RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

DIONIGI GALLETTO

Sistemi incomprimibili a trasformazioni reversibili nel caso asimmetrico (Parte seconda)

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 37 (1967), p. 18-59

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__37__18_0>

SISTEMI INCOMPRIMIBILI A TRASFORMAZIONI REVERSIBILI NEL CASO ASIMMETRICO

(PARTE SECONDA)

di DIONIGI GALLETTO (*a Padova*) *)

Nella presente memoria proseguo nello studio della statica isoterma dei sistemi incomprimibili a trasformazioni reversibili con caratteristiche di tensione asimmetriche, studio intrapreso in [3], con riferimento al caso delle deformazioni finite.

Nella precedente memoria ([3]) ho già osservato come, non appena si sia riusciti a determinare l'incognito stato di equilibrio forzato, il parametro p, caratterizzante la pressione vincolare interna, possa essere determinato, con sole quadrature, tramite le equazioni generali, e come invece sfugga a una determinazione per via analitica il parametro q che interviene, accanto al parametro p, nelle equazioni costitutive, determinazione the va pertanto demandata all'esperienza. Questa osservazione, assieme all'altra che, a differenza di quanto avviene per il parametro p, l'intervento del parametro q è dovuto all'esistenza di un legame (invariante lineare nullo per il rotore di deformazione) avente carattere puramente cinematico e indipendente dai vincoli, interni o esterni che siano, a cui è o può essere soggetto il sistema in esame, rende senz'altro ammissibile l'ipotesi che q sia, al pari dell'energia libera termodinamica, una funzione di stato per il sistema. Inoltre la forma stessa delle equazioni generali, in particolare quella delle condizioni al contorno, permette senz'altro, a mio avviso, di ritenere il parametro q funzione delle stesse variabili da cui dipende l'energia libera.

Conseguenza dell'ammissione ora fatta è che, nel caso isotermo e nell'ambito delle piccole deformazioni (teoria linearizzata), non appena

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la matematica del C.N.R.

Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, Padova.

si ammetta l'ipotesi, plausibilissima, che sia nullo il tensore dei momenti interni di contatto in corrispondenza ad ogni spostamento irrotazionale infinitesimo a partire da uno stato naturale, il potenziale isotermo si presenta somma di una funzione del solo tensore di deformazione e di una del solo suo rotore (rotore di deformazione), il quale presentemente (caso linearizzato) si riduce alla metà del gradiente del rotore dello spostamento (ossia al gradiente del vettore rappresentante la rotazione locale). Di queste funzioni la prima è proprio quella che esprime il potenziale isotermo della teoria classica delle piccole deformazioni. Il risultato ora citato ha carettere generale, ossia rimane valido anche per i sistemi esenti da vincoli interni e generalizza ai sistemi (a trasformazioni reversibili) qualsiansi un risultato già stabilito da G. Grioli [1]) per il caso dei sistemi isotropi esenti da vincoli interni.

Dalle considerazioni svolte per provare il suddetto risultato segue inoltre che l'incremento χ subito nella deformazione dal parametro q (e quindi questo stesso), almeno nell'ambito delle piccole deformazioni, si può ritenere senz'altro funzione soltanto del rotore di deformazione.

Sempre restando nell'ambito della teoria linearizzata, dal fatto che il potenziale isotermo si spezzi nel suddetto modo segue che l'espressione che lega la parte simmetrica del tensore degli sforzi al tensore di deformazione resta la stessa del caso classico (caso simmetrico), mentre il tensore dei momenti interni di contatto si presenta funzione soltanto del rotore di deformazione.

* * *

Dedotte le equazioni generali della teoria linearizzata e la relazione simbolica, di carattere globale, ad esse equivalente, relazione che è l'analoga di quella stabilita in [3] per il caso finito, ho dimostrato la validità nell'attuale teoria dei teoremi fondamentali della teoria classica, e precisamente il teorema della minima energia potenziale, il suo inverso e il teorema di unicità nel caso dei corpi elastici, il teorema di Clapeyron e il teorema di reciprocità di Betti.

Rafforzata la condizione di elasticità per il sistema in esame introducendo l'ipotesi che le due forme quadratiche Q_1 e Q_2, in cui, nel caso linearizzato, si spezza il potenziale isotermo, siano definite positive, ho quindi stabilito l'analogo del classico teorema di Menabrea. Nell'attuale

---

[1]) Cfr. [6], II, 2.

teoria e nel caso in cui risulti diverso da zero l'incremento χ (caso generale) detto teorema non si conserva nel suo enunciato originario, nel senso che la sollecitazione interna compatibile con quella esterna e minimizzante il funzionale $\mathcal{M}$ [2]) costruito mediante la forma quadratica reciproca della $Q_1 + Q_2$ non è più unica. Di tali sollecitazioni ve ne sono infinite e fra esse vi è quella effettiva: i tensori dei momenti interni di contatto di dette sollecitazioni hanno tutti la medesima parte puramente lavorante mentre i tensori degli sforzi hanno tutti la stessa parte simmetrica. Più precisamente, due qualsiansi di dette sollecitazioni minimizzanti hanno i tensori dei momenti che differiscono unicamente per un tensore isotropo, $\tilde{\lambda}\delta^j_i$, nullo sul contorno della configurazione assunta dal continuo, e i tensori degli sforzi che differiscono unicamente per la metà del tensore aggiunto dal gradiente di $\tilde{\lambda}$ (ossia per la metà del tensore emisimmetrico che si ottiene moltiplicando internamente il tensore di Ricci per grad $\tilde{\lambda}$).

Invece, nel caso in cui risulti nullo l'incremento χ, in particolare nel caso in cui risulti addirittura nullo il tensore dei momenti interni di contatto, il teorema di Menabrea conserva il suo enunciato originario: la sollecitazione interna compatibile con quella esterna e minimizzante il funzionale $\mathcal{M}$ è unica e coincide con quella effettiva.

Qualora si introduca, in sostituzione della Q_2, una ulteriore forma quadratica, Q_3, definita in modo tale che le derivate rispetto ai suoi argomenti forniscano le componenti del tensore dei momenti interni di contatto (ottenibile aggiungendo alla Q_2 una conveniente forma quadratica costruita tramite l'espressione linearizzata dell'incremento χ), si ha la possibilità di stabilire nell'attuale teoria una estensione del teorema di Menabrea che conserva l'enunciato originario. Precisamente, introdotta l'ipotesi che Q_3 sia definita positiva (è questa però una condizione che appare più restrittiva della stessa imposta alla Q_2), la sollecitazione interna compatibile con quella esterna e minimizzante il funzionale costruito mediante la reciproca dalla forma quadratica $Q_1 + Q_3$ è unica e coincide con quella effettiva. Il risultato vale qualunque sia χ (purchè, naturalmente, Q_3 si mantenga definita positiva), in particolare quando χ è nullo, caso a cui si è già esplicitamente accennato.

* * *

Rimanendo sempre nell'ambito delle piccole deformazioni, ho trattato in particolare il caso dei corpi isotropi. Osservato come in tal caso i 66

---

[2]) Si veda il n. 7.

coefficienti che individuano il potenziale isotermo si riducano a tre, il primo dei quali non è altro che la terza parte del *modulo di elasticità normale* della teoria classica o, il che è lo stesso, il secondo coefficiente μ di Lamé, si ha tra l'altro che la parte puramente lavorante del tensore degli sforzi differisce unicamente per il fattore $-\frac{1}{2\mu}$ dal tensore di deformazione, risultato che, ovviamente, è valido anche nel caso simmetrico.

Come conseguenza del fatto di avere ritenuto q funzione delle stesse variabili da cui dipende il potenziale isotermo, si ha che nel caso isotropo (e sempre nell'ambito delle piccole deformazioni) l'incremento χ va senz'altro ritenuto nullo, con la conseguenza che il tensore dei momenti interni di contatto viene a coincidere con la sua parte puramente lavorante, che l'analogo del teorema di Menabrea nell'attuale teoria e nel caso dei corpi isotropi conserva l'enunciato originario (salvo, beninteso, la sostituzione dal funzionale che interviene nel caso classico con il funzionale $\mathcal{M}$), ecc.

* * *

A conclusione della presente ricerca ho accennato al caso dei sistemi esenti da vincoli interni.

In tale caso non si ha più l'intervento del parametro p, mentre tutto quanto è stato osservato circa il parametro q e l'incremento χ permane immutato. In particolare, come già si è detto, immutata si conserva l'osservata proprietà del potenziale isotermo e χ nel caso linearizzato si presenta ancora funzione unicamente del rotore di deformazione, con la conseguenza che le equazioni costitutive si presentano semplificate rispetto a quelle stabilite per il caso linearizzato da Grioli [3]), da Aero e Kuvshinskii [4]), Mindlin e Tiersten [5]); inoltre, nel caso particolare dei corpi isotropi, nelle suddette equazioni non v'è traccia dell'indeterminazione che compare in quelle dovute a questi ultimi Autori.

Tutto quanto è stato detto sui teoremi fondamentali della teoria classica resta immutato; in particolare si conserva quanto detto sul teorema di Menabrea.

---

[3]) Cfr. [6], II, 2.

[4]) Cfr. [1].

[5]) Cfr. [7], 3.

1. Richiami e osservazioni introduttive.

Indicato al solito con $\mathscr{C}$ un sistema continuo tridimensionale, che supporrò sin d'ora incomprimibile, con C la configurazione scelta come riferimento, con C' la configurazione attuale, con Σ, Σ' le superficie contorno completo di C e C' rispettivamente, con x^i le coordinate dei punti di C rispetto a una terna cartesiana trirettangola comunque prefissata, con $x^{i'}$ le coordinate dei punti di C' rispetto alla stessa terna, intendo al solito

$$x_i^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}, \qquad x_{i'}^{i} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}, \qquad x_{ij}^{i'} = \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x_i \partial x_j},$$

$$| x_i^{i'} | = \mathrm{Det} \, \| x_i^{i'} \| .$$

Introdurrò l'ipotesi che il sistema sia soggetto unicamente a trasformazioni isoterme, con che si ha

$$| x_i^{i'} | = 1, \tag{1.1}$$

e supporrò al solito che le forze di massa agenti sull'elemento di volume dC' di C' siano riducibili a una forza applicata a un punto interno a dC' e a una coppia e che analoga evenienza accada per le forze esterne agenti sull'elemento di superficie $d\Sigma'$ di Σ', con che si viene ad ammettere la presenza in C' di due campi tensoriali, quello degli sforzi $T^{i'j'}$ e quello dei momenti interni di contatto (momenti superficiali) $L_{i'}{}^{j'}$. Accanto a questi due tensori intervengono i corrispondenti tensori lagrangiani, definiti, tenendo presente la (1.1), da [6])

$$T^{ij} = x_{i'}^{i} x_{j'}^{j} T^{i'j'}, \qquad L'_i{}^j = x_i^{i'} x_{j'}^{j} L_{i'}{}^{j'} . \tag{1.2}$$

Posto

$$g'_{ij} = x_i^{i'} x_j^{i'}, \qquad g'^{ij} = x_{i'}^{i} x_{i'}^{j}, \tag{1.3}$$

e indicate con e_{ij} le componenti del tensore di deformazione:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (g'_{ij} - \delta_{ij}) , \tag{1.4}$$

---

[6]) Cfr. [3], 1.

