Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Willi Sudbrock

Sylowfunktionen in endlichen Gruppen

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 36, nº 1 (1966), p. 158-184
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1966__36_1_158_0>

SYLOWFUNKTIONEN IN ENDLICHEN GRUPPEN

di WILLI SUDBROCK (*Frankfurt a. M.*) *)

Einleitung

Nach P. Hall [6] gibt es in jeder endlichen auflösbaren Gruppe G zu jeder Primzahlmenge π eine π-Untergruppe H, die Produkt von paarweise vertauschbaren p-Sylowgruppen von G für p aus π ist, und jede π-Untergruppe von G ist in einer zu H in G konjugierten Untergruppe enthalten. Um einige Verallgemeinerungen dieses Satzes zu finden, wird in dieser Arbeit die Klasse der p-Sylowgruppen von G durch Klassen $\mathfrak{f}G$ von Untergruppen aus G ersetzt, die ähnlich wie die Klassen der Sylowgruppen in G eingebettet sind. Wir verlangen:

✦) $\mathfrak{f}G$ ist eine homomorphismenvererbliche Klasse von in G konjugierten Untergruppen, so daß aus $U \varepsilon \mathfrak{f}G$ und $U \subseteq V \subseteq G$ folgt, daß U auch zu $\mathfrak{f}V$ gehört.

Die Elemente einer solchen Klasse $\mathfrak{f}G$ von in G konjugierten Untergruppen nennen wir $\mathfrak{f}$-Untergruppen von G; die Funktion $\mathfrak{f}$, die einer Gruppe G aus dem Definitionsbereich von $\mathfrak{f}$ die Klasse $\mathfrak{f}G$ zuordnet, nennen wir Sylowfunktion. Die Forderungen, die wir an den Definitionsbereich einer Sylowfunktion stellen werden, erhalten wir auf triviale Weise aus ✦); (vgl. Definition 1.1).

* Indirizzo dell'A.: Mathematisches Seminar der Universität Frankfurt (Main) 6 Frankfurt — Robert Mayer Strasse 6-8 (Germania).

Für endliche Gruppen erklären wir zu zwei Sylowfunktionen $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{g}$ ein (nicht kommutatives) Produkt $\mathfrak{f}\mathfrak{g}$ durch die Regel:

Die Untergruppen V der Gruppe G, die eine $\mathfrak{f}$-Untergruppe U von G als Normalteiler enthalten, so daß V/Uzu $\mathfrak{g}(\mathfrak{N}_G U/U)$ gehört, bilden eine Klasse $\mathfrak{f}\mathfrak{g}G$ von Untergruppen. Dann können wir zeigen, daß $\mathfrak{f}\mathfrak{g}$ auch ✦) erfüllt. Weiter definieren wir ein kommutatives Produkt $\mathfrak{f} \circ \mathfrak{g}$: In einer endlichen auflösbaren Gruppe G erfüllt die Klasse $(\mathfrak{f} \circ \mathfrak{g})G$ der Untergruppen, die aus den Produkten einer $\mathfrak{f}$-Untergruppe und einer mit ihr vertauschbaren $\mathfrak{g}$-Untergruppe besteht, die Bedingung ✦). Wir schließen daraus, daß sich die Vertauschbarkeit einer π-Hallgruppe mit einer $\mathfrak{f}$-Untergruppe auf alle Untergruppen vererbt, welche eine $\mathfrak{f}$-Untergruppe der ganzen Gruppe enthalten (vgl. Satz 2.4 und Folgerung 2.5). Dieser Satz wurde bereits in einer schwächeren Form von R. W. Carter in [2] bewiesen.

Ist in einer Gruppe G eine Untergruppe U Produkt einer $\mathfrak{f}$-Untergruppe und einer π-Untergruppe von G, so nennen wir U eine $\pi_{\mathfrak{f}}$-Untergruppe von G. Wir werden zeigen, daß die maximalen $\pi_{\mathfrak{f}}$-Untergruppen einer endlichen auflösbaren Gruppe G eine Klasse von in G konjugierten Untergruppen bilden, die aber im allgemeinen nicht mehr epimorphismenvererblich ist (vgl. Satz 3.2). Da wir $\mathfrak{f} = 1$ setzen können, folgen aus diesem Satz leicht wieder die Hallschen Sätze.

Ist $\mathfrak{F}$ eine epimorphismenvererbliche Klasse von Gruppen, so nennen wir nach W. Gaschütz (vgl. [4]) U eine $\mathfrak{F}$-Untergruppe der Gruppe G, wenn folgende Bedingung erfüllt ist;

+) Ist $U \subseteq V \subseteq G$ und ist N ein Normalteiler von V, so daß V/N aus $\mathfrak{F}$ ist, so ist $NU = V$.

Wir werden in Satz 1.10 zeigen, daß die Funktion $\mathfrak{f}$, die einer endlichen Gruppe G die Klasse der $\mathfrak{F}$-Untergruppen von G zuordnet, eine Sylowfunktion ist, falls G auflösbar ist. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{F}^*$ die maximale Klasse der endlichen, nicht notwendig auflösbaren Gruppen G, auf der $\mathfrak{f}$ definiert und eine Sylowfunktion ist (vgl. Definition 1.9). Nach W. Gaschütz [4] ist $\mathfrak{F}$ eine Formation, wenn $\mathfrak{F}$ homomorphismenvererblich ist und wenn noch gilt: Sind M und N Normalteiler der Gruppe G und ist G/M und G/N aus $\mathfrak{F}$, so ist auch $G/(M \cap N)$ aus $\mathfrak{F}$.

Wir werden beweisen, daß mit $\mathfrak{F}$ auch $\mathfrak{F}^*$ eine Formation ist und daß $\mathfrak{F}^*$ genau dann die Klasse aller endlichen auflösbaren Gruppen enthält, wenn $\mathfrak{F}$ im Sinne von W. Gaschütz gesättigt ist (vgl. Satz 4.5).

