RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

G. SORANI

Sulla coomologia del C^n privato dell'origine

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 37 (1967), p. 234-245

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__37__234_0>

SULLA COOMOLOGIA DEL C^n PRIVATO DELL'ORIGINE

di G. SORANI (*a Roma*) *)

Introduzione.

In [4] abbiamo calcolato la coomologia del C^n privato dell'origine utilizzando il fascio dei germi delle distribuzioni su C^n. In questo lavoro mostriamo che tale calcolo può anche esser fatto usando le distribuzioni di ordine finito. Ciò comporta la risoluzione di un problema al contorno.

1. Forme differenziali e distribuzioni.

Sia C^n lo spazio complesso di dimensione complessa n, descritto dal punto $z = (z_1, ..., z_n)$; una forma differenziale di classe C^∞ è una combinazione lineare a coefficienti funzioni C^∞ dei prodotti esterni dei differenziali delle coordinate complesse z_i e delle loro immaginarie coniugate $\bar{z}_i$. Una tale forma si dice di tipo (r, s) se essa è omogenea di grado r nei differenziali dz_i e di grado s nei differenziali $d\bar{z}_i$; si ha allora:

$$\varphi = \sum_{\substack{\alpha_1<...<\alpha_r \\ \beta_1<...<\beta_s}} \varphi_{\alpha_1...\alpha_r\beta_1...\beta_s} dz_{\alpha_1} \wedge ... \wedge dz_{\alpha_r} \wedge d\bar{z}_{\beta_1} \wedge ... \wedge d\bar{z}_{\beta_s} .$$

Si chiama supporto di una forma differenziale il complementare del massimo aperto sul quale essa è nulla.

Per ogni aperto, $U \subset C^n$ indichiamo con $\mathfrak{D}^{r,s}(U)$ lo spazio C-vettoriale

*) Indirizzo dell'A.: Via A. Vivaldi, 15, Roma.

delle forme differenziali C^∞, di tipo (r, s), a supporto compatto contenuto in U. Se $U = C^n$ scriveremo $\mathfrak{D}^{r,s}$ in luogo di $\mathfrak{D}^{r,s}(C^n)$.

In modo analogo si definiscono gli spazi C-vettoriali, $\mathcal{E}^{r,s}(U)$, $\mathcal{E}^{r,s}$, delle forme differenziali $\mathcal{E}^\infty$, di tipo (r, s), a supporto qualsiasi.

Con $\bar\partial : \mathcal{E}^{r,s} \to \mathcal{E}^{r,s+1}$ indichiamo l'operatore di differenziazione rispetto alle variabili $\bar z_i$.

Se f è una funzione porremo:

$$D^{\alpha\bar\beta} f = \frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n+\bar\beta_1+\ldots+\bar\beta_n} f}{\partial z_1^{\alpha_1} \ldots \partial z_n^{\alpha_n} \partial \bar z_1^{\bar\beta_1} \ldots \partial \bar z_n^{\bar\beta_n}},$$

con $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\bar\beta = (\bar\beta_1, \ldots, \bar\beta_n) \in N^n$. Porremo anche:

$$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n, \qquad |\bar\beta| = \bar\beta_1 + \ldots + \bar\beta_n .$$

Se φ è una forma differenziale con $D^{\alpha\bar\beta}\varphi$ indicheremo la forma che ha come coefficienti le indicate derivate parziali dei coefficienti della forma φ.

Diremo distribuzione T su C^n un funzionale lineare su $\mathfrak{D}^{r,s}$:

$$T : \mathfrak{D}^{r,s} \to C,$$

soddisfacente alla seguente condizione di continuità: se $\{\varphi_\nu\}$ è una successione di forme C^∞, di tipo (r, s), a supporto contenuto in un compatto fisso $K \subset C^n$, tali che $\varphi_\nu \to 0$ uniformemente insieme con tutte le derivate parziali dei coefficienti allora $T[\varphi_\nu] \to 0$.

Sia T una distribuzione su C^n. Sia A l'insieme dei punti $z \in C^n$ che godono della seguente proprietà: ogni $z \in A$ possiede un intorno aperto U tale che per ogni forma φ, C^∞, a supporto compatto contenuto in U, si ha $T[\varphi] = 0$. Il complementare di A è chiuso in C^n e si chiama supporto della distribuzione T.