Come al solito, nelle (1.2) e nel seguito, salvo diverso, esplicito avviso, è sottinteso il simbolo di somma rispetto agli indici ripetuti.

interviene, accanto a detto tensore e in conseguenza delle ipotesi fatte sulla sollecitazione esterna, il suo rotore (rotore di deformazione) [7]:

$$\mu'^{i}{}_{j} = \eta^{ihk} \partial_h e_{kj} , \tag{1.5}$$

con η^{ihk} tensore di Ricci e $\partial_h = \dfrac{\partial}{\partial x^h}$, rotore le cui nove componenti sono soggette all'unico legame [8])

$$\mu'^{i}{}_{i} = 0 . \tag{1.6}$$

Stanti legami (1.1) e (1.6), la parte puramente lavorante della sollecitazione interna è espressa dalle relazioni [9])

$$T^{(l)ij} = T^{(ij)} - \frac{1}{3} T g'^{ij} , \qquad L'^{(l)}{}_{i}{}^{j} = L'_{i}{}^{j} - \frac{1}{3} L' \delta_i^j ,$$

dove $T^{(ij)}$ rappresenta la parte simmetrica di T^{ij}, mentre è

$$T = g'_{ij} T^{ij} , \qquad L' = L'_{i}{}^{i} .$$

Conformemente a quanto convenuto in [3], 4, osservazione II, indicherò i secondi membri delle suddette relazioni con $\overline{T^{(ij)}}$, $\overline{L'_{i}{}^{j}}$, sicchè esse si possono concisamente scrivere

$$T^{(l)ij} = \overline{T^{(ij)}} , \qquad L'^{(l)}{}_{i}{}^{j} = \overline{L'_{i}{}^{j}} . \tag{1.7}$$

Supposto il sistema a trasformazioni reversibili e indicato con $W(e, \mu'; \theta; x)$ il potenziale isotermo a temperatura costante θ (uniforme) — il quale, per le sopra esposte ipotesi, risulta funzione, oltre che delle e_{ij} e delle x^i (se $\mathscr{C}$ non è omogeneo in C), delle $\mu'^{i}{}_{j}$ [10]) —, si ponga [11]), prescindendo dai legami (1.1), (1.6),

$$Z(e, \mu'; \theta; x) = W(e, \mu'; \theta; x) - \frac{p^{(0)}(x)}{2} (\mathfrak{D}^2(e) - 1) - q^{(0)}(x) \mu'^{i}{}_{i} , \tag{1.8}$$

dove $p^{(0)}$ e $q^{(0)}$ sono i valori assunti in C da due parametri p, q dai quali, in conseguenza dei suddetti legami, non si può prescindere nelle relazioni

---

[7]) Cfr. [4], 2.
[8]) Cfr. [5], 4.
[9]) Cfr. [3], 4.
[10]) Cfr. [3], 6.
[11]) Cfr. [3], 6.

che legano $T^{(ij)}$ e $L'_i{}^j$ alle derivate di W rispetto a e_{ij} e $\mu'^i{}_j$ [12]. Inoltre, $\mathfrak{D}(e)$ rappresenta l'espressione di $|x_i^{i'}|$ in funzione di e_{ij}:

$$\mathfrak{D}(e) = \sqrt{|2e_{ij} + \delta_{ij}|} \ , \tag{1.9}$$

dove è naturalmente

$$|2e_{ij} + \delta_{ij}| = \mathrm{Det}\, \| 2e_{ij} + \delta_{ij} \| \ .$$

Le relazioni (equazioni costitutive) che legano $T^{(ij)}$ e $L'_i{}^j$ alle derivate della funzione termodinamica Z risultano espresse da [13]

$$\left\{ \begin{aligned} T^{(ij)} &= - Z^{*ij} + \omega'^{ijh}{}_k Z_h{}^k + \pi g'^{ij} \ , \\ L'_i{}^j &= - Z_i{}^j + \chi \delta_i^j \ , \end{aligned} \right. \tag{1.10}$$

con

$$\pi = p - p^{(0)} \ , \qquad \chi = q - q^{(0)} \tag{1.11}$$

e [14]

$$Z^{*ij} = \frac{1}{2-\delta_{ij}} Z^{ij} \ , \qquad Z^{ij} = \frac{\partial Z}{\partial e_{ij}} \ , \qquad Z_i{}^j = \frac{\partial Z}{\partial \mu'^i{}_j} \ , \tag{1.12}$$

$$\omega'^{ijh}{}_k = \eta^{hl(i} x_{l'}^{j)} x_{kl}^{l'} \ , \tag{1.13}$$

dove è da intendersi

$$\eta^{hl(i} x_{l'}^{j)} = \frac{1}{2} (\eta^{hli} x_{l'}^{j} + \eta^{hlj} x_{l'}^{i}) \ .$$

Dalle (1.10), (1.7) si deducono, come evidente significato dei simboli, le relazioni [15]

$$\left\{ \begin{aligned} T^{(l)ij} &= - \overline{(Z^{*ij} - \omega'^{ijh}{}_k Z_h{}^k)} \ , \\ L'^{(l)}{}_i{}^j &= - \overline{Z_i{}^j} \ , \end{aligned} \right. \tag{1.14}$$

esprimenti che la parte puramente lavorante della sollecitazione interna è completamente determinata dalla conoscenza della funzione Z.

---

[12]) Cfr. [3], 5, 6.

[13]) Cfr. [3], 6.

[14]) È evidente che nelle prime delle (1.12) non si deve sommare rispetto agli indici ripetuti i, j.

[15]) Cfr. [3], 6.

Posto

$$V = \int_C Z(e,\ \mu';\ \theta;\ x)dC \tag{1.15}$$

e supposta la configurazione C naturale e intrinsecamente stabile (con che si viene implicitamente ad ammettere che $\mathscr{C}$ sia elastico), risulta [16]), oltre che $Z^{(0)} = 0$,

$$Z^{ij(0)} = 0\ , \qquad Z_i^{\ j(0)} = 0\ , \tag{1.16}$$

$$\int_C Z(e,\ \mu';\ \theta;\ x)dC > 0\ , \tag{1.17}$$

la diseguaglianza dovendo valere per ogni trasformazione isoterma che non corrisponda a uno spostamento rigido e che naturalmente rispetti la (1.1). $Z^{(0)}$, $Z^{ij(0)}$, $Z_i^{\ j(0)}$ stanno naturalmente ad esprimere ciò che diventano Z, Z^{ij}, $Z_i^{\ j}$ quando $C' \equiv C$.

Il verificarsi delle (1.16) per la funzione Z, ossia il fatto che C sia configurazione naturale, implica che per il potenziale isotermo risulti [17]), in aggiunta a $W^{(0)} = 0$,

$$W^{ij(0)} = p^{(0)}\delta^{ij}\ , \qquad W_i^{\ j(0)} = q^{(0)}\delta_i^j\ , \tag{1.16'}$$

col significato di $W^{(0)}$, $W^{ij(0)}$, $W_i^{\ j}$ ormai ovvio.

Indicati poi con $F^{i'}$, $M_{i'}$ ($\equiv M^{i'}$) i vettori delle forze e dei momenti specifici di massa e con $f^{i'}$, $m_{i'}$ ($\equiv m^{i'}$) i vettori delle forze e dei momenti specifici superficiali esterni, riportati alla configurazione di riferimento [18]), con ν_i il versore della normale interna a Σ, le equazioni fondamentali della statica isoterma dei corpi incomprimibili a trasformazioni reversibili risultano espresse da [19])

$$F^{i'} + \partial_j[x_i^{i'}(Z^{*ij} - \omega'^{ijh}{}_k Z_h^{\ k})] + \frac{1}{2}\eta^{i'h'k'}\partial_{h'}[\partial_j(x_{k'}^k Z_k^{\ j}) + M_{k'}] = \partial_{i'}\pi, \tag{1.18}$$

---

[16]) Cfr. [3], 9.
[17]) Cfr. [3], 6.
[18]) Cfr. [3], 1.
[19]) Cfr. [3], 7.

$$(1.19)\quad \begin{cases} f^{i'} + x^{i'}_{i}(Z^{*ij} - \omega'^{ijh}{}_{k}Z_{h}{}^{k})\nu_j + \\ + \dfrac{1}{2}\eta^{i'h'k'}[\partial_j(x^{k}_{k'}Z_{k}{}^{j}) + M_{k'}]x^{h}_{h'}\nu_h = \pi x^{i}_{i'}\nu_i + \dfrac{1}{2}\eta^{i'h'k'}x^{h}_{h'}\partial_{k'}\chi\nu_h \\ m_{i'} + x^{i}_{i'}Z_{i}{}^{j}\nu_j = \chi x^{i}_{i'}\nu_i \ , \end{cases}$$

$$(1.20)\qquad M_{i'} + 2x^{i}_{i'}T_i + \partial_j(x^{i}_{i'}Z_{i}{}^{j}) = \partial_{i'}\chi \ ,$$

con

$$(1.21)\qquad T_i = \frac{1}{2}\eta_{ihk}T^{hk} \ ,$$

$\eta^{i'h'k'}$ essendo ancora, come η_{ihk}, il tensore di Ricci. È ovvio inoltre che nelle (1.18), (1.19), (1.20) è da intendersi $\partial_{i'} = \dfrac{\partial}{\partial x^{i'}}$, accanto a $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i}$.

Ammesso, per semplicità (e per brevità) che non esistano vincoli (nè interni, nè in superficie) diversi da quello di incomprimibilità, gli spostamenti virtuali di $\mathscr{C}$ a partire da C' sono caratterizzati dai vettori solenoidali $\delta u^{i'}$ [20]), e, indicato con $\delta r^{i'}$ il vettore rappresentante la rotazione locale subita dagli elementi di $\mathscr{C}$ nel passaggio dalla configurazione C' alla configurazione che si ottiene sottoponendo C' allo spostamento virtuale $\delta u^{i'}$:

$$(1.22)\qquad \delta r^{i'} = \frac{1}{2}\eta^{i'h'k'}\partial_{h'}\delta u_{k'} \qquad\qquad (\delta u_{i'} \equiv \delta u^{i'}) \ ,$$

vi è perfetta equivalenza fra le equazioni (1.18), (1.19) e la relazione simbolica [21])

$$(1.23)\qquad \int_C F^{i'}\delta u_{i'}dC + \int_\Sigma f^{i'}\delta u_{i'}d\Sigma + \int_C M_{i'}\delta r^{i'}dC + \int_\Sigma m_{i'}\delta r^{i'}d\Sigma - \\ - \int_C Z^{*ij}\delta e_{ij}dC - \int_C Z_{i}{}^{j}\delta\mu'^{i}{}_{j}dC = 0 \ ,$$

purchè questa si intenda valida per ogni spostamento virtuale $\delta u^{i'}$. In detta relazione non v'è più traccia nè degli incrementi π, χ, nè della parte emisimmetrica di T^{ij}, nè delle $\omega'^{ijh}{}_{k}$.

---

[20]) Cfr., ad es., [3], 3.
[21]) Cfr. [3], 8.

* * *

Qualora si sia riusciti a determinare l'incognito stato di equilibrio forzato, il parametro p può essere determinato con sole quadrature, tramite le equazioni generali (1.18), (1.19) [22]), mentre sfugge a una determinazione per via analitica il parametro q, determinazione che va pertanto demandata all'esperienza. Questa osservazione, assieme all'altra che, a differenza di quanto avviene per il parametro p, l'intervento del parametro q è dovuto all'esistenza di un legame (invariante lineare nullo per il rotore di deformazione) avente carattere puramente cinematico e indipendente dai vincoli [23]), interni o esterni che siano, a cui è o può essere sottoposto il sistema in esame, *rende senz'altro accettabile l'ipotesi che q sia, al pari del potenziale isotermo, una funzione di stato per il sistema.*

Una tale amissione non è invece certo accettabile per il parametro p. Quest'ultimo, il cui intervento è dovuto all'esistenza del legame (1.1), dovuto a sua volta alla presenza del vincolo di incomprimibilità, ha carattere di reazione vincolare e l'incremento π da esso subito nel passaggio dalla configurazione di equilibrio naturale a quella di equilibrio forzato può addirittura presentarsi anche in assenza di deformazione, come accade, ad esempio, nel caso di un solido sferico incomprimibile sottoposto a una pressione uniforme in superficie.

Infine, la forma stessa delle equazioni generali, in particolare quella delle condizioni al contorno espresse dalle seconde delle (1.19), permette senz'altro, a mio avviso, di ritenere il parametro q funzione delle stesse variabili da cui dipende il potenziale isotermo.

2. Teoria linearizzata. Linearizzazione delle (1.10) e sue conseguenze.

Fatto intervenire un parametro moltiplicativo λ per tutte le cause di divario fra la configurazione di equilibrio forzato C' e la configurazione naturale di riferimento C, cioè per $F^{i'}$, $f^{i'}$, ..., segue che $x^{i'}$, T^{ij}, ... saranno da ritenersi funzioni di λ, che supporrò derivabili rispetto a tale parametro almeno una volta nell'intorno dello zero. Per la generica funzione $\varphi(x, \lambda)$,

[22]) Cfr. [3], 8.
[23]) Cfr. [5].

scalare o vettoriale, porrò poi

$$\varphi^{(0)}(x) = \varphi(x, 0) ,$$

$$\varphi^{(n)}(x) = \left[\frac{\partial^n \varphi(x, \lambda)}{\partial \lambda^n}\right]_{\lambda=0} \qquad (n = 1, 2, ...) .$$

L'introduzione di tale parametro implica che risulti $C' \equiv C$ non appena è $\lambda = 0$, ciò che è espresso dalle

$$u^{i(0)} = 0 ,$$

ove le u^i, date dalle

$$u^i = \delta^i_{i'} x^{i'} - x^i \equiv u_i , \tag{2.1}$$

sono le componenti, nel prefissato riferimento cartesiano, del vettore spostamento nel passaggio da C a C'.