Eine Untersuchung der Produkte von Sylowfunktionen ergibt weitere Konstruktionsmöglichkeiten für Formationen: Ist $\mathfrak{F}$ eine Formation und $\mathfrak{g}$ eine Sylowfunktion, so werden durch die endlichen auflösbaren Gruppen, in denen eine $\mathfrak{F}$-Untergruppe mit einer π-Hallgruppe vertauschbar ist, und durch die endlichen Gruppen, in denen eine $\mathfrak{F}$-Untergruppe von einer $\mathfrak{g}$-Untergruppe normalisiert wird, Formationen erklärt (vgl. Folgerung 4.8 und Satz 4.10). Eine Folgerung des letzten Satzes wurde bereits von R. W. Carter bewiesen [2]: Die auflösbaren Gruppen, in denen ein Systemnormalisator normalisatorgleich ist, bilden eine Formation.

Für zahlreiche Anregungen zu dieser Arbeit bin ich Prof. Baer (Frankfurt), Dr. Fischer (Frankfurt) und Dr. Stonehewer (Newcastle) zu besonderem Dank verpflichtet.

Bezeichnungen

$o(G)$	Ordnung einer Gruppe G.
$[G : U]$	Index der Untergruppe U von G.
$\mathfrak{N}_G(U)$	Normalisator der Untergruppe U in G.
$\mathfrak{C}_G(U)$	Zentralisator der Untergruppe U in G.
$Z(G)$	Zentrum von G.
$U \subseteq G$	Die Untergruppe U ist in G enthalten.
$U \subset G$	Die Untergruppe U ist in G echt enthalten.
$g \varepsilon \mathfrak{M}$	g ist ein Element der Menge $\mathfrak{M}$.
$\mathfrak{N} \leq \mathfrak{M}$	Die Menge $\mathfrak{N}$ ist in der Menge $\mathfrak{M}$ enthalten.
$\{g_1, g_2, \ldots\}$	Erzeugnis der Elemente $g_1, g_2, \ldots$ von G in G.
$[X; \ldots]$	Menge der Elemente X mit ....
π-Gruppe	Gruppe, in deren Ordnung nur Primteiler aus der Primzahlmenge π aufgehen.

π-Hallgruppe	π-Untergruppe, deren Ordnung und Index teilerfremd sind.
Cartergruppe	Nilpotente normalisatorgleiche Untergruppe.

Alle betrachteten Gruppen sind endlich.

1. Sylowfunktionen

DEFINITION 1.1: Eine Funktion $\mathfrak{f}$ und die Klasse $\mathfrak{D}$ endlicher Gruppen bilden eine Sylowfunktion $(\mathfrak{f}, \mathfrak{D})$, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

a) $\mathfrak{f}$ ist auf $\mathfrak{D}$ eindeutig definiert, und für jedes $G \varepsilon \mathfrak{D}$ ist $\mathfrak{f}G$ eine Klasse konjugierter Untergruppen von G.

b) Liegt G in $\mathfrak{D}$, gehört U zu $\mathfrak{f}G$, ist $U \subseteq V \subseteq G$, so gehört auch V zu $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{f}V = [X \varepsilon \mathfrak{f}G; X \subseteq V]$.

c) Ist σ ein Epimorphismus der Gruppe G aus $\mathfrak{D}$, so ist G^σ aus $\mathfrak{D}$, und es ist $(\mathfrak{f}G)^\sigma \leq \mathfrak{f}(G^\sigma)$.

Ist G aus $\mathfrak{D}$, so nennen wir die Elemente von $\mathfrak{f}G$ auch $\mathfrak{f}$-Untergruppen von G.

Bemerkung: Wegen *a*) gilt in *c*) sogar die Gleichheit, d. h. es ist $(\mathfrak{f}G)^\sigma = \mathfrak{f}(G^\sigma)$.

Wenn keine Mißverständnisse möglich sind, werden wir bei einer Sylowfunktion den Definitionsbereich nicht angeben, also $\mathfrak{f}$ statt $(\mathfrak{f}, \mathfrak{D})$ schreiben.

Hilfssatz 1.2: *Sei $\mathfrak{D}_i$ $(i \varepsilon \mathfrak{J})$ eine Menge von Klassen von Gruppen, so daß $(\mathfrak{f}, \mathfrak{D}_i)$ eine Sylowfunktion ist. Dann sind auch $(\mathfrak{f}, \bigcap_{i \varepsilon \mathfrak{J}} \mathfrak{D}_i)$ und $(\mathfrak{f}, \bigcup_{i \varepsilon \mathfrak{J}} \mathfrak{D}_i)$ Sylowfunktionen.*

Beweis: Ist G aus $\bigcap_{i \varepsilon \mathfrak{J}} \mathfrak{D}_i$ bzw. $\bigcup_{i \varepsilon \mathfrak{J}} \mathfrak{D}_i$, so sind wegen den Bedingungen *b*) und *c*) auch alle Untergruppen von G, die eine $\mathfrak{f}$-Untergruppe von G enthalten, und alle epimorphen Bilder von G in $\bigcap_{i \varepsilon \mathfrak{J}} \mathfrak{D}_i$ bzw. $\bigcup_{i \varepsilon \mathfrak{J}} \mathfrak{D}_i$ enthalten. Daher erfüllen $\bigcap_{i \varepsilon \mathfrak{J}} \mathfrak{D}_i$ und $\bigcup_{i \varepsilon \mathfrak{J}} \mathfrak{D}_i$ zusammen mit $\mathfrak{f}$ die Bedingungen von Definition 1.1.

Hilfssatz 1.3: *Ist $(\mathfrak{f}, \mathfrak{D})$ eine Sylowfunktion und bezeichnet man* *für G aus $\mathfrak{D}$ mit $\mathfrak{n f} G$ die Klasse der Normalisatoren der $\mathfrak{f}$-Untergruppen von G in G, so ist auch* $(\mathfrak{nf}, \mathfrak{D})$ *eine Sylowfunktion.*

Beweis: Aus der Konjugiertheit der $\mathfrak{f}$-Untergruppen folgt zunächst die Konjugiertheit der Normalisatoren der $\mathfrak{f}$-Untergruppen. Die Voraussetzung *b*) von Definition 1.1 ist für $\mathfrak{nf}$ trivialerweise erfüllt.