2. Distribuzioni di ordine finito.

Sia U un aperto relativamente compatto in C^n. Sia $\mathfrak{D}_m^{r,s}(\bar U)$ lo spazio delle forme differenziali di tipo (r, s), a supporto compatto, di classe C^m su U, nulle fuori di U.

Lo spazio $\mathfrak{D}_m^{r,s}(\bar U)$, con la norma:

$$\|\varphi\|_m = \sup_U \sum_{|\alpha|+|\bar\beta| \leq m} |D^{\alpha\bar\beta}\varphi|,$$

ove $| D^{\alpha\bar{\beta}}\varphi |$ indica il modulo dei coefficienti della forma $D^{\alpha\bar{\beta}}\varphi$, è uno spazio di Banach.

Sia $S_m^{n-r,n-s}(\overline{U})$ lo spazio duale di $\mathfrak{D}_m^{r,s}(\overline{U})$; $S_m^{n-r,n-s}(\overline{U})$ è anch'esso uno spazio di Banach. Un elemento $T \in S_m^{n-r,n-s}(\overline{U})$ è un'applicazione lineare continua $T: \mathfrak{D}_m^{r,s} \to \boldsymbol{C}$. Allora esiste una costante $c_U = \| T \|$ tale che per ogni $\varphi \in \mathfrak{D}_m^{r,s}(\overline{U})$ risulta:

$$| T[\varphi] | \leqslant c_U \| \varphi \|_m .$$

Si ha $\mathfrak{D}_{m+1}^{r,s}(\overline{U}) \subset \mathfrak{D}_m^{r,s}(\overline{U})$; inoltre l'immagine della applicazione di inclusione è densa in $\mathfrak{D}_m^{r,s}(\overline{U})$. Ne segue, per trasposizione, un'applicazione iniettiva $S_m^{n-r,n-s}(\overline{U}) \to S_{m+1}^{n-r,n-s}(\overline{U})$.

Lo spazio $\lim\limits_{\to} S_m^{n-r,n-s}(\overline{U}) = \bigcup\limits_m S_m^{n-r,n-s}(\overline{U})$ è lo spazio delle distribuzioni, di tipo $(n - r, n - s)$, di ordine finito su U e lo indicheremo con $S^{n-r,n-s}(\overline{U})$.

Lemma 1: *Sia U un aperto relativamente compatto in $\boldsymbol{C}^n$; ogni distribuzione $T \in S^{n-r,n-s}(\overline{U})$ è la restrizione ad U di una distribuzione $\widehat{T}$ su $\boldsymbol{C}^n$.*

Dimostrazione: Sia $T \in S^{n-r,n-s}(\overline{U})$. Poiché $\mathfrak{D}_m^{r,s}(\overline{U})$ è un sottospazio chiuso di $\mathfrak{D}_m^{r,s}(\boldsymbol{C}^n)$, per il teorema di Han-Banach si può estendere T ad un funzionale lineare continuo $\widetilde{T}: \mathfrak{D}_m^{r,s}(\boldsymbol{C}^n) \to \boldsymbol{C}$. Poichè $\mathfrak{D}^{r,s} \subset \mathfrak{D}_m^{r,s}(\boldsymbol{C}^n)$ e l'applicazione di inclusione i è continua ne segue che il funzionale $\widehat{T} = \widetilde{T} \cdot i$ estende T a $\boldsymbol{C}^n$.

Inoltre ([3] pag. 82) esistono delle forme differenziali $\psi_{\alpha\bar{\beta}}^{n-r,n-s}$ di tipo $(n - r, n - s)$, a coefficienti continui su $\boldsymbol{C}^n$, e degli indici di derivazione $\alpha, \bar{\beta} \in \boldsymbol{N}^n$, tali che per ogni $\varphi \in \mathfrak{D}^{r,s}(\overline{U})$ si ha:

$$T[\varphi] = \sum_{|\alpha|+|\bar{\beta}| \leqslant m} \int_{\overline{U}} \psi_{\alpha\bar{\beta}}^{n-r,n-s} \wedge D^{\alpha\bar{\beta}}\varphi^{r,s} .$$

Osservazione: La formula precedente permette, per ogni $\varphi \in \mathfrak{D}^{r,s}$, di definire $\widehat{T}$ ponendo:

$$\widehat{T} = \begin{cases} T & \text{su } U \\ 0 & \text{su } \boldsymbol{C}^n - U . \end{cases}$$

Sia $S^{n-r,n-s}$ il prefascio che associa ad ogni aperto relativamente compatto U di $\boldsymbol{C}^n$ lo spazio $S^{n-r,n-s}(\overline{U})$ con le applicazioni naturali di restrizione. Indicheremo con $T^{n-r,n-s}$ un elemento di $S^{n-r,n-s}$.