Posto poi, in analogia alle (2.1),

$$u_{i'} \equiv u^{i'} = x^{i'} - \delta^{i'}_i x^i$$

sicchè è

$$u_{i'} = \delta^i_{i'} u_i ,$$

risulta [24])

$$x^{i'(0)}_i = \delta^{i'}_i , \qquad x^{i}_{i'}{}^{(0)} = \delta^i_{i'}, \tag{2.2}$$

$$x^{i'(1)}_i = \partial_i u^{i'(1)} \equiv \delta^j_{i'} \partial_i u_j{}^{(1)} \tag{2.2'}$$

e pertanto, ricordate le (1.3), (1.4), seguono le

$$g'_{ij}{}^{(0)} = \delta_{ij} , \qquad e_{ij}{}^{(0)} = 0 , \qquad g'^{ij(0)} = \delta^{ij} , \tag{2.3}$$

$$g'_{ij}{}^{(1)} = 2e_{ij}{}^{(1)} = \partial_i u_j{}^{(1)} + \partial_j u_i{}^{(1)} . \tag{2.3'}$$

---

[24]) Le seconde delle (2.2), (2.2') sono immediata conseguenza delle prime e delle

$$x_j{}' x^i_{i'} = \delta^i_j .$$

E ancora, si hanno le

$$(2.4) \qquad | x_i^{i'} |^{(0)} = 1 ,$$

$$(2.4') \qquad | x_i^{i'} |^{(1)} = \delta_{i'}^{i} \partial_i u^{i'(1)} = \partial_i u^{i(1)} ,$$

$$x_{ij}^{i'(0)} = 0 ,$$

per cui risulta, tra l'altro, stante le (1.13),

$$(2.5) \qquad \omega'^{ijh}{}_k{}^{(0)} = 0 .$$

Introdotto il vettore *rotore dello spostamento*, di componenti

$$(2.6) \qquad 2r^i = \eta^{ihk} \partial_h u_k \equiv 2r_i ,$$

dalle (1.5), (2.3), (2.3′) si ottengono le

$$(2.7) \qquad \mu'^i{}_j{}^{(0)} = 0 , \qquad \mu'^i{}_j{}^{(1)} = \partial_j r^{i(1)},$$

le seconde delle quali esprimono che il tensore $\mu'^i{}_j{}^{(1)}$ è eguale alla metà del gradiente del rotore dello spostamento $u_i^{(1)}$, ossia al gradiente del vettore $r^{i(1)}$ rappresentante la rotazione locale.

Stanti le (2.4′) e le seconde delle (2.7), i legami (1.1), (1.6) a cui sono soggette le e_{ij}, $\mu'^i{}_j$ si traducono, nella teoria linearizzata, in

$$(2.8) \qquad \partial_i u^{i(1)} = 0 ,$$

$$(2.9) \qquad \partial_i r^{i(1)} = 0 ,$$

esprimenti che i *due vettori* $u^{i(1)}$ *e* $r^{i(1)}$ *sono solenoidali*. Ed è ben naturale che $r^{i(1)}$ sia solenoidale, differendo unicamente per il fattore $\frac{1}{2}$ dal rotore del vettore $u^{i(1)}$.

Stanti le (2.3′), il legame (2.8) si può anche porre nella forma, in tutto equivalente,

$$(2.8') \qquad e_{ii}^{(1)} = 0 ,$$

analoga alla

$$(2.9') \qquad \mu'^i{}_i{}^{(1)} = 0,$$

a cui equivale la (2.9).

* * *

Risultando, come agevolmente si può verificare partendo dalla (1.9), [25])

$$\mathfrak{D}^2(e) = 1 + 2e_{ii} + 2(e_{ii})^2 - 2e_{pq}e_{pq} + 8 \mid e_{ij} \mid ,$$

la (1.8) si scrive [26]), naturalmente prescindendo dai legami a cui sono soggette le e_{ij}, $\mu'^i{}_j$,

$$\begin{aligned}(2.10) \qquad Z(e,\ \mu') = W(e,\ \mu') - p^{(0)}e_{ii} + p^{(0)}[e_{pq}e_{pq} - (e_{ii})^2] - \\ - 4p^{(0)} \mid e_{ij} \mid - q^{(0)}\mu'^i{}_i \,.\end{aligned}$$

Posto, per brevità e con evidente significato dei simboli [27]),

$$A^{pqrs}(x) = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial e_{pq}\partial e_{rs}}\right)^{(0)}, \quad B^{pq}{}_r{}^s(x) = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial e_{pq}\partial \mu'^r{}_s}\right)^{(0)}, \quad C_p{}^q{}_r{}^s(x) = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \mu'^p{}_q\partial \mu'^r{}_s}\right)^{(0)},$$

$$A^{*pqrs} = \frac{A^{pqrs}}{(2-\delta_{pq})(2-\delta_{rs})}, \qquad B^{*pq}{}_r{}^s = \frac{B^{pq}{}_r{}^s}{2-\delta_{pq}},$$

e introdotta la forma quadratica nelle e_{ij}, $\mu'^i{}_j$:

$$\begin{aligned}(2.11) \quad Q(e,\ \mu') = \frac{1}{2}\,[(A^{*pqrs} + 2p^{(0)}\delta^{pr}\delta^{qs})e_{pq}e_{rs} + \\ + 2B^{*pq}{}_r{}^s e_{pq}\mu'^r{}_s + C_p{}^q{}_r{}^s\mu'^p{}_q\mu'^r{}_s]\,,\end{aligned}$$

la (2.10), sviluppata mediante la formula di Taylor, dà luogo, qualora si tengano presenti le (1.16), (1.16′), alla

$$(2.12) \qquad Z(e,\ \mu') = Q(e,\ \mu') - p^{(0)}(e_{ii})^2 + \dots ,$$

---

[25]) È evidente che si deve intendere

$$(e_{ii})^2 = (\delta^{ij}e_{ij})^2\,, \qquad e_{pq}e_{pq} = \delta^{pr}\delta^{qs}e_{pq}e_{rs}\,, \qquad \mid e_{ij}\mid = \mathrm{Det}\,\| e_{ij} \| \,.$$

[26]) D'ora in poi, per motivi di concisione, in luogo di $Z(e,\ \mu';\ \theta;\ x)$, $W(e,\ \mu';\ \theta;\ x)$, scriverò semplicemente $Z(e,\ \mu')$, $W(e,\ \mu')$.

[27]) È ovvio che nelle espressioni di A^{*pqrs}, $B^{*pq}{}_r{}^s$ non si deve sommare rispetto agli indici ripetuti.

dove non si sono scritti i termini di ordine superiore al secondo nelle e_{ij}, $\mu'^i{}_j$.

La forma quadratica $Q(e, \mu')$ è, a meno del termine additivo $p^{(0)}e_{pq}e_{pq}$, l'espressione del potenziale isotermo nella teoria linearizzata. Tenuto conto delle relazioni di simmetria a cui soddisfano A^{*pqrs}, $B^{*pq}{}_r{}^s$, $C_p{}^q{}_r{}^s$:

$$A^{*pqrs} = A^{*rspq} = A^{*qprs} = \dots ,$$

$$B^{*pq}{}_r{}^s = B^{*qp}{}_r{}^s , \qquad C_p{}^q{}_r{}^s = C_r{}^s{}_p{}^q ,$$

si ha che il numero di detti coefficienti che sono indipendenti è dato rispettivamente da 21, 54, 45.

Ciò premesso, ricordate le (1.11), (2.5) e le ultime delle (2.3), dalle (1.10), oltre alle relazioni (1.16) conseguenti all'ipotesi che C è configurazione naturale (e che d'altra parte si ritrovano, come è naturale, tramite la (2.12)), seguono le

$$T^{(ij)(1)} = - Z^{*ij(1)} + \pi^{(1)}\delta^{ij} ,$$

$$L'_i{}^{j(1)} = - Z_i{}^{j(1)} + \chi^{(1)}\delta_i^j .$$

Queste, qualora si tengano presenti la (2.12) e il legame (2.8'), dàn luogo alle

$$T^{(ij)(1)} = - Q^{*ij(1)} + \pi^{(1)}\delta^{ij} , \tag{2.13}$$

$$L'_i{}^{j(1)} = - Q_i{}^{j(1)} + \chi^{(1)}\delta_i^j , \tag{2.14}$$

dove risulta, ricordando la (2.11),

$$\left\{\begin{aligned} Q^{*ij(1)} &= \frac{1}{2-\delta_{ij}}\left(\frac{\partial Q(e,\mu')}{\partial e_{ij}}\right)^{(1)} \equiv \frac{1}{2-\delta_{ij}}\,\frac{\partial Q(e^{(1)},\mu'^{(1)})}{\partial e_{ij}{}^{(1)}} , \\ Q_i{}^{j(1)} &= \left(\frac{\partial Q(e,\mu')}{\partial \mu'^i{}_j}\right)^{(1)} \equiv \frac{\partial Q(e^{(1)},\mu'^{(1)})}{\partial \mu'^i{}_j{}^{(1)}} , \end{aligned}\right. \tag{2.15}$$

nelle prime delle quali è ovvio che non va sommato rispetto agli indici ripetuti i, j.

Le (2.13) sono formalmente identiche alle analoghe del caso simmetrico [28]).

[28]) Cfr. [8], III, 1.

In base a quanto osservato alla fine del n. 1, l'incremento χ è da ritenersi dunzione di e_{ij}, μ'^{i}_{j} e quindi risulta, con il significato di χ^{*ij}, χ_i^{j} ormai ovvio,

$$\chi^{(1)} = \chi^{*ij(0)} e_{ij}^{(1)} + \chi_i^{j(0)} \mu'^{i}_{j}{}^{(1)} . \tag{2.16}$$

Ricordata la (2.11), le (2.14) si esplicitano pertanto nelle

$$L'_i{}^{j(1)} = -(B^{*pq}{}_i{}^{j} - \chi^{*pq(0)}\delta_i^j) e_{pq}^{(1)} - (C_p{}^q{}_i{}^j - \chi_p{}^{q(0)}\delta_i^j) \mu'^{p}_{q}{}^{(1)} , \tag{2.17}$$

e da queste, dovendo le $L'_i{}^j$ annullarsi, com'è plausibile, in corrispondenza a ogni spostamento virtuale $u^{i(1)}$ che sia irrotazionale, si deduce che deve essere

$$B^{*pq}{}_i{}^j = \chi^{*pq(0)}\delta_i^j . \tag{2.18}$$

Gli incogniti coefficienti $B^{*pq}{}_i{}^j$, *da* 54, *si riducono pertanto a* 6 *e la determinazione di essi equivale alla determinazione dei* 6 *coefficienti* $\chi^{*pq(0)}$. Anzi, per quanto concerne la loro determinazione, *essi possono addirittura essere ignorati in quanto non intervengono affatto nelle relazioni* (2.13), (2.14).

Infatti, stanti le (2.18), le (2.17), ossia le (2.14), si riducono a

$$L'_i{}^{j(1)} = - C_p{}^q{}_i{}^j \mu'^{p}_{q}{}^{(1)} + \chi_p{}^{q(0)} \mu'^{p}_{q} \delta_i^j , \tag{2.19}$$

dove, tra l'altro, *non v'è traccia delle* $e_{ij}^{(1)}$, mentre le (2.13), ricordata la (2.11) e la (2.9'), si esplicitano nelle

$$T^{(ij)(1)} = -(A^{*pqij} + p^{(0)}\delta^{pi}\delta^{qj}) e_{pq}^{(1)} + \pi^{(1)}\delta^{ij} , \tag{2.20}$$

dove non v'è traccia delle $\mu'^{i}_{j}{}^{(1)}$, oltre che delle $B^{*pq}{}_i{}^j$.

Inoltre, stanti le (2.18), il legame (1.6) e quanto osservato circa le (2.19), (2.20), si ha che l'espressione esplicita di $Q(e, \mu')$ si può semplicemente ritenere espressa da [29])

$$Q(e, \mu') = \frac{1}{2} (A^{*pqrs} + p^{(0)}\delta^{pr}\delta^{qs}) e_{pq} e_{rs} + \frac{1}{2} C_p{}^q{}_r{}^s \mu'^{p}_{q} \mu'^{r}_{s} , \tag{2.11'}$$

---

[29]) Si tenga presente che i legami che limitano la variabilità di e_{ij}, μ'^{i}_{j} dànno origine a una certa indeterminazione nell'espressione effettiva di $W(e, \mu')$ (e quindi di $Q(e, \mu')$) e delle sue derivate parziali, indeterminazione che risulta però eviden-

forma quadratica che è somma di due forme quadratiche, una, $Q_1(e)$, nelle sole e_{ij}:

$$(2.21) \qquad Q_1(e) = \frac{1}{2}(A^{*pqrs} + p^{(0)}\delta^{pr}\delta^{qs})e_{pq}e_{rs} \ ,$$

l'altra, $Q_2(\mu')$, nelle sole $\mu'^i{}_j$:

$$(2.22) \qquad Q_2(\mu') = \frac{1}{2} C_p{}^q{}_r{}^s \mu'^p{}_q \mu'^r{}_s \ .$$

Si è così esteso al caso dei sistemi qualsiansi [30]) un risultato stabilito da Grioli [31]) per il caso dei sistemi isotropi esenti da vincoli interni.

La forma quadratica (2.21) *è la stessa che interviene nel caso simmetrico* [32]).