Natürlich gilt für ein U aus $\mathfrak{f}G$ und einen Normalteiler N der Gruppe G:

$$N\mathfrak{N}_G(U) \subseteq \mathfrak{N}_G(UN)$$

Sei $x \varepsilon \mathfrak{N}_G(UN)$. Wegen Bedingung *b*) ist U in $\mathfrak{f}(UN)$ enthalten. Aus *c*) folgt dann, daß $x^{-1}Ux$ in $\mathfrak{f}(UN)$ enthalten ist. Wegen *a*) gibt es also ein w aus N mit $x^{-1}Ux = w^{-1}Uw$. Insbesondere liegt wx^{-1} in $\mathfrak{N}_G(U)$. Es gilt also:

$$\mathfrak{N}_G(UN) = N\mathfrak{N}_G(U)$$

Die Bedingung *c*) von Definition 1.1 ist also erfüllt.

Hilfssatz 1.4: *Sei* $(\mathfrak{f}, \mathfrak{D})$ *eine Sylowfunktion, und sei G aus $\mathfrak{D}$. Dann gilt:*

1) *Ist N ein Normalteiler von G und $H/N \varepsilon \mathfrak{f}(G/N)$, so ist $\mathfrak{f}H \leq \mathfrak{f}G$.*

2) *Enthält die Untergruppe V die $\mathfrak{f}$-Untergruppe C von G und ist M ein Normalteiler von V, so daß $\mathfrak{f}(V/M) = V/M$ ist, so ist $CM = V$.*

3) *Ist N ein abelscher minimaler Normalteiler von G, so daß $\mathfrak{f}(G/N) = G/N$ und $\mathfrak{f}(G) \neq G$ ist, so ist eine $\mathfrak{f}$-Untergruppe von G Komplement von N in G.*

Beweis: Ist $C \varepsilon \mathfrak{f}G$, so folgt aus den Bedingungen von Definition 1.1, daß CN/N zu H/N in G/N konjugiert ist. Aus der Bedingung *b*) von Definition 1.1 folgt dann die Behauptung 1). Die Behauptung 2) folgt aus den Bedingungen *b*) und *c*) von Definition 1.1.

Aus *c*) und der Voraussetzung, daß N ein abelscher minimaler Normalteiler von G ist, folgt 3).

Hilfssatz 1.5: *Ist die Untergruppe N der auflösbaren Gruppe G der einzige minimale Normalteiler von G, so sind alle Komplemente von N in G konjugiert.*

Beweis: Da N der einzige abelsche minimale Normalteiler von G ist, sind die Komplemente von N maximale Untergruppen von G, deren Durchschnitt 1 ist. Nach einem Satz von O. Ore [8] sind sie daher in G konjugiert.

Bemerkung: W. Gaschütz hat in [4] den Begriff der $\mathfrak{F}$-Untergruppe eingeführt und die Hilfsätze 1.7 und 1.8 bewiesen.

Da wir den Begriff der $\mathfrak{F}$-Untergruppe in 1.6 erweitern, wiederholen wir die Beweise von 1.7 und 1.8.

Definition 1.6: Sei $\mathfrak{F}$ eine Klasse von Gruppen, die alle epimorphen Bilder ihrer Elemente enthält. Die Untergruppe C der Gruppe G ist eine $\mathfrak{F}$-Untergruppe der Gruppe G, wenn C aus $\mathfrak{F}$ ist und wenn gilt:

+) Ist V eine Untergruppe von G und N ein Normalteiler von V, so daß $C \subseteq V \subseteq G$ und V/N aus $\mathfrak{F}$ ist, so ist $NC = V$.

Hilfssatz 1.7: *Sei $\mathfrak{F}$ eine epimorphismenvererbliche Klasse von Gruppen, und C sei eine $\mathfrak{F}$-Untergruppe der Gruppe G. Dann gilt*:

1) *C ist $\mathfrak{F}$-Untergruppe von jeder Untergruppe U mit $C \subseteq U \subseteq G$.*

2) *Ist N ein Normalteiler von G, so ist NC/N eine $\mathfrak{F}$-Untergruppe von G/N.*

3) *C ist eine maximale in $\mathfrak{F}$ enthaltene Untergruppe von G.*

Beweis: 1) folgt sofort aus Definition 1.6.

Da $\mathfrak{F}$ alle epimorphen Bilder ihrer Elemente enthält, ist NC/N aus $\mathfrak{F}$. Um +) zu beweisen, sei $NC/N \subseteq V/N \subseteq G/N$, sei M/N normal in V/N und sei $(V/N)/(M/N) \simeq V/M \,\varepsilon\, \mathfrak{F}$. Nach Definition 1.6 ist $MC = V$, also $(M/N) \cdot (NC/N) = V/N$. Es folgt 2).

Die Behauptung 3) folgt aus der Bedingung +) von Definition 1.6, wenn wir dort $N = 1$ setzen.

Hilfssatz 1.8: *Ist N ein Normalteiler der Gruppe G, H/N eine $\mathfrak{F}$-Untergruppe von G/N und V eine $\mathfrak{F}$-Untergruppe von H, so ist C auch $\mathfrak{F}$-Untergruppe von G.*

Beweis: Sei G eine Gruppe minimaler Ordnung, für die die Behauptung des Hilfssatzes falsch ist. Dann gibt es eine C enthaltende Untergruppe V von G und einen Normalteiler M von V, so daß $V/M \,\varepsilon\, \mathfrak{F}$, aber $MC \neq V$ ist. Da C eine $\mathfrak{F}$-Untergruppe von H ist, ist wegen Hilfssatz 1.7 2) nun $NC = H$. Es folgt:

$$(H \cap V)/(N \cap V) \simeq (H \cap V)N/N = NC/N = H/N$$

✦)

$$V/(N \cap V) \simeq NV/N \supseteq H/N\,.$$

Wegen Hilfssatz 1.7 1) ist C eine $\mathfrak{F}$-Untergruppe von $H \cap V$. Ist $V \subset G$, so folgt aus ✦) und der Minimalität von G, daß C eine $\mathfrak{F}$-Untergruppe von V ist. Da wir dies wegen der Minimalität von G ausschließen können, ist $V = G$. Daher ist auch G/MN aus $\mathfrak{F}$, und es gilt:

$$MH = NMH = G\,;$$

$$G/M \simeq H/(M \cap H)\ \varepsilon\ \mathfrak{F}\,.$$

Da C eine $\mathfrak{F}$-Untergruppe von H ist, ist daher $(M \cap H)C = H$ und $MC \supseteq MH = G$. Also deckt C die Faktorgruppe G/M.

