sul piano complesso), con $\boldsymbol{C}[z]$ l'anello delle funzioni polinomiali, con $M(\boldsymbol{C})$ il corpo delle funzioni meromorfe.

Utilizzeremo più volte per il seguito il seguente teorema, di Helmer ([3]):

Teorema 7: *$\mathfrak{H}(\boldsymbol{C})$ è un dominio di Bezout.*

Il teorema di Helmer è stato di recente esteso da Kelleher ([8]) ad ogni sottoanello del corpo delle funzioni meromorfe su una superficie di Riemann non compatta Ω che contenga l'anello delle funzioni analitiche su Ω. In particolare, se $\Omega = \boldsymbol{C}$, il teorema di Kelleher può così enunciarsi:

Teorema 8: *se B è un sottoanello di $M(\boldsymbol{C})$ contenente $\mathfrak{H}(\boldsymbol{C})$, allora B è dominio di Bezout.*

2. Consideriamo, in $\mathfrak{H}(\boldsymbol{C})$, la topologia della convergenza uniforme sui compatti. Sussiste il seguente teorema (dovuto a Schilling, [11]):

Teorema 9: *ogni ideale chiuso di $\mathfrak{H}(\boldsymbol{C})$ è principale.*

A questo risultato si può giungere sia con considerazioni analitiche, « classiche »; sia con considerazioni di carattere algebrico; in entrambi i casi, tuttavia, il punto cruciale della dimostrazione consiste nel provare che, se I è un ideale di $\mathfrak{H}(\boldsymbol{C})$ privo di zeri e chiuso, allora $I = \mathfrak{H}(\boldsymbol{C})$. È naturale quindi il tentativo di provare un risultato analogo per i sottoanelli di $\mathfrak{H}(\boldsymbol{C})$, come primo passo per estendere il teorema di Schilling a certi sottoanelli di $\mathfrak{H}(\boldsymbol{C})$.

Teorema 10: *sia D un sottoanello di $\mathfrak{H}(\boldsymbol{C})$; sia $D \supset \boldsymbol{C}[z]$; se I è un ideale chiuso di D, privo di zeri comuni alle sue funzioni, allora $I = D$.*

Sia infatti C_r un cerchio di raggio $r > 0$, di centro l'origine; consideriamo, in I, una funzione f_1 non nulla identicamente: essa avrà, in C_r, un numero finito, k, di zeri. Se $k > 0$, per l'ipotesi fatta su I si troverà sicuramente in I una funzione f_2 nulla, in C_r, al più in $k - 1$ dei punti in cui si annulla f_1. Così di seguito, si giunge ad una famiglia $f_2, \ldots, f_n$ costituita al più da $k + 1$ funzioni di I non eventi alcuno zero in comune. Ogni f_i si può esprimere come prodotto: $f_i = p_i h_i$, di un polinomio p_i, avente in C_r gli stessi zeri di f_i e non nullo fuori di C_r, per una funzione d_i, analitica e senza zeri in C_r. I polinomi p_i non hanno zeri in comune tra loro, pertanto si possono determinare n polinomi δ_i tali che

$$1 = \delta_1 p_1 + \ldots + \delta_n p_n .$$

Consideriamo i prodotti $\delta_i p_i$, e sia

$$\mu = \operatorname*{Sup}_{i=1..n} \{ \mid \delta_i(z) p_i(z), z \in C_r \}$$

è ovvio che $\mu > 0$.

D'altra parte, $1/h_i$ è olomorfa in C_r: si potrà pertanto scrivere

$$1/h_i(z) = \sum_{s \geqslant 0} \alpha_{is} z^s$$

e la serie di potenze a secondo membro convergerà uniformemente ad $1/h_i$ su ogni cerchio chiuso concentrico a C_r e di raggio $r' < r$. Consideriamo $C_{r'}$ (con $r' < r$), ed il numero reale positivo $1/2n\mu$.

Per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$, sia q_i una ridotta della serie $\sum_{s \geqslant 0} \alpha_{is} z^s$ tale che $| h_i q_i - 1 | < 1/2n\mu$ in $C_{r'}$; consideriamo la funzione $f = \sum_{i=1}^{n} f_i \delta_i q_i$: ovviamente si tratta di un elemento di I; proviamo che, in $C_{r'}$, — è positiva: infatti:

$$\begin{aligned} |f| &= \Big| \sum_{i=1}^{n} p_i h_i \delta_i q_i \Big| = \\ &= \Big| \sum_{i=1}^{n} \delta_i p_i (h_i q_i - 1) + \sum_{i=1}^{n} \delta_i p_i \Big| \geqslant 1 - \Big| \sum_{i=1}^{n} \delta_i p_i (h_i q_i - 1) \Big| \geqslant \\ &\geqslant 1 - \sum_{i=1}^{n} | \delta_i p_i | \, | (h_i q_i - 1) | \geqslant 1 - n\mu \frac{1}{2n\mu} > 0 \,. \end{aligned}$$