Nelle (2.19) compare unicamente la parte dell'incremento $\chi^{(1)}$ che dipende da $\mu'^i{}_j{}^{(1)}$ mentre della rimanente parte non vi è più traccia. È pertanto sufficiente tenere presente che le (2.19) rappresentano, nell'ambito della teoria linearizzata, l'equivalente delle seconde delle (1.10) del caso finito e che χ interviene nelle presenti considerazioni unicamente per il tramite delle (1.10) stesse, per concludere che, *almeno nel caso delle piccole deformazioni, si può senz'altro ritenere $\chi^{(1)}$ (e quindi $q^{(1)}$) funzione unicamente del rotore di deformazione* (oltre che delle x^i, se $\mathscr{C}$ non è omogeneo in C):

$$(2.23) \qquad \chi^{(1)} = \chi_i{}^{j(0)} \mu'^i{}_j{}^{(1)} \ ,$$

ciò che equivale a ritenere $\chi^{*ij(0)} = 0$ e, in conseguenza delle (2.18),

$$(2.24) \qquad B^{*pq}{}_i{}^j = 0 \ .$$

Con l'introduzione delle due forme quadratiche $Q_1(e)$, $Q_2(\mu')$, le (2.19),

---

temente eliminata non appena si convenga di far sempre capo a una stessa, ben determinata espressione di W. La scelta di detta espressione viene presentemente sottoposta alla condizione che l'espressione effettiva di $Q(e, \mu')$ risulti proprio espressa dalla (2.11').

[30]) È ovvio che detto risultato, per il modo stesso con cui si è ottenuto, resta valido anche per i sistemi esenti da vincoli interni.

[31]) Cfr. [6], II, 2.

[32]) Cfr. [8], II, 5.

(2.20) si scrivono [33])

$$T^{(ij)(1)} = - Q_1^{*ij(1)} + \pi^{(1)}\delta^{ij} , \tag{2.25}$$

$$L'_i{}^{j(1)} = - Q_{2i}{}^{j(1)} + \chi^{(1)}\delta_i^j , \tag{2.26}$$

dove naturalmente come espressione di $\chi^{(1)}$ va ora assunta la (2.23).

Le (2.25) *sono in tutto identiche a quelle che si ottengono nel caso simmetrico* [34]).

Infine, la linearizzazione delle (1.14) comporta le

$$T^{(1)(ij)(1)} = - \overline{Q_1^{*ij(1)}} , \qquad L'^{(1)}{}_i{}^{j(1)} = - \overline{Q_{2i}{}^{j(1)}}$$

dove, è ovvio, è da intendersi

$$\overline{Q_1^{*ij(1)}} = Q_1^{*ij(1)} - \frac{1}{3} Q^{*hh(1)}\delta^{ij} ,$$

$$\overline{Q_{2i}{}^{j(1)}} = Q_{2i}{}^{j(1)} - \frac{1}{3} Q_{2h}{}^{h(1)}\delta_i^j .$$

3. Linearizzazione delle equazioni fondamentali della statica isoterma dei corpi incomprimibili a trasformazioni reversibili.

Intendendo, naturalmente [35]),

$$F^i = \delta_{i'}^i F^{i'} , \qquad f^i = \delta_{i'}^i f^{i'} , \qquad \dots ,$$

la linearizzazione delle (1.18), (1.19), (1.20), qualora si ricordino le (2.2), (1.16), (2.5), (2.8'), (2.12), (2.11'), (2.21), (2.22), dà luogo alle

$$F^i + \partial_j Q_1^{*ij(1)} + \frac{1}{2}\eta^{ihk}\partial_h(\partial_j Q_{2k}{}^{j(1)} + M_k) = \partial_i \pi^{(1)} , \tag{3.1}$$

$$\begin{cases} f^i + Q_1^{*ij(1)}\nu_j + \frac{1}{2}\eta^{ihk}(\partial_j Q_{2k}{}^{j(1)} + M_k)\nu_h = \pi^{(1)}\nu_i + \frac{1}{2}\eta^{ihk}\partial_k\chi^{(1)}\nu_h , \\ m_i + Q_{2i}{}^{j(1)}\nu_j = \chi^{(1)}\nu_i , \end{cases} \tag{3.2}$$

$$M_i + 2T_i^{(1)} + \partial_j Q_{2i}{}^{j(1)} = \partial_i\chi^{(1)} , \tag{3.3}$$

---

[33]) Si ricordino, in proposito, anche le (2.15).
[34]) Cfr. [8], III, 1.
[35]) Si ricordino, in proposito, le (7.4) di [3], 7.

nelle quali come espressione di $\chi^{(1)}$, è ovvio, va assunta la (2.23) e che rappresentano le *equazioni fondamentali della teoria linearizzata.* Ad esse vanno associate le

$$T_i^{(1)} = \frac{1}{2} \eta_{ihk} T^{hk(1)}$$

che conseguono dalle (1.21) e che, con le (2.25) e (3.3), dàn luogo alle relazioni

$$(3.4)\quad \begin{cases} T^{i+1\ i+2(1)} = -\dfrac{1}{2} M_i + \dfrac{1}{2} \partial_i \chi^{(1)} - \dfrac{1}{2} \partial_j Q_{2i}{}^{j(1)} - Q_1^{*i+1\ i+2(1)} , \\ T^{i+2\ i+1(1)} = \dfrac{1}{2} M_i - \dfrac{1}{2} \partial_i \chi^{(1)} + \dfrac{1}{2} \partial_j Q_{2i}{}^{j(1)} - Q_1^{*i+1\ i+2(1)} , \\ T^{ii(1)} = \pi^{(1)} - Q_1^{*ii} , \end{cases}$$

nelle ultime delle quali è sottinteso che non si deve sommare rispetto all'indice ripetuto i.

* * *

In una teoria ove suppongano necessariamente nulle le $L'_i{}^j$ e, conseguentemente, le $m_{i\prime}$, la forma quadratica $Q(e, \mu')$ si riduce alla $Q_1(e)$ [36]) e le (3.1), (3.2), (3.3) si riducono a

$$(3.5)\quad \begin{cases} F^i + \partial_j Q_1^{*ij(1)} + \dfrac{1}{2} \eta^{ihk} \partial_h M_k = \partial_i \pi^{(1)} , \\ f^i + Q_1^{*ij(1)} \nu_j + \dfrac{1}{2} \eta^{ihk} \nu_h M_k = \pi^{(1)} \nu_i \end{cases}$$

e risulta

$$(3.6)\quad \begin{cases} T^{i+1\ i+2(1)} = -\dfrac{1}{2} M_i - Q_1^{*i+1\ i+2(1)} , \\ T^{i+2\ i+1(1)} = \dfrac{1}{2} M_i - Q_1^{*i+1\ i+2(1)} , \\ T^{ii(1)} = \pi^{(1)} - Q_1^{*ii} , \end{cases}$$

nelle ultime delle quali non va naturalmente sommato rispetto all'indice ripetuto i.

Se infine si suppone che risulti anche $M_i = 0$ (caso simmetrico),

---

[36]) Si veda, in proposito, [3], 7.

le (3.5) si riducono alle [37])

$$(3.7)\quad \begin{cases} F^i + \partial_j Q_1^{*ij(1)} = \partial_i \pi^{(1)} , \\ f^i + Q_1^{*ij(1)} \nu_j = \pi^{(1)} \nu_i , \end{cases}$$

mentre, com'è naturale, le (3.6) si riducono alle (2.25).

4. Conseguenze della linearizzazione sulla condizione (1.17).

Dalla (1.15) e dalle (1.16) seguono le

$$(4.1)\qquad V^{(0)} = 0 , \quad V^{(1)} = 0$$

e inoltre

$$V^{(2)} = \int_C \left[\frac{1}{(2-\delta_{pq})(2-\delta_{rs})} \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial e_{pq} \partial e_{rs}}\right)^{(0)} e_{pq}{}^{(1)} e_{rs}{}^{(1)} + \frac{2}{2-\delta_{pq}} \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial e_{pq} \partial \mu'^r{}_s}\right)^{(0)} e_{pq}{}^{(1)} \mu'^r{}_s{}^{(1)} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial \mu'^p{}_q \partial \mu'^r{}_s}\right)^{(0)} \mu'^p{}_q{}^{(1)} \mu'^r{}_s{}^{(1)}\right] dC$$

che, tenendo presenti le (2.12), (2.24), (2.11') e facendo intervenire il legame (2.8'), dà luogo alla relazione

$$(4.2)\qquad V^{(2)} = 2 \int_C [Q_1(e^{(1)}) + Q_2(\mu'^{(1)})] dC ,$$

dove si sono ricordate le posizioni (2.21), (2.22).

Nell'ipotesi che il corpo $\mathscr{C}$ sia elastico si può quindi concludere che la condizione globale (1.17), esprimente che la configurazione C è intrinsecamente stabile, nella teoria linearizzata si viene a tradurre nella

$$(4.3)\qquad \int_C [Q_1(e^{(1)}) + Q_2(\mu'^{(1)}) dC > 0$$

per ogni trasformazione isoterma che non corrisponda a uno spostamento rigido e che rispetti il vincolo di incomprimibilità, ossia per ogni scelta

---

[37]) Cfr. [8], III, 1.

del vettore solenoidale $u^{i(1)}(x)$ che non implichi l'annullarsi di ciascuna delle $e_{ij}^{(1)}$ in tutto C. Essa, con la seconda delle (4.1), sta ad esprimere che, in corrispondenza ad ogni spostamento che non sia rigido, $V(\lambda)$ presenta un minimo per $\lambda = 0$. Ed è quanto deve accadere, stante la (1.17).

Come nel caso simmetrico, la (4.3) si riflette in sostanza in una restrizione di carattere globale per i coefficienti della $Q = Q_1 + Q_2$.

5. Relazione simbolica della statica isoterma linearizzata dei corpi incomprimibili a trasformazioni reversibili.

D'ora in poi indicherò semplicemente con $\boldsymbol{u}$ il vettore $\boldsymbol{u}^{(1)}$, rappresentante lo spostamento effettivo che il generico punto del sistema subisce nella deformazione. Di conseguenza indicherò le $e_{ij}^{(1)}$, $r^{i(1)}$, $\mu'^{i}{}_{j}^{(1)}$ semplicemente con e_{ij}, r^i, $\mu'^{i}{}_{j}$, per cui con $Q_1^{*ij}(e)$ intenderò $Q_1^{*ij(1)}$, con $Q_{2i}{}^{j}(\mu')$ intenderò $Q_{2i}{}^{j(1)}$.

Con $\bar{\boldsymbol{u}}$ intenderò poi un qualunque vettore solenoidale in C, ossia un vettore rappresentante uno spostamento virtuale del sistema a partire da C. E naturalmente riterrò

$$\bar{e}_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i\bar{u}_j + \partial_j\bar{u}_i) \ , \qquad \bar{r}^i = \frac{1}{2}\eta^{ihk}\partial_h\bar{u}_k \ , \qquad \bar{\mu}'^{i}{}_{j} = \partial_j\bar{r}^i \ .$$

Ciò premesso, si ha che *le* (3.1), *con le condizioni al contorno* (3.2), *sono in tutto equivalenti alla relazione globale*

$$\int_C F^i\bar{u}_i dC + \int_\Sigma f^i\bar{u}_i d\Sigma + \int_C M_i\bar{r}^i dC + \int_\Sigma m_i\bar{r}^i d\Sigma - \tag{5.1}$$
$$- \int_C Q_1^{*ij}(e)\bar{e}_{ij} dC - \int_C Q_{2i}{}^{j}(\mu')\bar{\mu}'^{i}{}_{j} dC = 0 \ ,$$

purchè questa si intenda valida per ogni scelta del vettore $\bar{\boldsymbol{u}}$, *solenoidale in* C, la dimostrazione di detta equivalenza essendo in tutto analoga a quella data in [3], 8 per stabilire la (1.23), valida per il caso finito.

La (5.1), *relazione simbolica della statica linearizzata dei corpi incomprimibili a trasformazioni reversibili*, implica che, non appena lo spostamento virtuale $\bar{\boldsymbol{u}}$ sia uno spostamento rigido, debba essere

$$\int_C F^i\bar{u}_i dC + \int_\Sigma f^i\bar{u}_i d\Sigma + \int_C M_i\bar{r}^i dC + \int_\Sigma m_i\bar{r}^i d\Sigma = 0 \ ,$$

relazione che, ritenuta la sollecitazione esterna vettorialmente invariabile[38]), impone, in analogia al caso simmetrico, una restrizione nella scelta della configurazione naturale di riferimento in quanto esprime che *il sistema, pensato come irrigidito nella configurazione C, deve, in tale configurazione, risultare in equilibrio sotto l'azione della sollecitazione esterna ad esso applicata.*

Inoltre, sempre nell'ipotesi che la sollecitazione esterna sia vettorialmente invariabile (ipotesi che d'ora in poi riterrò sempre sottintesa), segue che ogni soluzione della (5.1) è determinata a meno di uno spostamento rigido.

* * *

Qualora si suppongano nulle le $L'_i{}^j$ e, quindi, le m_i, la relazione (5.1) si riduce a

$$\int_C F^i \bar{u}_i dC + \int_\Sigma f^i \bar{u}_i d\Sigma + \int_C M_i \bar{r}^i dC - \int_\Sigma Q_1^{*ij}(e) \bar{e}_{ij} dC = 0 \ ,$$

che è equivalente alle (3.5) non appena la si intenda valida per ogni scelta del vettore $\bar{u}$, solenoidale in C.