Definition 1.9: Sei $\mathfrak{F}$ eine epimorphismenvererbliche Klasse von Gruppen. Dann sei $\mathfrak{F}^*$ die maximale Klasse der Gruppen G, welche die folgenden Bedingungen erfüllt:

a) Ist G aus $\mathfrak{F}^*$, so enthält G eine $\mathfrak{F}$-Untergruppe;

b) Die Funktion $\mathfrak{f}$, die einer Gruppe G aus $\mathfrak{F}^*$ die Klasse der $\mathfrak{F}$-Untergruppen von G zuordnet, ist eine Sylowfunktion.

Bemerkung: Die Gruppe, die nur ein Element besitzt, hat stets eine $\mathfrak{F}$-Untergruppe. Daher folgt die Existenz von $\mathfrak{F}^*$ aus Hilfssatz 1.2.

Satz 1.10: *Sei $\mathfrak{F}$ eine epimorphismenvererbliche Klasse von Gruppen. Dann enthält $\mathfrak{F}^*$ alle auflösbaren Gruppen, die eine $\mathfrak{F}$-Untergruppe besitzen.*

Beweis: Hilfssatz 1.7 besagt gerade, daß die $\mathfrak{F}$-Untergruppen die Bedingungen *b*) und *c*) von Definition 1.1 erfüllen.

Sei also G eine auflösbare Gruppe minimaler Ordnung, in der es zwei $\mathfrak{F}$-Untergruppen C und D gibt, die nicht in G konjugiert sind. Da die $\mathfrak{F}$-Untergruppen die Bedingungen *b*) und *c*) von Definition 1.1 erfüllen, folgt aus der Minimalität von G, daß

$$CN = DN = G$$

für alle minimalen Normalteiler N von G ist. Da G wegen Hilfssatz 1.7 3) von C und D verschieden ist, enthält G genau einen minimalen Normalteiler N. Da N ein abelscher minimaler Normalteiler von G ist, sind sowohl C als auch D Komplemente von N in G. Aus Hilfssatz 1.5 folgt nun, daß C und D in G konjugiert sind. Da dies vorher ausgeschlossen wurde, liegt G in $\mathfrak{F}^*$. Dies war zu beweisen.

Bemerkung: Ist $(\mathfrak{f}, \mathfrak{D})$ eine Sylowfunktion, so bilden die Gruppen G aus $\mathfrak{D}$, für die $\mathfrak{f}G = G$ ist, eine epimorphismenvererbliche Klasse $\mathfrak{F}$ von Gruppen. Nach Hilfssatz 1.4 2) sind die $\mathfrak{f}$-Untergruppen einer Gruppe $X \varepsilon \mathfrak{D}$ auch $\mathfrak{F}$-Untergruppen. Enthält $\mathfrak{D}$ nur auflösbare Gruppen so können wir wegen Satz 1.10 dann $\mathfrak{f}$ auf $\mathfrak{F}^*$ fortsetzen und $\mathfrak{F}^*$ als maximalen Definitionsbereich von $\mathfrak{f}$ ansehen.

Hilfssatz 1.11: *Sei* $(\mathfrak{f}, \mathfrak{D})$ *eine Sylowfunktion, und die auflösbare Gruppe* G *liege in* $\mathfrak{D}$. *Besitzt* G *eine* $\mathfrak{f}$-*Untergruppe, die Komplement eines minimalen Normalteilers* N *von* G *ist, so sind die Komplemente von* N *gerade die Elemente aus* $\mathfrak{f}G$.

Beweis: Sei G eine Gruppe minimaler Ordnung, für die die Behauptung des Satzes nicht gilt; sei $C \varepsilon \mathfrak{f}G$, und das Komplement D von N sei nicht zu C in G konjugiert. Aus der Minimalität von G und aus Hifssatz 1.5 folgt dann, daß G einen von N verschiedenen minimalen Normalteiler L besitzt. Da C eine maximale Untergruppe von G ist und da LN abelsch ist, ist $LN \cap C$ ein von 1 und N verschiedener Normalteiler von G. Wir können daher annehmen, daß $L \subseteq C$ ist, und wir setzen nun $M = LN \cap D$.

Ist $L = M$, so schließen wir aus der Minimalität von G, daß in G/L die $\mathfrak{f}$-Untergruppe C/L zu D/L konjugiert ist. Da dies unmöglich ist, sind L und M minimale Normalteiler von G, so daß C ein Komplement von M und D ein Komplement von L in G ist. Daher besitzen die Untergruppen L, M und N dieselbe Ordnung, und sie sind direkte Faktoren des Normalteilers LN von G. Da G das Produkt der Untergruppen C und D ist, ist $C \cap D$ Komplement von L bzw. M in C bzw. D.

Da sowohl C als auch D Komplement von N in G ist, gibt es kanonische Isomorphismen ϱ bzw. σ von C bzw. D auf G/N. Folglich ist $\varrho\sigma^{-1}$ ein Isomorphismus von C auf D.

Jedes Element aus C bzw. D kann eindeutig dargestellt werden als Produkt eines Elements aus $C \cap D$ und eines Elementes aus L bzw. M. Sei $c \varepsilon C \cap D$ und $k \varepsilon L$. Da LN direktes Produkt von M und N ist, werden durch k eindeutig Elemente $n \varepsilon N$ und $m \varepsilon M$ bestimmt, so daß $k = mn$ ist. Durch $\varrho\sigma^{-1}$ wird c auf c und k auf m abgebildet; daher wird durch $\varrho\sigma^{-1}$ die Untergruppe $C \cap D$ elementweise festgelassen und ein Isomorphismus τ von L auf M induziert.