L'operatore $\bar{\partial}$ di differenziazione esterna delle forme differenziali rispetto alle variabili complesse coniugate si estende alle distribuzioni mediante la formula:

$$T^{h,k}[\varphi] = (-1)^{h+k+1} T^{h,k}[\bar{\partial}\varphi] .$$

Posto $t = n - r$, sia $\Sigma^{t,0}(\bar{U}) = \{T^{t,0} \in S^{t,0}(\bar{U}) \mid \bar{\partial} T^{t,0}[\varphi] = 0\}$ lo spazio delle forme differenziali di tipo $(t, 0)$ olomorfe appartenenti a $S^{t,0}(\bar{U})$. Gli elementi di $\Sigma^{t,0}(\bar{U})$ sono cioè quelle forme differenziali $\psi^{t,0}_{\alpha\bar{\beta}} \in \Gamma(U, \Omega^t)$, [1] tali che per ogni forma $\varphi^{r,n} \in \mathfrak{D}^{r,n}(\bar{U})$ esistono $\alpha, \bar{\beta} \in N^n$ per cui l'integrale:

$$\sum_{|\alpha|+|\bar{\beta}| \leqslant m} \int_{\bar{U}} \psi^{t,0}_{\alpha\bar{\beta}} \wedge D^{\alpha\bar{\beta}} \varphi^{r,n},$$

risulta convergente.

Dimostreremo il seguente:

TEOREMA: *Sia* $U = \{z \in C^n \mid \sum_{i=1}^{n} z_i \bar{z}_i \leqslant 1\}$. *La successione*:

$$0 \to \Sigma^{t,0}(\bar{U}) \to S^{t,0}(\bar{U}) \xrightarrow{\bar{\partial}} S^{t,1}(\bar{U}) \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}} S^{t,n-1}(\bar{U}) \xrightarrow{\bar{\partial}} S^{t,n}(\bar{U}) \to 0,$$

è esatta.

Alla dimostrazione di questo teorema premettiamo alcune considerazioni.

3. Forme differenziali a supporto compatto.

α) Sia $ds^2 = \sum_{i=1}^{n} dz_i d\bar{z}_i$ la metrica su C^n e sia:

$$* : \mathcal{C}^{r,s} \to \mathcal{C}^{n-s,n-r},$$

l'operatore di aggiunzione rispetto a tale metrica.

---

[1]) Γ indica, come d'uso, il funtore "sezioni"; Ω^t il fascio dei germi delle forme differenziali di grado t, olomorfe su C^n.

Sia poi:

$$\vartheta : \mathcal{C}^{r,s} \to \mathcal{C}^{r,s-1},$$

l'operatore definito da:

$$\vartheta\varphi = - * \partial * \varphi,$$

ove ∂ è l'operatore di differenziazione esterna rispetto alle coordinate complesse.

Consideriamo anche l'operatore:

$$\square : \mathcal{C}^{r,s} \to \mathcal{C}^{r,s},$$

espresso dalla formula:

$$\square\varphi = \bar{\partial}\vartheta\varphi + \vartheta\bar{\partial}\varphi .$$

Rispetto alla struttura reale del C^n si ha:

$$\square\varphi = \frac{1}{2}\,\Delta\varphi,$$

Δ essendo l'operatore di Laplace.

β) Sia $\varphi^{r,s} \in \mathcal{D}^{r,s}_m(\bar{U})$; in C^n è possibile determinare una forma ψ tale che $\square\psi = \varphi$.