Se si ritiene inoltre $M_i = 0$ (caso simmetrico), la relazione che si ottiene, ritenuta valida per ogni vettore $\bar{u}$ solenoidale in C, è equivalente alle (3.7) e coincide con la relazione stabilita in [9], I, 2.

6. Corpi elastici: teorema della minima energia potenziale e sua inversione, teorema di unicità, teoremi di Clapeyron e di Betti.

Come si è visto al n. 4, dall'ipotesi che la configurazione C di riferimento sia intrinsecamente stabile segue che risulta

$$V = \int_C [Q_1(\bar{e}) + Q_2(\bar{\mu}')] dC \geqslant 0 \tag{6.1}$$

[38]) Ossia indipendente dalla configurazione attuale.

per ogni trasformazione isoterma che rispetti il vincolo di incomprimibilità, ossia per ogni scelta del vettore $\bar{\boldsymbol{u}}$, solenoidale in C, valendo il segno di eguaglianza soltanto quando $\bar{\boldsymbol{u}}$ corrisponde a uno spostamento rigido.

Posto

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{u}) = \int_C [Q_1(e) + Q_2(\mu')]dC - \int_C F^i u_i dC - \int_\Sigma f^i u_i d\Sigma - \tag{6.2}$$

$$- \int_C M_i r^i dC - \int_\Sigma m_i r^i d\Sigma$$

e indicato con $\mathcal{E}(\boldsymbol{v})$ ciò che diventa il funzionale $\mathcal{E}$ quando lo spostamento effettivo $\boldsymbol{u}$ viene sostituito con un qualunque spostamento virtuale $\boldsymbol{v}$, analogamente al caso simmetrico [39]) sussiste la relazione

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{u}) \leqslant \mathcal{E}(\boldsymbol{v}) \ , \tag{6.3}$$

cioè *ogni soluzione della* (5.1) *rende minimo, rispetto a ogni altro spostamento compatibile con il vincolo di incomprimibilità, il funzionale* $\mathcal{E}$.

Infatti, potendosi $\boldsymbol{v}$ sempre porre nella forma

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \bar{\boldsymbol{u}} \ ,$$

con $\bar{\boldsymbol{u}}$ spostamento virtuale, risulta, come agevolmente si può verificare,

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{v}) - \mathcal{E}(\boldsymbol{u}) = \int_C [Q_1(\bar{e}) + Q_2(\bar{\mu}')]dC + \int_C Q_1^{*ij}(e)\bar{e}_{ij} dC + \int_C Q_{2i}{}^j(\mu')\bar{\mu}'^i{}_j dC -$$

$$- \int_C F^i \bar{u}_i dC - \int_\Sigma f^i \bar{u}_i d\Sigma - \int_C M_i \bar{r}^i dC - \int_\Sigma m_i \bar{r}^i d\Sigma \ ,$$

ossia, in quanto $\bar{\boldsymbol{u}}$ è uno spostamento virtuale e $\boldsymbol{u}$ è soluzione della (5.1),

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{v}) - \mathcal{E}(\boldsymbol{u}) = \int_C [Q_1(\bar{e}) + Q_2(\bar{\mu}')]dC \ ,$$

---

[39]) Cfr., ad es., [10] pp. 202-204, dove il teorema è dimostrato nell'ipotesi che sistema in esame sia esente da vincoli interni.

relazione che, stante la (6.1), prova l'asserto e mette inoltre in evidenza che nella (6.3) il segno di eguaglianza vale se e soltanto se $\boldsymbol{v}$ differisce da $\boldsymbol{u}$ al più per uno spostamento rigido.

Come facilmente si può constatare, la (6.3) ha come conseguenza che *in corrispondenza a ogni sollecitazione si ha l'unicità della soluzione*, unicità che va naturalmente intesa a meno di uno spostamento rigido [40]).

Con un ragionamento identico a quello contenuto, ad es., in [10], pp. 205-206, si può infine provare che il teorema ora dimostrato si può invertire, nel senso che *se lo spostamento solenoidale* $\boldsymbol{u}$ *rende minimo il funzionale* $\mathcal{E}$, *allora* $\boldsymbol{u}$ *è soluzione della* (5.1). Resta così provata l'esistenza di una soluzione del problema dell'equilibrio elastico, subordinatamente alla condizione che esista uno spostamento solenoidale $\boldsymbol{u}$ minimizzante il funzionale $\mathcal{E}$.

* * *

Conformemente alla teoria classica, vien naturale assegnare la denominazione di *energia potenziale* al funzionale $\mathcal{E}$ in quanto il primo integrale che compare nella sua espressione (6.2) rappresenta ciò a cui si riduce nella teoria linearizzata il lavoro delle forze interne di contatto [41]), cambiato di segno, ossia l'energia V acquisita dal corpo nel passaggio dalla configurazione naturale a quella di equilibrio forzato, mentre i rimanenti integrali rappresentano l'energia potenziale corrispondente alla sollecitazione esterna (supposta vettorialmente invariabile e quindi senz'altro conservativa) nel passaggio dall'una all'altra delle due configurazioni.

* * *

Identificando nella relazione simbolica (5.1) lo spostamento virtuale $\overline{\boldsymbol{u}}$ nello spostamento effettivo $\boldsymbol{u}$ si ottiene, tenendo presente il teorema

---

[40]) Cfr. il n. 5.

[41]) Si ricordi la (2.12) e inoltre che V, non appena si tengano presenti i legami che limitano la variabilità di e_{ij}, $\mu'^{i}{}_{j}$, rappresenta l'opposto del lavoro delle forze interne di contatto nel passaggio da C a C' (cfr. [3], 9).

di Eulero sulle funzioni omogenee,

$$2\int_C [Q_1(e) + Q_2(\mu')]dC = \int_C F^i u_i dC + \int_\Sigma f^i u_i d\Sigma + \int_C M_i r^i dC + \int_\Sigma m_i r^i d\Sigma ,$$

ossia, indicando con $\mathfrak{L}$ il lavoro compiuto dalla sollecitazione esterna nel passaggio del sistema dalla configurazione C alla configurazione di equilibrio forzato, si ha il *teorema di Clapeyron* [42]), espresso dall'eguaglianza

$$V = \frac{1}{2}\mathfrak{L} ,$$

dove, secondo quanto prima osservato, V è l'energia potenziale immagazzinata dal corpo nel suddetto passaggio.

Oltre al teorema di Clapeyron, nell'attuale teoria si conserva immutato, nell'enunciato e nella dimostrazione, il *teorema di reciprocità di Betti* [43]).

A proposito di questi due teoremi è il caso di osservare che nella loro dimostrazione non interviene affatto la condizione (6.1), donde la conclusione che essi valgono anche nel caso in cui $\mathscr{C}$ sia *non elastico.*

7. Estensione del teorema di Menabrea.

Introdurrò a questo punto la restrizione che sia la forma quadratica Q_1 che la forma quadratica Q_2 siano definite positive, *intensificando* così la condizione di elasticità (6.1). In base a tale ipotesi è possibile dedurre dalle (2.20) e dalle (2.19), nelle quali si sostituisca la (2.23), le relazioni

$$(7.1) \qquad \begin{cases} e_{ij} = M^*_{pqij}(\pi\delta^{pq} - T^{(pq)}) , \\ \mu'^i{}_j = N^p{}_q{}^i{}_j(\chi\delta^q_p - L'_p{}^q) , \end{cases}$$

---

[42]) Per il caso simmetrico cfr., ad es., [10], pp. 215-216, dove il teorema è dimostrato nell'ipotesi che il sistema sia esente da vincoli interni.

[43]) Cfr., ad es., [10], pp. 216-217. Anche ora vale la stessa osservazione fatta alla nota precedente.

dove con $M^*_{\nu\alpha ij}$ e $N^{\nu}{}_{\alpha}{}^{i}{}_{j}$ ho indicato i coefficienti delle due forme quadratiche $2R_1$ e $2R_2$ reciproche rispettivamente di $2Q_1$ e $2Q_2$, coefficienti che, è ovvio, soddisfano alle stesse relazioni di simmetria a cui soddisfano i coefficienti di queste ultime.

Posto, per brevità,

$$M^*_{\nu\nu ij} = M^*_{ij} \, , \qquad M^*_{ii} = M^* \, ,$$

$$N^{\nu}{}_{\nu}{}^{i}{}_{j} = N^{i}{}_{j} \, , \qquad N^{i}{}_{i} = N \, ,$$

e ricordati i legami a cui sono soggette le e_{ij}, $\mu'^{i}{}_{j}$, dalle (7.1) seguono per gli incrementi π, χ le espressioni

$$\text{(7.2)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \pi &= \frac{M^*_{\nu\alpha} T^{(\nu\alpha)}}{M^*} \\ \chi &= \frac{N^{\nu}{}_{\alpha} L'_{\nu}{}^{\alpha}}{N} \, , \end{aligned} \right.$$

le quali, sostituite nelle (7.1) stesse e posto

$$\tilde{M}^*_{\nu\alpha ij} = M^*_{\nu\alpha ij} - \frac{M^*_{\nu\alpha} M^*_{ij}}{M^*} \, ,$$

$$\tilde{N}^{\nu}{}_{\alpha}{}^{i}{}_{j} = N^{\nu}{}_{\alpha}{}^{i}{}_{j} - \frac{N^{\nu}{}_{\alpha} N^{i}{}_{j}}{N} \, ,$$

permettono di tradurre le (7.1) nelle

$$\text{(7.3)} \qquad \left\{ \begin{aligned} e_{ij} &= - \tilde{M}^*_{\nu\alpha ij} T^{(\nu\alpha)} \, , \\ \mu'^{i}{}_{j} &= - \tilde{N}^{\nu}{}_{\alpha}{}^{i}{}_{j} L'_{\nu}{}^{\alpha} \, , \end{aligned} \right.$$

che lasciano ignorati gli incrementi π, χ.

Introdotte le due forme quadratiche [44])

$$\text{(7.4)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \tilde{R}_1(T) &= \frac{1}{2} \tilde{M}^*_{\nu\alpha rs} T^{(\nu\alpha)} T^{(rs)} \, , \\ \tilde{R}_2(L') &= \frac{1}{2} \tilde{N}^{\nu}{}_{\alpha}{}^{r}{}_{s} L'_{\nu}{}^{\alpha} L'_{r}{}^{s} \, , \end{aligned} \right.$$

[44]) È ovvio che nelle (7.4) T e L' stanno ad indicare gli argomenti di $\tilde{R}_1$ e $\tilde{R}_2$: pertanto non vanno confusi con gli invarianti lineari di T^{ij}, $L'_{i}{}^{j}$.

le (7.3) si abbreviano nelle

$$(7.3')\qquad \begin{cases} e_{ij} = -\tilde{R}^*_{1ij}\,, \\ \mu'^i{}_j = -\tilde{R}_2{}^i{}_j\,, \end{cases}$$

con il solito significato per i simboli $\tilde{R}^*_{1ij}$, $\tilde{R}_2{}^i{}_j$:

$$\tilde{R}^*_{1ij} = \frac{1}{2-\delta_{ij}}\,\frac{\partial \tilde{R}_1(T)}{\partial T^{(ij)}}\,, \qquad \tilde{R}_2{}^i{}_j = \frac{\partial \tilde{R}_2(L')}{\partial L'_i{}^j}\,.$$

E risulta inoltre

$$\tilde{M}^*_{pqrs} = \frac{1}{(2-\delta_{pq})(2-\delta_{rs})}\,\frac{\partial^2 \tilde{R}_1(T)}{\partial T^{(pq)}\partial T^{(rs)}}\,,$$

che, conformemente alle posizioni fatte al n. 2, giustifica l'apposizione dell'asterisco a M^*_{pqrs} [45]).