Jedes Element g aus G läßt sich eindeutig darstellen als Produkt von Elementen $c \varepsilon C \cap D$, $k \varepsilon L$ und $n \varepsilon N$. Wir definieren eine Abbildung β von G in sich durch die Gleichung:

$$(ckn)^{\beta} = ck^{\tau}n .$$

Sind d, h und m beliebige andere Elemente aus $C \cap D$, L bzw. N, so gilt:

$$\begin{aligned}(ckndhm)^{\beta} &= [cdd^{-1}\,kdd^{-1}\,ndhm]^{\beta}\\ &= [cd(d^{-1}\,kdh)d\,ndm)]^{\beta}\\ &= cd(d^{-1}\,kd)^{\varrho\sigma^{-1}}\,h^{\varrho\sigma^{-1}}\,d^{-1}\,ndm\\ &= cdd^{-1}k^{\tau}\,dh^{\tau}\,d^{-1}\,ndm\\ &= ck^{\tau}(dh^{\tau}\,d^{-1})\,ndm\\ &= ck^{\tau}\,ndh^{\tau}\,m\\ &= (ckn)^{\beta}\,(dhm)^{\beta}\end{aligned}$$

Wir schließen daraus, daß β ein Endomorphismus von G ist, der C auf eine Untergruppe von D abbildet. Da τ ein Isomorphismus von L auf M ist, ist β ein Automorphismus von G, der C auf D abbildet. Wegen der Bedingung c) von Definition 1.1 ist daher C zu D in G konjugiert. Es folgt die Behauptung des Hilfssatzes.

Hilfssatz 1.12: *Sei* ($\mathfrak{f}$, $\mathfrak{D}$) *eine Sylowfunktion, und sei* G *aus* $\mathfrak{D}$. *Ist* G *auflösbar und* N *ein Normalteiler von* G, *der ein Element von* $\mathfrak{f}G$ *als Komplement hat, so sind alle Komplemente von* N *in* G *konjugiert.*

Beweis: Sei G ein Gegenbeispiel minimaler Ordnung; sei D ein Komplement von N, das nicht zu einer $\mathfrak{f}$-Untergruppe C von G konjugiert ist, und M sei ein in N enthaltener minimaler Normalteiler von G. Da CM/M und DM/M Komplemente von N/M in G/M sind und da CM/M eine $\mathfrak{f}$-Untergruppe von G/M ist, schließen wir aus der Minimalität von G, daß CM/M zu DM/M in G/M konjugiert ist. O.B.d.A. ist daher $CM = DM$. Wegen der Bedingung b) von Definition 1.1. und der Minimalität von G ist dann $CM = DM = G$, und C und D sind daher Komplemente des minimalen Normalteilers M von G. Aus Hilfssatz 1.11 folgt nun entgegen unserer Annahme, daß D zu C in G konjugiert ist. Damit ist Hilfssatz 1.12 bewiesen.

Beispiele: In [6] hat P. Hall gezeigt, daß in jeder endlichen auflösbaren Gruppe für alle Primzahlmengen π die maximalen π-Untergruppen π-Hallgruppen sind und daß alle π-Hallgruppen konjugiert sind. Bezeichnet man mit $\mathfrak{h}_\pi G$ die Klasse der π-Hallgruppen einer Gruppe G, so ist $\mathfrak{h}_\pi$ eine Sylowfunktion, die auf allen auflösbaren Gruppen definiert ist, und die π-Hallgruppen sind die $\mathfrak{h}_\pi$-Untergruppen von G.

Bezeichnet man mit $\mathfrak{n}\mathfrak{h}_\pi G$ die Klasse der Normalisatoren der π-Hallgruppen einer auflösbaren Gruppe G, so ist nach Hilfssatz 1.3 auch $\mathfrak{n}\mathfrak{h}_\pi$ eine Sylowfunktion. Eine weite Klasse von $\mathfrak{f}$-Untergruppen bilden die Cartergruppen einer auflösbaren Gruppe (vgl. [3]).

In einer auflösbaren Gruppe bezeichnet man ein System von Hallgruppen, das zu jeder Primzahl p, die $o(G)$ teilt, genau ein p-Komplement und alle Durchschnitte von diesen p-Komplementen enthält, als vollständiges Sylowsystem von G. Den Normalisator eines vollständigen Sylowsystems nennt man nach P. Hall [7] einen Systemnormalisator von G. Die Systemnormalisatoren bilden nach P. Hall [7] eine epimorphismenvererbliche Klasse von konjugierten Untergruppen, doch ist die Bedingung b) von Definition 1.1 nicht erfüllt, d.h. ist der Systemnormalisator D der Gruppe G in der Untergruppe U von G enthalten, so ist im allgemeinen D kein Systemnormalisator von U.

2. Vertauschbarkeit von $\mathfrak{f}$-Untergruppen.

Definition 2.1: Seien $(\mathfrak{f}, \mathfrak{D})$ und $(\mathfrak{g}, \mathfrak{E})$ Sylowfunktionen; sei $\mathfrak{D}\mathfrak{E}$ die Klasse der Gruppen G aus $\mathfrak{D}$, deren $\mathfrak{n}\mathfrak{f}$-Untergruppen in $\mathfrak{E}$ liegen. Dann ordne die Funktion $\mathfrak{f}\mathfrak{g}$ allen Gruppen G aus $\mathfrak{D}\mathfrak{E}$ die Produkte von $\mathfrak{f}$-Untergruppen U von G mit $\mathfrak{g}$-Untergruppen V von $\mathfrak{N}_G(U)$ zu.

Satz 2.2: *Sind* $(\mathfrak{f}, \mathfrak{D})$ *und* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{E})$ *Sylowfunktionen, so ist auch* $(\mathfrak{f}\mathfrak{g}, \mathfrak{D}\mathfrak{E})$ *eine Sylowfunktion.*

Beweis: Sei G aus $\mathfrak{D}\mathfrak{E}$. Dann gibt es $\mathfrak{f}$-Untergruppen U bzw. R von G und $\mathfrak{g}$-Untergruppen V bzw. S von $\mathfrak{N}_G(U)$ bzw. $\mathfrak{N}_G(R)$, so daß $UV = VU$ und $RS = SR$ aus $\mathfrak{f}\mathfrak{g}G$ sind. Wegen der Konjugiertheit der $\mathfrak{f}$-Untergruppen von G gibt es ein $g \varepsilon G$, so daß $R^g = U$ ist. Da dann S^g und V in $\mathfrak{N}_G(U)$ liegen, gibt es ein $h \varepsilon \mathfrak{N}_G(U)$, so daß $S^{gh} = V$ ist. Folglich ist $(RS)^{gh} = UV$, und die Bedingung *a*) von Definition 1.1 ist für $\mathfrak{f}\mathfrak{g}$ gezeigt.