Siano z e ζ un punto fissato ed uno variabile in C^n; posto $d(z, \zeta) = \left(\sum_{i=1}^{n} (z_i - \zeta_i)(\bar{z}_i - \bar{\zeta}_i)\right)^{1/2}$ e indicata con $\varphi_{\alpha\bar{\beta}}$ una delle funzioni $\varphi_{\alpha_1 \ldots \alpha_r \bar{\beta}_1 \ldots \bar{\beta}_s}$, sia:

$$V_{\alpha\bar{\beta}}(z) = \int_{C^n} \frac{\varphi_{\alpha\bar{\beta}}(\zeta)}{(d(z, \zeta))^{2n-2}}\, d\zeta_1 \wedge d\bar{\zeta}_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n \wedge d\bar{\zeta}_n .$$

Risulta:

$$\Delta V_{\alpha\bar{\beta}}(z) = c\varphi_{\alpha\bar{\beta}},$$

con c costante positiva. Si ha quindi:

$$\varphi_{\alpha\bar{\beta}} = \frac{1}{c}\,\Delta V_{\alpha\bar{\beta}} = \frac{2}{c}\,\square V_{\alpha\bar{\beta}} .$$

Posto allora:

$$\psi = \sum_{\alpha\beta} \frac{2}{c} V_{\alpha\beta} dz_{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dz_{\alpha_r} \wedge d\bar{z}_{\beta_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_{\beta_s},$$

ne segue $\varphi = \Box\psi$.

γ) Mostriamo ora che $V_{\alpha\beta} \in L^2(C^n)$, spazio delle funzioni di quadrato integrabile su C^n. Per semplicità di notazioni scriviamo $V(z)$, $\varphi(z)$ anzichè $V_{\alpha\beta}(z)$, $\varphi_{\alpha\beta}(z)$ e poniamo $d\omega = d\zeta_1 \wedge d\bar{\zeta}_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n \wedge d\bar{\zeta}_n$.
Si ha:

$$| V(z) | \leqslant \int_{C^n} \frac{| \varphi(\zeta) |}{(d(z, \zeta))^{2n-2}} d\omega = \int_{\operatorname{Supp}\varphi} \frac{| \varphi(\zeta) |}{(d(z, \zeta))^{2n-2}} d\omega .$$

Poichè $d(z, \zeta) \geqslant d(z, \operatorname{Supp}\varphi)$ si ha:

$$\int_{\operatorname{Supp}\varphi} \frac{| \varphi(\zeta) |}{(d(z, \zeta))^{2n-2}} d\omega \leqslant \frac{1}{(d(z, \operatorname{Supp}\varphi))^{2n-2}} \int_{\operatorname{Supp}\varphi} | \varphi(\zeta) | \, d\omega .$$

Quindi:

$$| V(z) |^2 \leqslant c_\varphi \frac{1}{(d(z, \operatorname{Supp}\varphi))^{4n-4}},$$

con c_φ costante.

Ora:

$$\int_{C^n} | V(z) |^2 d\omega = \int_{|z|<1} | V(z) |^2 d\omega + \int_{C^n - \{|z|<1\}} | V(z) |^2 d\omega ;$$

trascurando l'integrale su $| z | < 1$ che è limitato, è sufficiente considerare il secondo integrale quando z è fuori del Supp φ. In tal caso

$$\frac{1}{(d(z, \operatorname{Supp}\varphi))^{4n-4}},$$

si comporta come $\dfrac{1}{| z |^{4n-4}}$ e non c'è che da calcolare:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{| z |^{4n-4}} d | z | = \frac{1}{4n-5},$$

e ciò mostra che $\int_{C^n} | V(z) |^2 d\omega < +\infty$.

δ) Sia $\varphi^{r,s} \in \mathfrak{D}_m^{r,s}(\overline{U})$, $\bar{\partial}\varphi^{r,s} = 0$, $\varphi^{r,s} = \bar{\partial}\vartheta\psi + \vartheta\bar{\partial}\psi$. Poichè la metrica $ds^2 = \sum_{i=1}^{n} dz_i d\bar{z}_i$ è completa, in virtù di un lemma di Stampacchia si ha intanto $\vartheta\bar{\partial}\psi = 0$; ne segue che:

$$\varphi = \bar{\partial}\vartheta\psi\,.$$

Posto $\vartheta\psi = \eta$ si ha $\varphi = \bar{\partial}\eta$ su $\boldsymbol{C}^n$ e $\bar{\partial}\eta = 0$ su $\boldsymbol{C}^n - U$.

Lemma 2: *Sia* $\varphi_m^{r,s} \in \mathfrak{D}_m^{r,s}(\overline{U})$, $\bar{\partial}\varphi^{r,s} = 0$. *Per* $1 \leqslant s \leqslant n-1$ *esiste una forma* $\sigma^{r,s-1} \in \mathfrak{D}_m^{r,s-1}(\overline{U})$ *tale che* $\bar{\partial}\sigma^{r,s-1} = \varphi^{r,s}$.