Ne viene che $1/f$ è olomorfa e limitata in $C_{r'}$; consideriamo le ridotte q_n di ordine n ($n \geqslant 0$) della serie sviluppo di Taylor di $1/f$: si tratta di polinomi tali che la successione: $\{f q_n\}$ di elementi di I converge uniformemente ad 1 in $C_{r'}$. In conclusione, 1 appartiene alla chiusura di I in D, ma I è chiuso, onde $I = D$.

La dimostrazione data (che rappresenta l'estensione, al caso in cui D sia sottoanello di $\mathfrak{H}(\boldsymbol{C})$ contenente l'anello dei polinomi, della dimostrazione « classica », valida quando $D = \mathfrak{H}(\boldsymbol{C})$) è ricca di indicazioni per ulteriori estensioni della validità del risultato espresso dal Teorema 10.

In sostanza, le uniche proprietà dell'anello dei polinomi che si sono sfruttate riguardano: A) la possibilità di approssimare mediante una successione di polinomi ogni funzione olomorfa sul piano (nella topologia della convergenza uniforme sui compatti); B) il fatto che, dato un numero finito di polinomi senza zeri a comune, l'ideale da essi generato in $\boldsymbol{C}[z]$

coincide con $\mathbf{C}[z]$. La condizione: $D \supset \mathbf{C}[z]$ potrà quindi essere sostituita — senza che la validità dell'enunciato del teorema 10 risulti compromessa — con la condizione che D contenga un sottoanello R di $\mathfrak{H}(\mathbf{C})$, denso in $\mathfrak{H}(\mathbf{C})$, e per il quale ogni ideale di tipo finito e privo di zeri comuni alle funzioni generatrici coincida con R. Su tutto ciò comunque avremo modo di tornare in seguito.

3. Se f è una funzione olomorfa sul piano, indicheremo con $Z(f)$ l'insieme degli zeri della funzione f. Consideriamo la seguente condizione su un sottoanello D di $\mathfrak{H}(\mathbf{C})$:

(Z_1): *se* $t \in \mathfrak{H}(\mathbf{C})$, $f \in D$, $f \neq 0$ *e* $Z(t) \subset Z(f)$, *allora esiste* u, *unità in* $\mathfrak{H}(\mathbf{C})$, *tale che* $ut \in D$.

La condizione (Z_1) è una condizione verificata in molti casi di un certo interesse per le applicazioni. È pressochè immediato provare il seguente teorema:

TEOREMA 11: *sia* D *un sottoanello di* $\mathfrak{H}(\mathbf{C})$ *nel quale ogni ideale chiuso privo di zeri coincide con* D.

Se D *in* $\mathfrak{H}(\mathbf{C})$ *soddisfa alle condizioni* (Z_0) *e* (Z_1), *allora ogni ideale chiuso di* D *è principale.*

La dimostrazione si può condurre adattando al nostro caso le considerazioni « classiche » usate per provare il teorema quando $D = \mathfrak{H}(\mathbf{C})$. Se I è un ideale chiuso di D e $Z(I)$ indica l'insieme degli zeri comuni a tutte le sue funzioni (ciascuno con la sua molteplicità minima comune), si può costruire una funzione w che si annulla in $Z(I)$ soltanto, è analitica sul piano complesso, ed appartiene a D. Ciò in base al teorema di Weierstrass ed all'ipotesi (Z_1). Allora, le funzioni f/w sono elementi di D, (ipotesi (Z_0)), e costituiscono un ideale I' di D. Se I è chiuso, anche I' è chiuso (se la successione $\{f_n/w\}$ converge ad f, allora $\{f_n\}$ converge ad fw e quindi $f = fw/w \in I'$); di più, le funzioni di I' non hanno zeri a comune. Da ciò segue che $I' = D$ e, quindi, che I è l'ideale generato, in D, da w.

Volendo, le condizioni di validità del teorema potrebbero essere attenuate; di ciò peraltro non avremo bisogno in questo lavoro.