Enthält die Untergruppe W von G die Untergruppe UV, so ist

$$V \subseteq \mathfrak{N}_W(U) \subseteq \mathfrak{N}_G(U) ,$$

und V ist wegen der Bedingung *b*) von Definition 1.1 eine $\mathfrak{g}$-Untergruppe von $\mathfrak{N}_W(U)$. Daher liegt W in $\mathfrak{D}\mathfrak{E}$, und UV ist eine $\mathfrak{f}\mathfrak{g}$-Untergruppe von W.

Wendet man die Bedingung *b*) von Definition 1.1 zuerst auf die $\mathfrak{f}$-Untergruppen C von W und dann auf die $\mathfrak{g}$-Untergruppen D von $\mathfrak{N}_W(C)$ an, so folgt, daß die $\mathfrak{f}\mathfrak{g}$-Untergruppen von W gerade die $\mathfrak{f}\mathfrak{g}$-Untergruppen von G sind, die in W liegen. Es folgt für $\mathfrak{f}\mathfrak{g}$ die Bedingung *b*) von Definition 1.1.

Ist N ein Normalteiler von G, so ist nach Hilfssatz 1.3

$$\mathfrak{N}_G(UN) = N\mathfrak{N}_G(U) ,$$

und daher ist NV/N eine $\mathfrak{g}$-Untergruppe von $\mathfrak{N}_{G/N}(NU/N)$. Folglich ist für alle Epimorphismen σ von G dann $G^\sigma \varepsilon \mathfrak{D}\mathfrak{E}$ und

$$(\mathfrak{f}\mathfrak{g}G)^\sigma \leq \mathfrak{f}\mathfrak{g}(G^\sigma) .$$

Es gilt daher *c*) von Definition 1.1.

BEMERKUNG: Nach Satz 2.2 kann man für alle endlichen Gruppen Produkte von $\mathfrak{h}_p$-Sylowfunktionen erklären. Man nennt diese nach *R*. Baer Sylowturmfunktionen und die dazugehörigen Untergruppen Sylowturmuntergruppen (vgl. [1]).

DEFINITION 2.3: Seien $(\mathfrak{f}, \mathfrak{D})$ und $(\mathfrak{g}, \mathfrak{E})$ Sylowfunktionen; sei $\mathfrak{D} \circ \mathfrak{E}$ die Klasse der auflösbaren Gruppen G aus $\mathfrak{D} \cap \mathfrak{E}$, in der eine $\mathfrak{f}$-Untergruppe von G mit wenigstens einer $\mathfrak{g}$-Untergruppe von G vertauschbar ist. Die Funktion $\mathfrak{f} \circ \mathfrak{g}$ ordne allen Gruppen G aus $\mathfrak{D} \circ \mathfrak{E}$ die Untergruppen zu, die Produkt einer $\mathfrak{f}$-Untergruppe und einer $\mathfrak{g}$-Untergruppe von G sind. Die Klasse der auflösbaren Gruppen G aus $\mathfrak{D}$, in denen eine π-Hallgruppe mit einer $\mathfrak{f}$-Untergruppe vertauschbar ist, sei $\mathfrak{D}_\pi$.

Satz 2.4: *Sind* $(\mathfrak{f}, \mathfrak{D})$ *und* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{E})$ *Sylowfunktionen, so ist auch* $(\mathfrak{f} \circ \mathfrak{g}, \mathfrak{D} \circ \mathfrak{E})$ *eine Sylowfunktion. Mit G sind auch alle Untergruppen von G in* $\mathfrak{D} \circ \mathfrak{E}$ *enthalten, die eine* $\mathfrak{f}$-*Untergruppe und eine* $\mathfrak{g}$-*Untergruppe von G enthalten.*

Beweis: Da $(\mathfrak{f}, \mathfrak{D})$ und $(\mathfrak{g}, \mathfrak{E})$ die Bedingungen *b*) und *c*) von Definition 1.1 erfüllen, genügt auch $(\mathfrak{f} \circ \mathfrak{g}, \mathfrak{D} \circ \mathfrak{E})$ diesen Bedingungen. Beide Behauptungen des Satzes sind daher bewiesen, wenn wir die folgende Annahme zum Widerspruch führen können: Es gibt eine Gruppe G aus $\mathfrak{D} \circ \mathfrak{E}$ und eine Untergruppe S von G, die von einer $\mathfrak{f}$-Untergruppe und einer $\mathfrak{g}$-Untergruppe von G erzeugt wird und keine echte Untergruppe mit dieser Eigenschaft enthält, so daß G von minimaler Ordnung bzgl. der folgenden Eigenschaft ist: Es gibt eine $\mathfrak{f}$-Untergruppe U und eine mit ihr vertauschbare $\mathfrak{g}$-Untergruppe V von G, so daß S nicht zu UV in G konjugiert ist.

Da G auflösbar ist, besitzt G einen abelschen minimalen Normalteiler N. Da $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{g}$ die Eigenschaften *b*) und *c*) von Definition 1.1 besitzen, ist in G/N die $\mathfrak{f}$-Untergruppe NU/N mit der $\mathfrak{g}$-Untergruppe NV/N vertauschbar, und NS/N enthält eine $\mathfrak{f}$-Untergruppe und eine $\mathfrak{g}$-Untergruppe von G/N. Wegen der Minimalität von G gilt daher für ein x aus G die Ungleichung:

$$UVN \subseteq S^x N$$

Da die Voraussetzungen des Satzes wegen der Vorau ssetzun

b) von Definition 1.1 auch für $S^{*}N$ erfüllt sind, gilt wegen der Minimalität von G die Gleichung $S^{*}N = G$, also auch $SN = G$. Da N ein abelscher minimaler Normalteiler von G ist, ist dann entweder $S \cap N = 1$ oder $S = G$.