Dimostrazione: Indicato con $A^{r,s}$ il fascio dei germi delle forme differenziali di tipo (r, s), C^∞ su $\boldsymbol{C}^n$, si ha la successione esatta:

$$(1) \qquad 0 \to \Omega^r \to A^{r,0} \xrightarrow{\bar{\partial}} A^{r,1} \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}} A^{r,n-1} \xrightarrow{\bar{\partial}} A^{r,n} \to 0\,.$$

Posto $\Omega_s^{r,s-1} = \{\varphi \in A^{r,s-1} \mid \bar{\partial}\varphi = 0\}$ si ha ancora una successione esatta:

$$(2) \qquad 0 \to \Omega_s^{r,s-1} \to A^{r,s-1} \xrightarrow{\bar{\partial}} A^{r,s} \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}} A^{r,n-1} \xrightarrow{\bar{\partial}} A^{r,n} \to 0\,.$$

Dalle (1), (2) passando alla coomologia a supporti compatti si ha:

$$(1') \quad 0 \to \Gamma_k(U, \Omega^r) \to \Gamma_k(U, A^{r,0}) \xrightarrow{\bar{\partial}} \Gamma_k(U, A^{r,1}) \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}} \Gamma_k(U, A^{r,n-1})$$
$$\xrightarrow{\bar{\partial}} \Gamma_k(U, A^{r,n}) \to 0;$$

$$(2') \quad 0 \to \Gamma_k(U, \Omega_c^{r,s-1}) \to \Gamma_k(U, A^{r,s-1}) \xrightarrow{\bar{\partial}} \Gamma_k(U, A^{r,s}) \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots$$
$$\xrightarrow{\bar{\partial}} \Gamma_k(U, A^{r,n-1}) \xrightarrow{\bar{\partial}} \Gamma_k(U, A^{r,n}) \to 0\,.$$

Ne segue:

$$H_k^s(U, \Omega^r) = H_k^1(U, \Omega_c^{r,s-1}) = \operatorname{Ker}\,(\Gamma_k(U, A^{r,s}) \to \Gamma_k(U, A^{r,s+1})) | \bar{\partial}\Gamma_k(U, A^{r,s-1})\,.$$

Dalla inclusione $U \subset \boldsymbol{C}^n$ si ottiene poi la successione esatta:

$$0 \to H_k^0(U, \Omega_c^{r,s-1}) \to H^0(\boldsymbol{C}^n, \Omega_s^{r,s-1}) \xrightarrow{j} H^0(\boldsymbol{C}^n - U, \Omega_c^{r,s-1}) \to$$

$$H_k^1(U, \Omega_c^{r,s-1}) \to \dots ^{2)}.$$

Poichè U è convesso, per $s \leqslant n - 1$, risulta $H_k^s(U, \Omega^r) = 0$ e ciò prova che l'applicazione j è surgettiva. Per $s \leqslant n - 1$ esiste allora una forma $\widehat{\eta}$ su C^n tale che $\widehat{\eta}|_{C^n - U} = \eta$, $\bar\partial\eta = 0$ su C^n. Posto allora $\sigma = \eta - \widehat{\eta}$ si ha:

$$\bar\partial\sigma = \bar\partial\eta = \varphi,$$

e

$$\operatorname{Supp}\sigma \subset U\,.$$

Mostriamo ora che la forma $\sigma \in \mathfrak{D}_m^{r,s-1}(\overline{U})$. Con le notazioni di β), posto $K(z - \zeta) = 1|(d(z, \zeta))^{2n-2}$ si ha:

$$V(z) = \int_{C^n} K(z - \zeta)\varphi(\zeta)d\omega\,.$$

Posto $z - \zeta = u$ si ha:

$$V(z) = \int_{C^n} K(u)\varphi(z - u)du,$$

avendo posto $du = du_1 \wedge d\bar{u}_1 \wedge \dots \wedge du_n \wedge d\bar{u}_n$.