4. Il teorema 10 può essere invertito, nel senso che si può provare che, in $\mathfrak{H}(\mathbf{C})$, ogni ideale principale è chiuso. La parte cruciale della dimostrazione si fonda sul fatto che, *se* $\{\varrho x_n\}$ *è una successione di prodotti di funzioni olomorfe* ($\varrho \neq 0$) *convergente uniformemente sui compatti ad una funzione* (*olomorfa*) μ, *allora la successione* $\{x_n\}$ *converge uniformemente sui* *compatti alla funzione olomorfa* μ/ϱ. Utilizzando tale risultato, possiamo provare alcune interessanti proposizioni:

LEMMA: *Sia D un sottoanello di $\mathfrak{H}(\boldsymbol{C})$ soddisfacente alla condizione (Z_0). Allora, ogni ideale principale di D è chiuso.*

Infatti, sia $\delta \neq 0$ un elemento di D, e supponiamo che $\{\delta x_n\}$ $(x_n \in D)$ sia una successione convergente uniformemente sui compatti ad una funzione $\mu \in D$. Allora la successione $\{x_n\}$ converge uniformemente sui compatti alla funzione olomorfa μ/δ. μ/δ appartiene a D, in quanto $\delta \in D$ e $\delta\mu/\delta = \mu \in D$: ne viene che μ appartiene all'ideale generato in D da δ.

Indichiamo con $U^{-1}(D)$ gli inversi degli elementi di D invertibili in $\mathfrak{H}(\boldsymbol{C})$, e con $\overline{D}$ la chiusura (topologica) di D.

LEMMA: *se D è un sottoanello di $\mathfrak{H}(\boldsymbol{C})$, e $\overline{D} \supset U^{-1}(D)$, allora dal fatto che ogni ideale principale di D sia chiuso segue che $D \supset U^{-1}(D)$.*

Sia $\alpha \in D$, α unità in $\mathfrak{H}(\boldsymbol{C})$: sotto le ipotesi fatte, esiste una successione $\{x_n\}$ $(x_n \in D)$ convergente ad $1/\alpha$. Allora $\{\alpha x_n\}$ converge ad 1, e quindi, poichè l'ideale generato da α in D è chiuso, $1/\alpha \in D$.

TEOREMA 12: *sia D un dominio di Bezout, $D \subset \mathfrak{H}(\boldsymbol{C})$; se $\overline{D} \supset U^{-1}(D)$, sono equivalenti i seguenti fatti:*

(*a*) *D soddisfa alla condizione (Z_0)*;

(*b*) *in D ogni ideale principale è chiuso*;

(*c*) $D \supset U^{-1}(D)$.

In base ai lemmi precedenti, resta da provare che da (*c*) segue (*a*). Sia $d \in D$, $d \neq 0$; sia $t \in \mathfrak{H}(\boldsymbol{C})$ e $dt \in D$. L'ideale generato da d e da dt è principale in D, onde esistono in D degli elementi u, v, w, z, x tali che

$$uv = d; \qquad uw = dt_n \qquad dz + dtx = u \; .$$

Da ciò segue che $(dz + dtx)v = d$, cioè: $(z + tx)v = 1$. Allora v è unità in $\mathfrak{H}(\boldsymbol{C})$, quindi $1/v \in D$, onde $w \cdot 1/v = t \in D$.

OSSERVAZIONE: nella dimostrazione del teorema 12, si è sfruttato solo il fatto che, in D, l'ideale generato da d e da dt è principale; anche le condizioni di validità del teorema 12 appaiono quindi attenuabili.

Si deve peraltro rilevare che, in $\mathfrak{H}(\boldsymbol{C})$, possono costruirsi esempi di domini soddisfacenti alle condizioni (*a*), (*b*) e (*c*), densi in $\mathfrak{H}(\boldsymbol{C})$, e che non sono domini di Bezout; come pure possono facilmente realizzarsi esempi di domini di Bezout non soddisfacenti a qualcuna delle condizioni (*a*), (*b*), (*c*): ad esempio, l'anello Z degli interi relativi soddisfa alla condizione (*b*) ma non alle condizioni (*a*) e (*c*). Infine, si possono considerare anche esempi di domini densi in $\mathfrak{H}(\boldsymbol{C})$ ma non soddisfacenti a qualcuna delle condizioni (*a*), (*b*), (*c*): e tutto ciò garantisce che l'equivalenza delle condizioni (*a*), (*b*), (*c*) è un fatto non banale, valido solo sotto ipotesi piuttosto forti sull'anello D.