Falls $S = G$ ist, folgt aus der Minimalität von S, daß auch $UV = G$ ist. Dann ist aber jede $\mathfrak{f}$-Untergruppe von G mit jeder $\mathfrak{g}$-Untergruppe von G vertauschbar und ihr Produkt ist G. Das ist wegen der Minimalität von G unmöglich. Es folgt:

1) S ist Komplement jedes minimalen Normalteilers N von G.

Für geeignete Elemente n und m aus N gelten dann Ungleichungen

$$U^n \subseteq S\,, \qquad V^m \subseteq S\,.$$

Folglich enthält $S \cap UVN$ eine $\mathfrak{f}$-Untergruppe und eine $\mathfrak{g}$-Untergruppe von G. Wegen der Minimalität von S ist daher $UVN = G$.

Da N ein abelscher minimaler Normalteiler von G und $UV \subset G$ ist, folgt aus 1):

2) UV ist ein Komplement von N in G.

Gäbe es einen weiteren minimalen Normalteiler M von G, so wäre $MN \cap S$ ein echter Normalteiler von G, da MN abelsch ist. Da dies 1) widerspricht, ist N der einzige minimale Normalteiler von G. Aus Hilfssatz 1.5 folgt nun entgegen unseren Voraussetzungen über S und G, daß S und UV in G konjugiert sind. Damit ist Satz 2.4 bewiesen.

Bemerkung: In Satz 2.4 ist die Voraussetzung über die Auflösbarkeit von G unentbehrlich. So sind in der einfachen Gruppe der Ordnung 168 nicht alle [2,3]-Hallgruppen, die ja Produkt einer 2-Sylowgruppe und einer 3-Sylowgruppe sind, konjugiert.

Folgerung 2.5: *Sei* $(\mathfrak{f}, \mathfrak{D})$ *eine Sylowfunktion, und sei* G *aus* $\mathfrak{D}_\pi$. *Ist die* π*-Hallgruppe* H *von* G *mit der* $\mathfrak{f}$*-Untergruppe* C *von* G *vertauschbar, so gibt es in jeder Untergruppe* U *von* G*, die* C *enthält, eine mit* C *vertauschbare* π*-Hallgruppe* R *und ein Element* g *aus* $\mathfrak{N}_G(C)$*, so daß* $RC \subseteq H^gC$ *ist.*

Beweis: Seien G und U Gruppen minimaler Ordung, für die die Behauptung der Folgerung falsch ist. Da G auflösbar ist, besitzt G einen minimalen Normalteiler N von Primzahlpotenzordnung. In G/N ist die π-Hallgruppe HN/N mit der $\mathfrak{f}$-Untergruppe CN/N vertauschbar, und es ist CN/N in UN/N enthalten. Wegen der Minimalität von G gibt es eine mit CN/N vertauschbare π-Hallgruppe S/N von UN/N, so daß $SC \subseteq H^g CN$ für ein g aus $\mathfrak{N}_G(CN)$ ist. Aus Hilfssatz 1.3 folgt, daß $\mathfrak{N}_G(CN) = N\mathfrak{N}_G(C)$ ist. Wir können daher annehmen, daß $g \varepsilon \mathfrak{N}_G(C)$ und $H^g CN = HCN$ ist. Folglich ist $SC \cap H$ eine π-Hallgruppe von SC. Da $SC \subseteq UN$ ist und da S eine π-Hallgruppe von UN enthält, ist also $SC \cap H$ eine π-Hallgruppe von UN, die mit C vertauschbar ist.

Sei $UN \subset G$. Ist R einen π-Hallgruppe von U, so gibt es wegen der Minimalität von G ein $g \varepsilon \mathfrak{N}_{NU}(C)$, so daß

$$RC \subseteq (SC \cap H)^g C \subseteq H^g C$$

ist. Da dies der Minimalität von G widerspricht, ist $UN = G$. Ist N eine π-Gruppe, so ist $(U \cap H)C$ das Produkt einer π-Hallgruppe R von U mit C, und es ist $RC \subseteq HC$. Dies ist wegen der Minimalität von G unmöglich.

Ist N eine π'-Gruppe, so enthält U eine π-Hallgruppe von G. Nach Satz 2.4 enthält dann U eine mit C vertauschbare π-Hallgruppe R von G, so daß RC und HC in G konjugiert sind. Aus a) und b) von Definition 1.1 folgt, daß für ein $g \varepsilon \mathfrak{N}_G(C)$ die Gleichung $RC = H^g C$ gilt. Da dies der Minimalität von G widerspricht, ist Folgerung 2.5 bewiesen.

Bemerkung: Folgerung 2.5 kann noch verschärft werden (vgl. Satz 3.2).

Beispiel 2.6: Sei Q eine Quaternionengruppe der Ordnung 8, gegeben durch die Relationen:

$$a^4 = 1, \quad b^2 = a^2, \quad ba = a^{-1}b$$

Sei $P = \{e\}$ eine zyklische Gruppe der Ordnung 7, und d sei ein Automorphismus von P mit d^{-1} ed $= e^2$.

Wir bilden das Kranzprodukt $K = Q \wr P$. Die Untergruppen Q_i von $H = Q_0 \times Q_1 \times \ldots \times Q_6$ mögen dem Element e^i von

P entsprechen, d.h. es gelte $e^{-1}Q_i e = Q_{i+1}$. Wir erweitern d zu einem Automorphismus von K durch die Gleichungen:

$$d^{-1}a_i^2 d = a_j^2\,, \qquad d^{-1}a_i d = b_j\,,$$

falls $d^{-1}e^i d = e^j$ ist.

Wir bilden in Holomorph von K die Gruppe $G = \{K, d\}$. Die Untergruppe $\{a_0^2, d\}$ von G ist eine Cartergruppe von G. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{c}X$ die Klasse der Cartergruppen einer Gruppe X, so liegt G nicht im Definitionsbereich von $\mathfrak{c} \circ \mathfrak{h}_7$, da in ihr keine 7-Sylowgruppe mit der Cartergruppe $\{a_0^2, d\}$ vertauschbar ist.