Poichè $\varphi \in \mathfrak{D}_m^{0,0}(C^n)$ ne segue che $V \in \mathfrak{D}_m^{0,0}(C^n)$. Si ha quindi:

$$D^m V(z) = \int_{C^n} K(u)D^m\varphi(z - u)du = \int_{C^n} K(z - \zeta)D^m\varphi(\zeta)d\omega\,.$$

---

2) Sia $\mathcal{F}$ un fascio su C^n; U un aperto relativamente compatto in C^n. Posto $\mathcal{F}_U = \mathcal{F}|_U \cup \{0\}$ si ha la successione esatta di fasci su C^n:

$$0 \to \mathcal{F}_U \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}/\mathcal{F}_U \to 0,$$

da cui segue:

$$\dots \to H^i(C^n, \mathcal{F}_U) \to H^i(C^n, \mathcal{F}) \to H^i(C^n, \mathcal{F}/\mathcal{F}_U) \to H^{i+1}(C^n, \mathcal{F}_U) \to \dots$$

e poichè:

$$H^i(C^n, \mathcal{F}_U) \simeq H_k^i(U, \mathcal{F}),$$
$$H^i(C^n, \mathcal{F}/\mathcal{F}_U) \simeq H^i(C^n - U, \mathcal{F}),$$

si ha:

$$\dots \to H_k^i(U, \mathcal{F}) \to H^i(C^n, \mathcal{F}) \to H^i(C^n - U, \mathcal{F}) \to H_k^{i+1}(U, \mathcal{F}) \to \dots\,.$$

Considerando ora la derivata:

$$\frac{\partial}{\partial z_i} D^m V(z) = \int_{C^n} \frac{\partial K(z-\zeta)}{\partial z_i} D^m \varphi(\zeta) d\omega \ ,$$

appare che $V(z) \in \mathfrak{C}^{0,0}_{m+1}(C^n)$. Ne segue che la forma $\psi^{r,s} \in \mathfrak{C}^{r,s}_{m+1}(C^n)$ e quindi la forma $\eta = \vartheta\psi \in \mathfrak{D}^{r,s-1}_m(\overline{U})$. Ciò completa la prova del lemma.

4.

Osservato che $\mathfrak{D}^{r,s}(\overline{U}) = \bigcap_{m=0}^{\infty} \mathfrak{D}^{r,s}_m(\overline{U})$ si consideri la successione:

$$\ldots \to \mathfrak{D}^{r,s-1}(\overline{U}) \xrightarrow{\bar\partial_{s-1}} \mathfrak{D}^{r,s}(\overline{U}) \xrightarrow{\bar\partial_s} \ldots \xrightarrow{\bar\partial_{n-2}} \mathfrak{D}^{r,n-1}(\overline{U}) \xrightarrow{\bar\partial_{n-1}} \mathfrak{D}^{r,n}(\overline{U}) \to 0 \ .$$

In virtù del lemma 2 questa successione è esatta ovunque fuorchè in $\mathfrak{D}^{r,n}(\overline{U})$. Mostriamo però che $\bar\partial_{n-1}$ è un omomorfismo topologico. Ciò risulta dal seguente:

LEMMA 3: *Sia $\varphi^{r,n} \in \mathfrak{D}^{r,n}(\overline{U})$. Condizione necessaria e sufficiente perchè risulti $\varphi^{r,n} = \bar\partial\sigma^{r,n-1}$ con $\sigma^{r,n-1} \in \mathfrak{D}^{r,n-1}(\overline{U})$, è che per ogni forma $u^{n-r,0}$ tale che $\bar\partial u^{n-r,0} = 0$, si abbia:*

$$\int_{C^n} u^{n-r,0} \wedge \varphi^{r,n} = 0 \ .$$

DIMOSTRAZIONE: La condizione è necessaria. Sia infatti $\varphi^{r,n} = \bar\partial\sigma^{r,n-1}$ con $\sigma^{r,n-1} \in \mathfrak{D}^{r,n-1}(\overline{U})$. Per ogni forma $u^{n-r,0}$ a supporto qualsiasi, tale che $\bar\partial u^{n-r,0} = 0$, si ha:

$$\int_{C^n} u^{n-r,0} \wedge \varphi^{r,n} = \int_{C^n} u^{n-r,0} \wedge \bar\partial\sigma^{r,n-1} = \int_{C^n} \bar\partial(u^{n-r,0} \wedge \sigma^{r,n-1}) =$$

$$\int_{C^n} d(u^{n-r,0} \wedge \sigma^{r,n-1}) = \int_{\partial U} u^{n-r,0} \wedge \sigma^{r,n-1} = 0,$$

poichè $\sigma \,|_{\partial U} = 0$.