5. La maggior parte dei sottoanelli di $\mathfrak{H}(\mathbf{C})$ che presentano interesse per i problemi di analisi funzionale (e, in genere, per le applicazioni) è costituita da sottoanelli dell'anello delle funzioni analitiche « di tipo esponenziale », che indicheremo con H^1_s. Gli elementi di H^1_s sono le funzioni analitiche sul piano complesso di « ordine » al più uguale ad 1 e « tipo » al più normale. A questo proposito, ricordiamo che, se $f \in \mathfrak{H}(\mathbf{C})$, $f \neq 0$, ed esiste qualche $k > 0$ per cui $M_f(r) \leqslant e^{r^k}$ asintoticamente, allora *l'estremo inferiore di tali numeri k si chiama « ordine di f »*. Se l'ordine di f è uguale a $\mu \in R$, consideriamo l'insieme dei numeri reali positivi A tali che $M_f(r) \leqslant e^{Ar^\mu}$ asintoticamente: *diremo che f è di tipo al più normale se tale insieme è non vuoto*; *altrimenti diremo che f è di tipo massimale.*

È facile verificare che H^1_s è un anello (essendo chiuso rispetto alla somma ed al prodotto; V. Levin ([9])) È ben noto inoltre che H^1_s soddisfa alla condizione (Z_0) Helmer ([3]) pose per la prima volta il problema della struttura algebrica dell'anello delle funzioni intere di ordine finito, e dei suoi sottoanelli. Se μ è un numero reale non negativo, con H^μ indicheremo l'anello delle funzioni intere di ordine al più eguale a μ. In particolare, si ha $H^1_s \subset H^1$, e l'inclusione è propria. Con considerazioni analoghe a quelle fatte per H^1_s, si può provare che gli anelli H^μ sono domini di Prüfer. Proviamo ora il seguente importante

Lemma: *H^1 soddisfa alla condizione (Z_1).*

Supponiamo infatti che $t \in \mathfrak{H}(\mathbf{C})$, $f \neq 0$, $f \in H^1$, e che $Z(t) \subset Z(f)$. In base al criterio di Hadamard per la rappresentazione delle funzioni intere di ordine finito, f ammetterà una rappresentazione del tipo:

$$f(z) = z^m e^{az+b} \prod_{\delta=1}^{\omega} G(z/a_\delta, p) \qquad (\omega \leqslant +\infty)$$

ove m è la molteplicità dell'origine come zero di f, e gli a_δ sono gli zeri di f distinti dall'origine ed ordinati secondo l'accrescimento del modulo; inoltre, p è un numero, caratteristico di f, che può valere 0 oppure 1, e $G(z/a_\delta, p)$ è uguale a $1 - z/a_\delta$ se $p = 0$; a $(1 - z/a_\delta)e^{z/a_\delta}$, se $p = 1$.

D'altra parte, la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\omega'} \frac{1}{|a_n|^k} \qquad (a_n \in Z(t))$$

converge per tutti i valori di k per cui converge la serie

$$\sum_{\delta=1}^{\omega} \frac{1}{|a_\delta|^k} \qquad (a_\delta \in Z(f))$$

che a sua volta è convergente (essendo $f \in H^1$) per qualche valore reale positivo di k. Si potrà allora rappresentare t sotto la forma:

$$t(Z) = z^{m'} e^{\alpha(z)} \prod_{n=1}^{\omega'} G'(z/a_n, p') \qquad \text{ove} \qquad m' \leqslant m;\ p' \leqslant p;\ \omega' \leqslant \omega\,.$$

Ne viene che la funzione $t(z)e^{-\alpha(z)} = z^n \prod_{n=1}^{\omega'} G'(z/a_n, p')$ appartiene ad H^1; infatti, poichè $p' \leqslant p$ il suo ordine è al più eguale ad 1.

Dal Lemma segue subito, osservando che $H^1 \supset \boldsymbol{C}[z]$ e quindi che H^1 è denso in $\mathfrak{H}(\boldsymbol{C})$ e ricordando il teorema 11 ed i lemmi precedenti il teorema 12, il seguente

Teorema 13: *in H^1 ogni ideale chiuso è principale, ed ogni ideale principale è chiuso.*

Le stesse considerazioni possono ripetersi per gli anelli H^μ $(\mu \geqslant 0)$ e per la loro unione (*anello delle funzioni intere di ordine finito*). In definitiva, *si ottiene una catena strettamente crescente di domini di integrità, nei quali gli ideali principali coincidono con gli ideali chiusi.*

In H^1_ε non vale invece la condizione (Z_1), come è facile verificare con un esempio; ed il seguente esempio prova che H^1_ε, come pure H^μ $(\mu \geqslant 1)$, non sono domini di Bezout. Consideriamo infatti la funzione $\alpha(z) = \operatorname{sen} z$, e sia $\delta(z)$ una funzione di H^1_ε, nulla nei punti dell'asse reale di ascissa

$$a_k = 2k\pi + 1/e^{e^{2|k|\pi}} \qquad (k \in Z)$$

ed in essi soltanto.