A differenza di R_1 e R_2, che sono definite positive, $\tilde{R}_1$ e $\tilde{R}_2$ *sono soltanto semidefinite positive.* Infatti risulta, come subito si verifica,

$$\tilde{M}^*_{pqrs}T^{(pq)}T^{(rs)} = M^*_{pqrs}\left(T^{(pq)} - \frac{M^*_{hk}T^{(hk)}}{M^*}\,\delta^{pq}\right)\left(T^{(rs)} - \frac{M^*_{ij}T^{(ij)}}{M^*}\,\delta^{rs}\right),$$

$$\tilde{N}^p{}_q{}^r{}_s L'_p{}^q L'_r{}^s = N^p{}_q{}^r{}_s\left(L'_p{}^q - \frac{N^h{}_k L'_h{}^k}{N}\,\delta^q_p\right)\left(L'_r{}^s - \frac{N^i{}_j L'_i{}^j}{N}\,\delta^s_r\right),$$

con la conseguenza che $\tilde{R}_1(T)$ e $\tilde{R}_2(L')$ si annullano quando risulta, rispettivamente,

$$T^{(pq)} - \frac{M^*_{hk}T^{(hk)}}{M^*}\,\delta^{pq} = 0\,,$$

$$L'_p{}^q - \frac{N^h{}_k L'_h{}^k}{N}\,\delta^q_p = 0\,,$$

ossia quando è

$$(7.5)\qquad T^{(pq)} = \tau\delta^{pq}\,, \qquad L'_p{}^q = \lambda\delta^q_p\,,$$

---

[45]) Analogamente, è giustificata l'apposizione dell'asterisco a M^*_{pqrs} in quanto è

$$M^*_{pqrs} = \frac{1}{(2-\delta_{pq})(2-\delta_{rs})}\,\frac{\partial^2 R_1(T-\pi)}{\partial(T^{(pq)} - \pi\delta^{pq})\,\partial(T^{(rs)} - \pi\delta^{rs})}\,.$$

con τ e λ scalari qualsiansi. In altri termini, $\tilde{R}_1$, $\tilde{R}_2$ *si annullano quando i due tensori* $T^{(pq)}$, $L'_p{}^q$ *sono isotropi.* Inoltre, essendo definite positive le due forme quadratiche R_1 e R_2, questo è l'unico caso in cui le due forme quadratiche $\tilde{R}_1$ e $\tilde{R}_2$ si annullano.

È infine anche il caso di ricordare il legame che intercorre fra le $\mu'^i{}_j$ e le e_{ij}, il quale, stanti le (7.3), impone che risulti

$$\tilde{N}^p{}_q{}^i{}_j L'_p{}^q = \eta^{ihk}\partial_h(\tilde{M}^*_{pqkj}T^{(pq)}) \,, \tag{7.6}$$

ecc.

* * *

Si pensi ora a una qualunque sollecitazione interna compatibile con quella esterna assegnata, prescindendo da ogni specificazione della natura e dello stato fisico del corpo in esame. In altri termini, i tensori degli sforzi e dei momenti che ad essa corrispondono, e che indicherò rispettivamente con Θ^{ij} e $\Lambda'_i{}^j$, andranno pensati soggetti unicamente alla condizione di soddisfare alle equazioni indefinite [46])

$$\left\{\begin{aligned} &\partial_j\Theta^{ij} = F^i \,, \\ &\partial_j\Lambda'_i{}^j = M_i + \eta_{ihk}\Theta^{[hk]} \,, \end{aligned}\right. \tag{7.7}$$

e alle corrispondenti condizioni al contorno

$$\left\{\begin{aligned} &\Theta^{ij}\nu_j = f^i \,, \\ &\Lambda'_i{}^j\nu_j = m_i \,. \end{aligned}\right. \tag{7.8}$$

Introdotto il funzionale

$$\mathcal{M}(\Theta, \Lambda') = \int_C [\tilde{R}_1(\Theta) + \tilde{R}_2(\Lambda')]dC \,,$$

dove il significato dei simboli è evidente, *sussiste, in corrispondenza a ogni*

[46]) Le (7.7), (7.8) si ottengono linearizzando le (1.3), (1.4) di [3], 1. $\theta^{[hk]}$ è la parte emisimmetrica del tensore θ^{hk}.

possibile scelta dei tensori Θ^{ij}, $\Lambda'_i{}^j$, *la relazione*

$$\mathcal{M}(\Theta,\ \Lambda') \geqslant \mathcal{M}(T,\ L')\ , \tag{7.9}$$

ove, è ovvio, $\mathcal{M}(T,\ L')$ è il valore assunto da $\mathcal{M}(\Theta, \Lambda')$ in corrispondenza alla sollecitazione interna effettiva.

Infatti, posto

$$\overline{\Theta}^{ij} = \Theta^{ij} - T^{ij}\ , \qquad \overline{\Lambda}'_i{}^j = \Lambda'_i{}^j - L'_i{}^j\ ,$$

risulta

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(\Theta, \Lambda') &- \mathcal{M}(T,\ L') = \\
&= \int_C [\widetilde{R}_1(\overline{\Theta} + T) + \widetilde{R}_2(\overline{\Lambda}' + L')]dC - \int_C [\widetilde{R}_1(T) + \widetilde{R}_2(L')]dC = \\
&= \int_C [\widetilde{R}_1(\overline{\Theta}) + \widetilde{R}_2(\overline{\Lambda}')]dC + \\
&\qquad + \int_C (\widetilde{M}^*_{pqrs} T^{(pq)} \overline{\Theta}^{(rs)} + \widetilde{N}^p{}_q{}^r{}_s L'_p{}^q \overline{\Lambda}'_r{}^s)dC\ ,
\end{aligned}$$

ossia, ricordando le (7.3),

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(\Theta,\ \Lambda') &- \mathcal{M}(T,\ L') = \\
&= \int_C [\widetilde{R}_1(\overline{\Theta}) + \widetilde{R}_2(\overline{\Lambda}')]dC - \int_C (e_{ij}\overline{\Theta}^{(ij)} + \mu'^i{}_j \overline{\Lambda}'_i{}^j)dC\ .
\end{aligned} \tag{7.10}$$

Ricordate le (2.3′), le seconde delle (2.7) e tenuta presente la simmetria di $\Theta^{(ij)}$, tramite l'applicazione della formula di Green si ottiene per il secondo integale che compare a secondo membro

$$\begin{aligned}
\int_C (e_{ij}\overline{\Theta}^{(ij)} &+ \mu'^i{}_j \overline{\Lambda}'_i{}^j)dC = \\
&= -\int_C \partial_j \overline{\Theta}^{(ij)} u_i dC - \int_C \partial_j \overline{\Lambda}'_i{}^j r^i dC - \\
&- \int_\Sigma \overline{\Theta}^{(ij)} u_i \nu_j d\Sigma - \int_\Sigma \overline{\Lambda}'_i{}^j r^i \nu_j d\Sigma\ .
\end{aligned} \tag{7.11}$$

D'altra parte, essendo i tensori Θ^{ij}, $\Lambda'_i{}^j$, come i tensori T^{ij}, $L'_i{}^j$, soluzioni delle (7.7), (7.8), i tensori $\overline{\Theta}^{ij}$, $\overline{\Lambda}'_i{}^j$ soddisfano alle

$$(7.12)\qquad \begin{cases} \partial_j \overline{\Theta}^{ij} = 0 \ , \\ \partial_j \overline{\Lambda}'_i{}^j = \eta_{ihk} \overline{\Theta}^{[hk]} \ , \end{cases}$$

$$(7.13)\qquad \begin{cases} \overline{\Theta}^{ij} \nu_j = 0 \ , \\ \overline{\Lambda}'_i{}^j \nu_j = 0 \ , \end{cases}$$

con la conseguenza che, ricordate le (2.6) e tenuta presente l'identità

$$(7.14)\qquad \eta^{ipq}\eta_{ihk} = \delta^p_h \delta^q_k - \delta^q_h \delta^p_k \ ,$$

per il secondo integrale che compare a secondo membro della (7.11) risulta

$$\int_C \partial_j \overline{\Lambda}'_i{}^j r^i dC = \int_C \partial_i u_j \overline{\Theta}^{[ij]} dC = - \int_C \partial_j u_i \Theta^{[ij]} dC \ ,$$

ossia, applicando la formula di Green,

$$\int_C \partial_j \overline{\Lambda}'_i{}^j r^i dC = \int_C \partial_j \overline{\Theta}^{[ij]} u_i dC + \int_\Sigma \overline{\Theta}^{[ij]} u_i \nu_j d\Sigma \ .$$

La (7.11) pertanto si scrive

$$\int_C (e_{ij} \overline{\Theta}^{(ij)} + \mu'^i{}_j \overline{\Lambda}'_i{}^j) dC = - \int_C \partial_j \overline{\Theta}^{ij} u_i dC - \int_\Sigma \overline{\Theta}^{ij} u_i \nu_j d\Sigma - \int_\Sigma \overline{\Lambda}'_i{}^j r^i \nu_j d\Sigma$$

che, ricordate le prime delle (7.12) e le (7.13), si riduce a

$$\int_C (e_{ij} \overline{\Theta}^{(ij)} + \mu'^i{}_j \overline{\Lambda}'_i{}^j) dC = 0 \ .$$

La (7.10) si riduce quindi, in definitiva, a

$$(7.15)\qquad \mathcal{M}(\Theta,\ \Lambda') - \mathcal{M}(T,\ L') = \int_C [\widetilde{R}_1(\overline{\Theta}) + \widetilde{R}_2(\overline{\Lambda}')] dC,$$

la quale, ricordato che le due forme quadratiche $\tilde{R}_1$ e $\tilde{R}_2$ sono semidefinite positive, esprime proprio che risulta verificata la (7.9).

Inoltre, ricordato quanto in precedenza osservato circa le due forme quadratiche $\tilde{R}_1$ e $\tilde{R}_2$, dalla (7.15) segue che *nella* (7.9) *vale il segno di eguaglianza quando e soltanto quando i due tensori* $\bar{\Theta}^{(ij)}$ *e* $\bar{\Lambda}'_i{}^j$ *risultano isotropi.*

In tal caso le equazioni (7.12), (7.13) si specificano nelle

$$(7.16) \qquad \begin{cases} \partial_i\bar{\tau} + \partial_j\bar{\Theta}^{[ij]} = 0 \,, \\ \partial_i\bar{\lambda} = \eta_{ihk}\bar{\Theta}^{[hk]} \,, \end{cases}$$

$$(7.17) \qquad \begin{cases} \bar{\tau}\nu_i + \bar{\Theta}^{[ij]}\nu_j = 0 \,, \\ \bar{\lambda}\nu_i = 0 \,, \end{cases}$$

con evidente significato di $\bar{\tau}$ e $\bar{\lambda}$. Dalle seconde delle (7.16), ricordate le (7.14), si deduce

$$(7.18) \qquad \bar{\Theta}^{[ij]} = \frac{1}{2}\eta^{ijl}\partial_l\bar{\lambda} \,,$$

con la conseguenza che le prime delle (7.16) si riducono a

$$\partial_i\bar{\tau} = 0 \,,$$

esprimenti la costanza di $\bar{\tau}$ in C, e le prime delle (7.17) a

$$\bar{\tau}\nu_i = 0$$

in quanto, essendo, per le seconde delle (7.17), $\bar{\lambda} = 0$ su Σ, grad $\bar{\lambda}$ è ortogonale a Σ ed è quindi nulla l'espressione $\eta^{ijl}\nu_j\partial_l\bar{\lambda}$, esprimente $\boldsymbol{\nu} \wedge$ grad $\bar{\lambda}$. Si può pertanto concludere che $\bar{\tau}$ *è nullo in tutto* C, ossia che *i due tensori* Θ^{ij}, T^{ij} *hanno la stessa parte simmetrica e differiscono, al più, per la loro parte emisimmetrica.* Invece *i due tensori* $\Lambda'_i{}^j$, $L'_i{}^j$ *differiscono, al più, per un tensore isotropo,* $\bar{\lambda}\delta_i^j$, *nullo su* Σ. Inoltre *il gradiente di* $\bar{\lambda}$ *fornisce,* tramite le (7.18), *il tensore* (*emisimmetrico*) *differenza fra* Θ^{ij} *e* T^{ij}.

La conclusione delle considerazioni ora svolte è quindi la seguente:

la sollecitazione interna effettiva è tra quelle (compatibili con la sollecitazione esterna) che minimizzano il funzionale $\mathcal{M}$. *Data una qualunque di queste e indicati con* Θ^{ij}, $\Lambda'_i{}^j$ *i corrispondenti tensori, ogni altra sollecitazione (compatibile con quella esterna) che minimizza il suddetto funzionale ha i corrispondenti tensori* $\tilde{\Theta}^{ij}$, $\tilde{\Lambda}'_i{}^j$ *dati da*

$$(7.19)\qquad \begin{cases} \tilde{\Theta}^{ij} = \Theta^{ij} + \dfrac{1}{2}\eta^{ijl}\partial_l\tilde{\lambda}\,, \\ \tilde{\Lambda}'_i{}^j = \Lambda'_i{}^j + \tilde{\lambda}\delta_i^j\,, \end{cases}$$

con $\tilde{\lambda}$ *funzione scalare soggetta all'unica condizione di annullarsi su* Σ. In altri termini *due sollecitazioni qualsiansi* [47]) *minimizzanti il funzionale* $\mathcal{M}$ *hanno i tensori dei momenti che differiscono unicamente per un tensore isotropo,* $\tilde{\lambda}\delta_i^j$, *(nullo su* Σ*), ossia hanno le due parti puramente lavoranti di detti tensori coincidenti, e i tensori degli sforzi che differiscono unicamente per la parte emisimmetrica, tale differenza risultando data dalla metà del tensore aggiunto di* grad $\tilde{\lambda}$ (ossia dalla metà del tensore che si ottiene moltiplicando internamente il tensore di Ricci per grad $\tilde{\lambda}$).