La condizione è sufficiente. Supponiamo che per ogni forma $u^{n-r,0}$ a supporto qualsiasi, tale che $\bar\partial u^{n-r,0} = 0$, risulti $\int_{C^n} u^{n-r,0} \wedge \varphi^{r,n} = 0$.

Consideriamo la successione esatta:

$$0 \to \Omega_c^{n-r,0} \xrightarrow{i} A^{n-r,0} \xrightarrow{\bar\partial_0} A^{n-r,1} \xrightarrow{\bar\partial_1} A^{n-r,2} \xrightarrow{\bar\partial_2} \ldots$$

dalla quale si ottiene la successione:

$$0 \to \Gamma(C^n, \Omega_c^{n-r,0}) \xrightarrow{i} \Gamma(C^n, A^{n-r,0}) \xrightarrow{\bar\partial_0} \Gamma(C^n, A^{n-r,1}) \xrightarrow{\bar\partial_1} \Gamma(C^n, A^{n-r,2}) \xrightarrow{\bar\partial_2} \ldots$$

Considerando $\varphi^{r,n}$ come una distribuzione:

$$\varphi^{r,n}[u] = \int_{C^n} u^{n-r,0} \wedge \varphi^{r,n},$$

si ha, per ipotesi, $\varphi^{r,n}[u] = 0$ su $i\Gamma(C^n, \Omega_c^{n-r,0})$. Cioè $\varphi^{r,n}$ è un funzionale lineare continuo sullo spazio di Fréchet $\Gamma(C^n, A^{n-r,0})|i\Gamma(C^n, \Omega_c^{n-r,0})$.

Poichè $H^1(C^n, \Omega_c^{n-r,0}) = 0$ si ha $\operatorname{Im} \bar\partial_0 = \operatorname{Ker} \bar\partial_1$. Allora per il teorema di Banach, $\bar\partial_0$ è un omomorfismo; ne segue che:

$$\bar\partial : \Gamma(C^n, A^{n-r,0})|i\Gamma(C^n, \Omega_c^{n-r,0}) \to \bar\partial\Gamma(C^n, A^{n-r,0}),$$

è un isomorfismo topologico.

Quindi $\varphi^{r,n}$ definisce un funzionale lineare continuo su $\bar\partial\Gamma(C^n, A^{n-r,0})$. Allora per il teorema di Han-Banach, $\varphi^{r,n}$ si estende ad un funzionale lineare continuo:

$$\beta : \Gamma(C^n, A^{n-r,1}) \to C,$$

tale che:

$$\beta[\bar\partial u] = \varphi[u] .$$

Si ha perciò per definizione,

$$\varphi = \bar\partial\beta,$$

β essendo una distribuzione a supporto compatto; esiste perciò una forma $\eta^{r,n-1} \in \mathfrak{D}^{r,n-1}(C^n)$ tale che $\varphi = \bar\partial\eta$. Inoltre col ragionamento di γ) si riconosce che dato comunque un intorno V di $\overline{U}$ si può supporre che sia $\operatorname{Supp} \eta \subset V$.

Per completare la dimostrazione del lemma resta da mostrare che esiste una forma $\sigma^{r,n-1} \in \mathfrak{D}^{r,n-1}(\overline{U})$, tale che $\bar\partial\sigma^{r,n-1} = \varphi^{r,n}$ e ciò segue da un risultato di J. J. Kohn e H. Rossi [1].

5. Dimostrazione del teorema.

Poniamo $D^{r,n}(\overline{U}) = \operatorname{Im} \bar{\partial}_{n-1}$, cioè:

$$D^{r,n}(\overline{U}) = \left\{ \varphi^{r,n} \in \mathfrak{D}^{r,n}(\overline{U}) \mid \forall u^{n-r,0},\ \bar{\partial} u^{n-r,0} = 0,\ \int_{C^n} u^{n-r,0} \wedge \varphi^{r,n} = 0 \right\}.$$