In H^1_ε una simile funzione può sicuramente realizzarsi, in quanto la distribuzione dei suoi zeri è asintoticamente la stessa degli zeri di $\operatorname{sen} z/2$. Le funzioni intere α e δ non hanno zeri a comune, quindi o l'ideale da esse generato non è principale, o coincide con H^1_ε. In quest'ultimo caso, devono esistere A e B in H^1_ε tali che $A\alpha + B\delta = 1$. Allora $B(a^k) = 1/\delta(a_k) = 1/\operatorname{sen} a_k \geqslant e^{e^{2|k|\pi}}$ e quindi, per $z = a_k$ e $k > 0$, $B(z) \geqslant e^{e^{z-1}}$. La conclusione si ha subito notando che $e^{e^{z}-1}$ è una funzione di ordine non finito, e quindi non appartenente a H^1.

L'analisi preliminare (algebrico-topologica) così condotta sugli anelli $H^\mu(\mu \geqslant 0)$ e H^1_ε ci sarà utile per lo studio dei loro sottoanelli trasformati di algebre di convoluzione, e per l'estensione delle stesse considerazioni ad aperti connessi del piano ed ai relativi anelli di funzioni olomorfe.

6. Tra i sottoanelli di H_ε^1, si presentano di notevole interesse per la teoria di rappresentazione delle soluzioni di un sistema di equazioni di convoluzione gli anelli ottenuti come « trasformati di Laplace » di algebre di convoluzione di struttura particolarmente semplice: precisamente, ricordando che

$$L\delta^{(k)}(t-\mu) = z^k e^{-\mu z} \qquad (L \text{ indica l'operatore di Laplace})$$

si possono considerare i sottoanelli di H_ε^1 costituiti dalle combinazioni lineari

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i(z) e^{b_i z}$$

quando:

(*a*) $\alpha_i(z) \in \boldsymbol{C}[z]$, $b_i = 0$ (polinomi)
(*b*) $\alpha_i \in \boldsymbol{C}$, $b_i \in \boldsymbol{Q}$
(*c*) $\alpha_i \in \boldsymbol{C}$, $b_i \in \boldsymbol{R}$
(*d*) $\alpha_i(z) \in \boldsymbol{C}[z]$, $b_i \in \boldsymbol{Q}$.

Nel primo caso si è condotti allo studio dei sistemi di equazioni differenziali lineari; negli altri casi, si ottengono informazioni sulla rappresentazione delle soluzioni di certe classi di sistemi di equazioni alle differenze finite, o di tipo misto. La condizione (*b*) dà luogo ad un dominio di Bezout, mentre così non accade per (*c*), (*d*); comunque, i criteri indicati nella Parte I consentono lo stesso di raggiungere soddisfacenti risultati di rappresentazione.

Lo sviluppo di queste considerazioni, riguardanti la struttura di H_ε^1 e dei suoi sottoanelli e le applicazioni alla teoria dei sistemi di equazioni di convoluzione, sarà oggetto di un successivo lavoro.

BIBLIOGRAFIA

[1] BOURBAKI N.: *Algebre Commutative*. Cap. VII (Diviseurs).
[2] DARBO G.: *Sulla rappresentazione parametrica....* Pub. Ist. Mat. Un. Genova, 1965.
[3] HELMER O.: *Divisibility Properties of Integral Functions*. Duke Math. J., 1940, 6.
[4] HENRIKSEN M.: *On the Ideal Structure of the Ring of Entire Functions*. Pac. J. Math., 1952, 2.

[5] GUELFAND, CHILOV: *Les Distributions*. Dunod, 1965, II.

[6] HORMANDER L.: *Linear Partial Differential Operators*. Springer-Verlag, 1963.

[7] HORMANDER L.: *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*. Van Nostrand, 1966.

[8] KELLEHER J.: *Rings of Meromorphic Functions*. Bull. of the A.M.S., 1966, 72.

[9] LEVIN B.: *Distribution of Zeros of Entire Functions*. Transl. Math. Mon., Vol. V, 1964.

[10] LANE S. MC: *Homology*. Springer, 1963.

[11] SCHILLING O. F. G.: *Ideal Theory on Open Riemann Surfaces*. Bull. A.M.S., 1946, 52.

[12] KAKUTANI S.: *Rings of Analytic Functions*, in: *Function of a Complex Variable*. Un. of Michigan Press, 1965.

[13] ZEMANIAN A.: *Distribution Theory and Transform Analysis*. Mc Graw-Hill, 1965.

Manoscritto pervenuto in redazione il 10 giugno 1966.