In ciò consiste una *prima estensione del teorema di Menabrea.* Nella sua enunciazione attuale il teorema si diversifica da quello classico in quanto, come si è visto, la sollecitazione che minimizza il funzionale $\mathcal{M}$ non è più unica.

Come agevolmente si può constatare, l'enunciato attuale si conserva immutato anche nel caso in cui il corpo elastico $\mathcal{C}$ non sia soggetto al vincolo interno di incomprimibilità.

* * *

In una teoria ove si supponga necessariamente nullo il tensore dei momenti interni di contatto, non si ha, ovviamente, l'intervento delle forme quadratiche R_2 e $\tilde{R}_2$ e la (7.15) si riduce a

$$\mathcal{M}(\Theta) - \mathcal{M}(T) = \int_C \tilde{R}_1(\bar{\Theta})dC\ ,$$

---

[47]) Naturalmente compatibili con quella esterna assegnata.

ossia a

$$\mathcal{M}(\Theta) \geqslant \mathcal{M}(T) \ ,$$

dove vale il segno di eguaglianza unicamente quando il tensore Θ^{ij} *coincide con il tensore* T^{ij}, come subito si ottiene dalle (7.16), (7.17), non appena si ricordi che, per l'ipotesi fatta, è $\overline{\lambda} = 0$ in tutto C.

Si può quindi concludere che *in una teoria ove si suppongano nulli i momenti interni di contatto il teorema di Menabrea conserva il suo enunciato originario.*

* * *

Qualora si introduca, accanto alla Q_2, la forma quadratica Q_3, definita, prescindendo dal legame (1.6), da

$$Q_3(\mu') = \frac{1}{2}\,(C_p{}^q{}_r{}^s - \chi_p{}^{q(0)}\delta_r^s - \chi_r{}^{s(0)}\delta_p^q)\mu'^p{}_q\mu'^r{}_s\,, \tag{7.20}$$

le (2.19), ossia le (2.26), si scrivono semplicemente, ricordando la convenzione introdotta al n. 5,

$$L'_i{}^j = -\,Q_{3i}{}^j(\mu') \ , \tag{7.21}$$

nelle quali, naturalmente, va ora tenuto presente il legame a cui sono soggette le $\mu'^i{}_j$.

È evidente che, non appena si tenga presente il suddetto legame, in tutte le espressioni sino ad ora scritte si può sostituire materialmente alla Q_2 e alle sue derivate $Q_{2i}{}^j$ la Q_3 e le sue derivate $Q_{3i}{}^j$ e porre $\chi = 0$ nelle espressioni in cui questo compare (vale a dire nelle (2.26), (3.2), (3.3)).

Ciò premesso, accanto all'ipotesi che sia definita positiva la forma quadratica Q_1, introdurrò l'ipotesi che sia definita positiva addirittura la forma quadratica Q_3. Ciò implica che risulti positiva la Q_2 almeno in corrispondenza a ogni scelta dei suoi argomenti (formata da valori non tutti nulli) che soddisfi alla (1.6).

In base all'ipotesi ora fatta, è possibile risolvere, in modo univoco, le (7.21), ossia le (2.19), rispetto alle $\mu'^i{}_j$, ottenendosi

$$\mu'^i{}_j = -\,S^p{}_q{}^i{}_j L'_p{}^q \ , \tag{7.22}$$

dove con $S^{p}{}_{q}{}^{i}{}_{j}$ ho indicato i coefficienti della forma quadratica $2R_3$ reciproca della $2Q_3$, coefficienti che, ovviamente, soddisfano alle stesse relazioni di simmetria di quest'ultima.

Intendendo, al solito, $S^{p}{}_{q} = S^{p}{}_{q}{}^{i}{}_{i}$, la (1.6) e le (7.22) implicano

$$S^{p}{}_{q} L'{}_{p}{}^{q} = 0 \ ,$$

da cui si deduce che l'ipotesi che Q_3 sia definita positiva esclude per il tensore $L'{}_{i}{}^{j}$ della sollecitazione interna effettiva la possibilità di essere isotropo, nel senso che se esso è isotropo deve necessariamente essere nullo.

Introdotto il funzionale

$$\mathcal{N}(\Theta, \Lambda') = \int_C [\tilde{R}_1(\Theta) + R_3(\Lambda')] dC \ ,$$

dove, al solito, i tensori Θ^{ij}, $\Lambda'{}_{i}{}^{j}$ sono soluzioni delle (7.7), (7.8), *sussiste, in corrispondenza a ogni possibile scelta di detti tensori, la relazione*

$$\mathcal{N}(\Theta, \Lambda') \geqslant \mathcal{N}(T, L') \ , \tag{7.23}$$

dove, è evidente, $\mathcal{N}(T, L')$ è il valore assunto da $\mathcal{N}(\Theta, \Lambda')$ in corrispondenza alla sollecitazione interna effettiva.

La dimostrazione dell'asserto è in tutto identica a quella data per provare la (7.9) e porta alla relazione

$$\mathcal{N}(\Theta, \Lambda') - \mathcal{N}(T, L') = \int_C [\tilde{R}_1(\bar{\Theta}) + R_3(\bar{\Lambda}')] dC \ , \tag{7.24}$$

con, al solito,

$$\bar{\Theta}^{ij} = \Theta^{ij} - T^{ij} \ , \qquad \bar{\Lambda}'{}_{i}{}^{j} = \Lambda'{}_{i}{}^{j} - L'{}_{i}{}^{j} \ .$$

Ricordando quanto osservato circa la forma quadratica semidefinita positiva $\tilde{R}_1$, dalla (7.24) e dalle (7.12), (7.13) si deduce pressochè immediatamente che *nella* (7.23) *vale il segno di eguaglianza quando e soltanto quando i due tensori* Θ^{ij}, $\Lambda'{}_{i}{}^{j}$ *coincidono rispettivamente con i tensori* T^{ij}, $L'{}_{i}{}^{j}$.

Si ha quindi la conclusione che *la sollecitazione interna compatibile* *con quella esterna e minimizzante il funzionale $\mathcal{N}$ è unica e coincide con quella effettiva.*

È questa una *seconda estensione del teorema di Menabrea.* Essa, a differenza della precedente, conserva al teorema il suo enunciato originario, salvo, beninteso, la sostituzione del funzionale che interviene nel caso classico con il funzionale $\mathcal{N}$.

In proposito però è il caso di ricordare che, mentre la prima estensione è stata ottenuta imponendo alla Q_2, oltre che alla Q_1, di essere definita positiva, la seconda estensione è stata ottenuta imponendo detta condizione, invece che alla Q_2, alla Q_3, ossia mediante una restrizione che appare più forte della precedente. Inoltre nella prima estensione, analogamente al caso classico, interviene unicamente, tramite il funzionale $\mathcal{M}$, il potenziale isotermo, mentre nella seconda, oltre a quest'ultimo, vi è pure l'intervento dell'incremento χ.

* * *

Nel caso in cui risulti nullo l'incremento χ, la forma quadratica Q_3 si riduce alla Q_2, la $\tilde{R}_2$ alla R_2, che è definita positiva, e la prima estensione del teorema di Menabrea viene a coincidere con la seconda. In altri termini, *nell'ipotesi che risulti nullo l'incremento χ, la sollecitazione interna compatibile con quella esterna e minimizzante il funzionale $\mathcal{M}$ è unica e coincide con quella effettiva.*

Anche ora, in conseguenza dell'ipotesi che Q_2 sia definita positiva, il tensore $L'_i{}^j$ non può essere isotropo (a meno che non sia nullo).

8. Corpi isotropi.

Per quanto visto al n. 2, la natura di $\mathscr{C}$ è completamente specificata dalla forma quadratica $Q(e, \mu') = Q_1(e) + Q_2(\mu')$ — che, stanti la (2.12) e la (2.10) fornisce l'espressione linearizzata del potenziale isotermo — e dalla forma lineare $\chi(\mu')$, ossia dai 66 coefficienti $A^{*pqrs} + p^{(0)}\delta^{pr}\delta^{qs}$, $C_p{}^q{}_r{}^s$ e dai 9 coeifficienti $\chi_i{}^{j(0)}$, coefficienti per la cui determinazione è necessario fare ricorso all'esperienza.

Il problema della determinazione sperimentale di Q e di χ si semplifica notevolmente se accade che $\mathscr{C}$ sia isotropo in C, perchè in tale caso il numero di coefficienti occorrenti per individuare la Q si riduce a tre, mentre risulta

$$\chi(\mu') = 0 \,. \tag{8.1}$$

Infatti, in tali ipotesi, dovendo i tensori $A^{*pqrs} + p^{(0)}\delta^{pr}\delta^{qs}$, $C_p{}^q{}_r{}^s$, $\chi_i{}^{j(0)}$ risultare isotropi, si ha [48])

$$A^{*pqrs} + p^{(0)}\delta^{pr}\delta^{qs} = \alpha_0\delta^{pq}\delta^{rs} + \alpha_1\delta^{pr}\delta^{qs} + \alpha_2\delta^{ps}\delta^{qr} \,,$$

$$C_p{}^q{}_r{}^s = \gamma_0\delta_p^q\delta_r^s + \gamma_1\delta_{pr}\delta^{qs} + \gamma_2\delta_p^s\delta_r^q \,,$$

$$\chi_i{}^{j(0)} = \alpha\delta_i^j \,,$$

sicchè, conservando naturalmente le convenzioni introdotte al n. 5 e ricordate la (2.11′), la (2.8′) e la (2.9′), la $Q(e, \mu')$ assume la forma

$$Q(e, \mu') = \frac{E}{3}\, e_{pq}e_{pq} + \frac{1}{2}\,(\gamma_1\mu'^p{}_q + \gamma_2\mu'^q{}_p)\mu'^p{}_q \,, \tag{8.2}$$

ove ho posto

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = \frac{E}{3} \,,$$

mentre la (2.23) si riduce alla (8.1) [49]): *nel caso isotropo l'incremento* χ *va senz'altro ritenuto nullo.*

Stante la (8.2), e conformemente a quanto si intendeva provare, *la forma quadratica* $Q(e, \mu')$ *risulta completamente individuata non appena si conoscano i tre coefficienti* E, γ_1, γ_2. In particolare, la forma quadratica $Q_1(e)$ è individuata non appena si conosca il coefficiente E:

$$Q_1(e) = \frac{E}{3}\, e_{pq}e_{pq} \,. \tag{8.3}$$

---

[48]) Cfr. [2], pp. 98-100.

[49]) È ovvio che detto risultato vale anche nel caso dei sistemi esenti da vincoli interni.

E anzi, avendosi, nel caso incomprimibile,

$$e_{pq}e_{pq} = -2I_2e \,, \tag{8.4}$$

ove con I_2e ho indicato l'invariante secondo della matrice $\| e_{ij} \|$, risulta

$$Q_1(e) = -2\frac{E}{3} I_2e \,, \tag{8.3'}$$

da cui si deduce che, analogamente al caso simmetrico [50]), *il coefficiente* $\frac{E}{3}$ *coincide con il secondo coefficiente di Lamé*, [51]):

$$\frac{E}{3} = \mu \,. \tag{8.5}$$

E è il *modulo di elasticità normale.*

Con l'espressione di $Q_1(e)$ data dalla (8.3), le (2.25) si esplicitano nelle

$$T^{(ij)} = -\frac{2}{3} E e_{ij} + \pi\delta^{ij} \,, \tag{8.6}$$

identiche, com'è naturale, a quelle del caso simmetrico [52]).

Dalle (8.6), ricordate le (2.8'), segue

$$\pi = \frac{1}{3} T^{(ii)} = \frac{T}{3} \,, \tag{8.7}$$

ossia *l'incremento di pressione* π *è eguale a un terzo dell'invariante lineare del tensore degli sforzi.*

La (8.7), sostituita nelle (8.6), permette di dedurre le relazioni:

$$e_{ij} = -\frac{3}{2E} \overline{T^{(ij)}}$$

ossia, per le prime delle (1.7),

$$e_{ij} = -\frac{3}{2E} T^{(1)ij} : \tag{8.8}$$

---

[50]) Cfr. [8], III, 6.
[51]) Cfr. [10], p. 192.
[52]) Cfr. [8], III, 6.

nel caso isotropo il tensore di deformazione differisce unicamente per il fattore $-\dfrac{3}{2E} = -\dfrac{1}{2\mu}$ *dal tensore esprimente la parte puramente lavorante del tensore degli sforzi*, risultato che, ovviamente, vale anche nel caso simmetrico.

L'espressione di $Q_2(\mu')$, stante la (8.2), è ora data da

$$Q_2(\mu') = \frac{1}{2}\,(\gamma_1 \mu'^p{}_q + \gamma_2 \mu'^q{}_p)\mu'^p{}_q\,, \tag{8.9}$$

con la conseguenza che, ricordata la (8.1), le (2.26) si esplicitano nelle

$$L'_i{}^j = -\,\gamma_1 \mu'^i{}_j - \gamma_2 \mu'^j{}_i\,, \tag{8.10}$$

da cui si deduce, com'è ormai ovvio, che *nel caso isotropo il tensore* $L'_i{}^j$ *è a invariante lineare nullo.* In altri termini, stanti le seconde delle (1.7), si ha che *il tensore* $L'_i{}^j$ *coincide con la sua parte puramente lavorante* [53]).