$D^{r,n}(\overline{U})$ è uno spazio di Fréchet in quanto sottospazio chiuso dello spazio di Fréchet $\mathfrak{D}^{r,n}(\overline{U})$. Si ha quindi la successione esatta di spazi di Fréchet e omomorfismi:

$$(3) \qquad 0 \to \mathfrak{D}^{r,0}(\overline{U}) \to \mathfrak{D}^{r,1}(\overline{U}) \to \ldots \to \mathfrak{D}^{r,n-1}(\overline{U}) \to D^{r,n}(\overline{U}) \to 0 .$$

Sia $G^{n-r,0}(\overline{U}) = (D^{r,n}(\overline{U}))'$ il duale di $D^{r,n}(\overline{U})$; poichè $D^{r,n}(\overline{U})$ è un sottospazio chiuso di $\mathfrak{D}^{r,n}(\overline{U})$, per il teorema di Han-Banach $G^{n-r,0}(\overline{U})$ è un quoziente di $S^{n-r,0}(\overline{U})$.

Poichè il diagramma:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{D}^{r,n-1}(\overline{U}) \arrow[r, "\bar{\partial}"] \arrow[dr, "\bar{\partial}"'] & D^{r,n}(\overline{U}) \arrow[r] \arrow[d, "i"] & 0 \\
& \mathfrak{D}^{r,n}(\overline{U}) &
\end{tikzcd}$$

è commutativo, ne segue che nel seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd}
S^{n-r,0}(\overline{U}) \arrow[r, "{}^t\bar{\partial}"] \arrow[d, "{}^ti"'] & S^{n-r,1}(\overline{U}) \arrow[r] & S^{n-r,2}(\overline{U}) \arrow[r] & \ldots \\
G^{n-r,0}(\overline{U}) \arrow[ur, "{}^t\bar{\partial}"'] & & &
\end{tikzcd}$$

la successione orizzontale è esatta, poichè ${}^ti$ è surgettiva.

Posto allora (come al n. 3) $\Sigma^{n-r,0} = \{\alpha \in S^{n-r,0} \mid \bar{\partial}\alpha = 0\}$ si ha la successione esatta:

$$0 \to \Sigma^{t,0}(\overline{U}) \xrightarrow{i} S^{t,0}(\overline{U}) \xrightarrow{\bar{\partial}} S^{t,1}(\overline{U}) \xrightarrow{\bar{\partial}} \ldots \xrightarrow{\bar{\partial}} S^{t,n-1}(\overline{U}) \xrightarrow{\bar{\partial}} S^{t,n}(\overline{U}) \to 0,$$

duale della (3). Ciò prova il teorema.

6.

Posto $S^{0,i} = S^{0,i}(\overline{U})$ definiamo:

$$h^i(U) = \operatorname{Ker}\left(\Gamma(U, S^{0,i}) \to \Gamma(U, S^{0,i+1})\right) | \bar{\partial}\Gamma(U, S^{0,i-1}) .$$

Utilizzando ora le notazioni e i risultati di [3] si può scrivere il diagramma:

$$\begin{array}{ccccccc}
\ldots \to & h^i(U) & \to & h^i(U - \{0\}) & \to & h^{i+1}(U/U - \{0\}) & \to \ldots \\
& \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & \\
\ldots \to & H^i(U, \mathcal{O}) & \to & H^i(U - \{0\}, \mathcal{O}) & \to & H^{i+1}(U/U - \{0\}, \mathcal{O}) & \to \ldots
\end{array}$$

dove $H^i(-, \mathcal{O})$ è definito mediante una risoluzione del fascio $\mathcal{O}$ in distribuzioni (non di ordine finito) e le applicazioni α, β, γ sono indotte dalle rispettive applicazioni di complessi.

La nostra affermazione dell'introduzione segue ora immediatamente.

BIBLIOGRAFIA

[1] KOHN J. J. e ROSSI H.: *On the extension of holomorphic functions from the boundary of a complex manifold.* Annals of Mathematics, pag. 451-472 (1965).

[2] MAGENES E. e STAMPACCHIA G.: *I problemi al contorno per le equazioni differenziali di tipo ellittico.* Ann. Sc. Nor. Sup. Pisa, 1958, 3, 12.

[3] SCHWARTZ L.: *Théorie des distributions.* Vol. 1.

[4] SORANI G.: *Sulla rappresentazione delle funzioni olomorfe.* Atti Acc. Naz. dei Lincei, 1965, XXXIX, 161-166.

Manoscritto pervenuto in redazione il 16 maggio 1966.