Dalle (8.10), supposto $|\gamma_1| \neq |\gamma_2|$, seguono le

$$\mu'^i{}_j = -\,\frac{\gamma_1 L'_i{}^j - \gamma_2 L'_j{}^i}{(\gamma_1)^2 - (\gamma_2)^2} \tag{8.11}$$

Invece, *se risulta* $\gamma_1 = \gamma_2$, *oppure* $\gamma_1 = -\gamma_2$, *il tensore* $L'_i{}^j$ *risulta simmetrico nel primo caso, emisimmetrico nel secondo e il tensore* $\mu'^i{}_j$ *ha nel primo caso la parte simmetrica e nel secondo la emisimmetrica che differisce da* $L'_i{}^j$ *unicamente per il fattore* $-\dfrac{1}{2\gamma_1}$.

Infine, tenuto presente che risulta [54])

$$\mu'^i{}_j = \eta^{ihk}\partial_h e_{kj}$$

e supposto $\mathscr{C}$, oltre che isotropo, omogeneo in C, dalle (8.8), (8.10) si

---

[53]) È ovvio che vale la stessa osservazione fatta alla nota [49]).

[54]) Cfr. la (1.5).

deduce che fra i due tensori $T^{(l)ij}$, $L'^{(l)j}_{i} \equiv L'_{i}{}^{j}$ intercorrono le relazioni

$$(8.12) \qquad \gamma_1 \eta_{ihk} \partial_h T^{(l)kj} + \gamma_2 \eta_{jhk} \partial_h T^{(l)ki} = 2\mu L'_{i}{}^{j} ,$$

dove, scrivendole, si è tenuta presente la (8.5). Esse sono le corrispondenti delle (7.6).

* * *

È evidente che nel caso dei corpi isotropi i teoremi della minima energia potenziale, di Clapeyron, di Betti, ecc. si conservano immutati nel loro enunciato.

Per quanto concerne il teorema di Menabrea, risultando nel presente caso nullo l'incremento χ, esso conserva il suo enunciato originario, come si è visto alla fine del n. 7.

In proposito è il caso di osservare che la forma quadratica Q_2 è definita positiva quando (e soltanto quando) risulta [55] $\gamma_1 > |\gamma_2|$, che la forma quadratica R_2 è data da

$$R_2(L') = \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma_1}{(\gamma_1)^2 - (\gamma_2)^2} L'_{p}{}^{q} - \frac{\gamma_2}{(\gamma_1)^2 - (\gamma_2)^2} L'_{q}{}^{p}\right) L'_{p}{}^{q} ,$$

come subito segue dalle (8.11), nelle quali presentemente si vengono ad identificare le seconde delle (7.1) e le (7.22), ecc.

I coefficienti $N^{p}{}_{q}{}^{r}{}_{s}$ risultano espressi da

$$N^{p}{}_{q}{}^{r}{}_{s} = \frac{\gamma_1}{(\gamma_1)^2 - (\gamma_2)^2} \delta^{p}_{r} \delta^{s}_{q} - \frac{\gamma_2}{(\gamma_1)^2 - (\gamma_2)^2} \delta^{p}_{s} \delta^{r}_{q}$$

e risulta

$$N^{p}{}_{q} = \frac{1}{\gamma_1 + \gamma_2} \delta^{p}_{q} ,$$

ecc.

* * *

Introdotta l'ipotesi che il sistema sia, oltre che isotropo, omogeneo in C, le (3.1), (3.3) diventano, tenendo presente la (8.3), la (8.9), la (8.5)

---

[55]) Infatti quando (e soltando quando) è $\gamma_1 > |\gamma_2|$ risultano positivi i minori principali estratti della matrice dei coefficienti della Q_2.

e, ovviamente, la (2.8),

$$(8.13)\qquad \begin{cases} \mu\Delta_2 u^i - \dfrac{\gamma_1}{4}\Delta_2\Delta_2 u^i = \partial_i\pi - F^i - \dfrac{1}{2}\eta^{ihk}\partial_h M_k\,, \\ \gamma_1\Delta_2 r_i + M_i = -\,2T_i\,, \end{cases}$$

che, con le condizioni al contorno, dedotte dalle (3.2),

$$(8.14)\qquad \begin{cases} 2\mu e_{ij}\nu_j + \dfrac{1}{2}\gamma_1\eta^{ihk}\nu_h\Delta_2 r_k = \pi\nu_i - f^i - \dfrac{1}{2}\eta^{ihk}\nu_h M_k\,, \\ m_i + (\gamma_1\partial_j r_i + \gamma_2\partial_i r_j)\nu_j = 0\,, \end{cases}$$

rappresentano le equazioni fondamentali della statica isoterma linearizzata dei corpi incomprimibili a trasformazioni reversibili, omogenei e isotropi in C.

Dalle (3.4) si deducono poi le relazioni

$$(8.15)\qquad \begin{cases} T^{i+1\ i+2} = -\dfrac{1}{2}M_i - \dfrac{\gamma_1}{2}\Delta_2 r_i - 2\mu e_{i+1\ i+2}\,, \\ T^{i+2\ i+1} = \dfrac{1}{2}M_i + \dfrac{\gamma_1}{2}\Delta_2 r_i - 2\mu e_{i+1\ i+2}\,, \\ T^{ii} = \pi - 2\mu e_{ii} \end{cases}$$

nelle ultime delle quali non va naturalmente sommato rispetto all'indice ripetuto i.

* * *

In una teoria ove si suppongano necessariamente nulle le $L'_i{}^j$, le equazioni generali, con le rispettive condizioni al contorno, si riducono alle

$$(8.16)\qquad \begin{cases} \mu\Delta_2 u^i = \partial_i\pi - F^i - \dfrac{1}{2}\eta^{ihk}\partial_h M_k\,, \\ 2\mu e_{ij}\nu_j = \pi\nu_i - f^i - \dfrac{1}{2}\eta^{ihk}\nu_h M_k\,, \end{cases}$$

che si possono d'altra parte direttamente ottenere dalle (3.5) e che dàn luogo a quelle del caso simmetrico qualora si supponga anche $M_i = 0$.

Ed è infine

$$
(8.17) \qquad \begin{cases} T^{i+1\ i+2} = -\dfrac{1}{2} M_i - 2\mu e_{i+1\ i+2} , \\[2ex] T^{i+2\ i+1} = \dfrac{1}{2} M_i - 2\mu e_{i+1\ i+2} , \\[1ex] T^{ii} = \pi - 2\mu e_{ii} , \end{cases}
$$

con la solita osservazione per l'indice ripetuto i, relazioni che non differiscono dalle (8.8), (8.7) nel caso in cui si supponga anche $M_i = 0$.

9. Osservazione.

Qualora per $\mathscr{C}$ si abbandoni l'ipotesi della incomprimibilità, non si ha più nelle varie relazioni scritte l'intervento del parametro p e quindi dell'incremento π [56]). La funzione [57]) $Z(e, \mu')$ definita dalla (1.8) diventa

$$
(9.1) \qquad Z(e, \mu') = W(e, \mu') - q^{(0)}\mu'^{i}{}_{i} ,
$$

ecc. Gli spostamenti virtuali sono dati da spostamenti infinitesimi qualsiansi e la relazione simbolica (1.23), ritenuta valida per ogni spostamento infinitesimo, è perfettamente equivalente alle equazioni fondamentali... [58]).

Per quanto concerne il parametro q e l'incremento χ tutto quanto è stato osservato si conserva immutato, con la conseguenza che, anche ora, come è già stato osservato, nel caso linearizzato il potenziale isotermo si spezza nella somma di due funzioni (forme quadratiche), una nelle sole e_{ij}, l'altra nelle sole $\mu'^{i}{}_{j}$. χ si può senz'altro ritenere anche ora funzione soltanto di queste ultime e le analoghe delle (2.25), (2.26) si scrivono esplicitamente

$$
(9.2) \qquad T^{(ij)} = - A^{*pqij} e_{pq} ,
$$

$$
(9.3) \qquad L'_{i}{}^{j} = - C_{p}{}^{q}{}_{i}{}^{j} \mu'^{p}{}_{q} + \chi \delta^{j}_{i} ,
$$

---

[56]) Si osservi però, in proposito, che non tutte le relazioni scritte si trasportano al caso dei sistemi esenti da vincoli interni semplicemente sopprimendo in esse l'incremento π o le sue derivate, in quanto per tali sistemi non vale più la (1.1) e, conseguentemente, la (2.8'). L'osservazione vale, in particolare, per le equazioni (8.14), (8.16).

[57]) Si ricordi quanto convenuto alla nota [26]).

[58]) Non si dimentichi, in proposito, quanto osservato alla nota [56]).

nelle quali si è tenuta presente la convenzione introdotta all'inizio del n. 5. Esse, in conseguenza di quanto si è osservato circa l'espressione del potenziale isotermo e l'incremento χ, semplificano le analoghe stabilite per il caso linearizzato da Grioli [59]), da Aero e Kuvshinskii [60]), Mindlin e Tiersten [61]) (che sostanzialmente coincidono con quelle stabilite da Grioli) e *provano che nelle espressioni delle $T^{(ij)}$ stabilite da tali Autori sono nulli i coefficienti delle $\mu'^{p}{}_{q}$ e in quelle delle $L'_i{}^j$ sono nulli i coefficienti delle e_{pq}.*

Immutati si conservano, negli enunciati e nelle dimostrazioni, i teoremi della minima energia potenziale, di Clapeyron, di reciprocità, ecc. In particolare si conservano le estensioni date dal teorema di Menabrea.

Nel caso dei corpi isotropi, non valendo più la (2.8′), la forma quadratica $Q_1(e)$ avrà una diversa espressione [62]), identica però ancora a quella che si ottiene nel caso simmetrico, ecc. Invece, per quanto concerne l'incremento χ, la forma quadratica $Q_2(\mu')$ e i tensori $L'_i{}^j$, $\mu'^i{}_j$, i risultati stabiliti permangono immutati, come già si è detto. In particolare, χ va senz'altro ritenuto nullo, $L'_i{}^j$ coincide con la sua parte puramente lavorante, le relazioni (9.3) si riducono alle (8.10), che si presentano diverse dalle analoghe stabilite da Mindlin e Tiersten [63]) in quanto nelle relazioni dovute a detti Autori compare un'indeterminazione di cui non v'è traccia nelle (8.10).

BIBLIOGRAFIA

[1] Aero E. L., Kuvshinskii E. V.: *Fundamental equations of the theory of elastic media with rotationally interacting particles.* Fizika Tverdogo Tela, Vol. II (1960), pp. 1399-1409; trad. in Soviet Physics Solid State, Vol. II (1961), pp. 1272-1281.

[2] Finzi B., Pastori M.: *Calcolo tensoriale e applicazioni,* Bologna, Zanichelli, 1949.

---

[59]) Cfr. [6], II, 2.
[60]) Cfr. [1].
[61]) Cfr. [7], 3.
[62]) Cfr. [6], II, 2, 3.
[63]) Cfr. [7], 3.

[3] GALLETTO D.: *Sistemi incomprimibili a trasformazioni reversibili nel caso asimmetrico* (Parte prima), Rend. del Sem. Mat. Univ. di Padova, Vol. XXXVI (1966), pp. 243-276.

[4] GALLETTO D.: *Contributo allo studio dei sistemi continui a trasformazioni reversibili con caratteristiche di tensione asimmetriche*, Rend. del Sem. Mat. Univ. di Padova, Vol. XXXV (1965), pp. 299-334.

[5] GALLETTO D.: *Sull'unicità in presenza di vincoli interni di una condizione cinematica fondamentale nella teoria delle deformazioni finite*, Atti dell'Ist. Veneto di Sc. Lett. e Arti, Classe di Sc. Mat. e Nat., t. CXXIII (1965), pp. 197-206.

[6] GRIOLI G.: *Elasticità asimmetrica*, Ann. di Mat., s. IV, Vol. L (1960), pp. 389-417.

[7] MINDLIN R. D., TIERSTEN H. F.: *Effects of Couple-stresses in Linear Elasticity*, Arch. for Rat. Mech. and Analysis, Vol. XI (1962), pp. 415-448.

[8] SIGNORINI A.: *Questioni di elasticità non linearizzata e semilinearizzata*, Rend. di Mat. Univ. di Roma, s. V, Vol. XVIII (1959), pp. 95-139.

[9] SIGNORINI A.: *Trasformazioni termoelastiche finite*, Mem. 3ª, Ann. di Mat., s. IV, Vol. XXXIX (1955), pp. 147-201.

[10] SIGNORINI A.: *Lezioni di fisica matematica*, anno acc. 1952-53, Roma, Veschi (litografie).

Manoscritto pervenuto in redazione il 30 novembre 1965.