3. Eine Verallgemeinerung der Hallschen Sätze

Definition 3.1: Ist $(\mathfrak{f}, \mathfrak{D})$ eine Sylowfunktion und liegt die Gruppe G in $\mathfrak{D}$, so ist eine Untergruppe von G eine π_f-Untergruppe von G, wenn sie Produkt einer $\mathfrak{f}$-Untergruppe und einer π-Untergruppe von G ist.

Satz 3.2: *Ist* $(\mathfrak{f}, \mathfrak{D})$ *eine Sylowfunktion und ist* G *eine auflösbare Gruppe aus* $\mathfrak{D}$, *so sind alle maximalen* π_f-*Untergruppen von* G *in* G *konjugiert.*

Beweis: Die Gruppe G sei ein Gegenbeispiel minimaler Ordnung; die Untergruppen R und S von G seien maximale π-Gruppen, die mit der $\mathfrak{f}$-Untergruppe C von G vertauschbar sind, so daß die π_f-Untergruppen RC und SC nicht in G konjugiert sind.

Die Untergruppen RC und SC sind auch maximale π_f-Untergruppen von $\{RC, SC\}$, da sie es in G sind. Aus der Minimalität von G folgt:

(1) $$\{RC,\ SC\} = G$$

Sei N ein minimaler Normalteiler von G. Dann sind RCN/N und SCN/N π_f-Untergruppen von G/N. Wegen der Minimalität von G gibt es eine π-Untergruppe U und ein Element g von G, so daß UN/N eine maximale mit CN/N vertauschbare π-Untergruppe von G/N ist und so daß die Ungleichungen $RCN \subseteq UCN$ und $SCN \subseteq (UCN)^g$ gelten.

Ist $UCN \subset G$, so sind wegen der Minimalität von G die Untergruppen RC und $(SC)^g$ in UCN konjugiert. Da dies nach Voraussetzung unmöglich ist, gilt also:

$$UCN = G \tag{2}$$

Ist N eine π-Gruppe, so ist G das Produkt einer π-Hallgruppe und einer $\mathfrak{f}$-Untergruppe von G. Folglich ist $RC = SC = G$. Da das der Minimalität von G widerspricht, gilt also:

$$N \text{ ist eine } \pi'\text{-Gruppe.} \tag{3}$$

Aus (3) folgt die Gleichung

$$RC \cap N = C \cap N = SC \cap N .$$

Daher ist $C \cap N$ ein Normalteiler von $\{RC, SC\} = G$. Aus $N \subseteq C$ würde folgen, daß G das Produkt einer π-Hallgruppe und einer $\mathfrak{f}$-Untergruppe von G ist. Dies ist unmöglich. Da N ein abelscher minimaler Normalteiler von G ist, gilt daher:

$$C \cap N = 1 \tag{4}$$

für jeden minimalen Normalteiler N von G.

Sei M ein π'-Normalteiler von G, der N echt enthält. Aus (2) folgt dann:

$$RC \cap M = C \cap M = SC \cap M \neq 1$$

Wegen (1) ist dann $M \cap C$ ein Normalteiler von C. Das ist wegen (4) unmöglich. Also folgt mit (3):

$$G \text{ enthält genau einen } \pi'\text{-Normalteiler } N, \tag{5}$$

und N ist einziger minimaler Normalteiler von G.

Ist also L/N ein minimaler Normalteiler von G/N, so besitzt N ein π'-Komplement V in L. Aus der Konjugiertheit der π-Hallgruppen von L in L folgt nach dem Frattinischluß, daß $\mathfrak{N}_G(V)N = G$ ist. Da N ein abelscher minimaler Normalteiler von G ist,

ist $\mathfrak{N}_G(V)$ ein Komplement von N in G. Da $\mathfrak{N}_G(V) \simeq G/N$ ist, liegt $\mathfrak{N}_G(V)$ in $\mathfrak{D}$.

Sei D eine $\mathfrak{f}$-Untergruppe von $\mathfrak{N}_G(V)$; dann ist DN/N eine $\mathfrak{f}$-Untergruppe von $\mathfrak{N}_G(V)N/N = G/N$. Wegen Hilfssatz 1.4 (1) ist dann eine $\mathfrak{f}$-Untergruppe E von DN eine $\mathfrak{f}$-Untergruppe von G. Aus (4) und der Konjugiertheit der $\mathfrak{f}$-Untergruppen folgt:

$$DN = EN \quad \text{und} \quad D \cap N = 1 = E \cap N \tag{6}$$

Aus Hilssatz 1.12 folgt nun, daß D und E in DN konjugiert sind.

Also ist D wegen der Bedingung $a)$ von Definition 1.1 eine $\mathfrak{f}$-Untergruppe von G, und $\mathfrak{N}_G(V)$ ist das Produkt einer π-Hallgruppe und einer $\mathfrak{f}$-Untergruppe von G. Aus Folgerung 2.5 folgt nun, daß RC und SC in Untergruppen von G liegen, die zu $\mathfrak{N}_G(V)$ in G konjugiert sind. Da RC und SC maximale π_f-Untergruppen von G sind, sind sie also in G zu $\mathfrak{N}_G(V)$ konjugiert. Da dies der Minimalität von G widerspricht, ist Satz 3.2 bewiesen.

Bemerkung: In Beispiel 2.6 ist $N = \{a_0^2, a_1^2, ..., a_6^2\}$ ein Normalteiler von G. In G/N ist $\{dN\}$ gleichzeitig eine Cartergruppe und eine 3-Sylowgruppe. Nach den Hallschen Sätzen liegt G/N daher in $\mathfrak{D}_7$, und die maximalen 7_c-Untergruppen von G/N haben daher eine durch 7 teilbare Ordnung. Dagegen ist die Ordnung der 7_c-Untergruppen von G nicht durch 7 teilbar, da die 7_c-Untergruppen von G die Cartergruppen von G sind. Die Klasse der maximalen 7_c-Untergruppen von G ist also nicht epimorphismenvererblich. Wir bemerken noch, daß die Klasse der maximalen π_f-Untergruppen die Eigenschaft $b)$ von Definition 1.1 und 1) von Hilfssatz 1.4 hat. Das ist eine Folgerung von Satz 3.2.

Bemerkung: In einer endlichen auflösbaren Gruppe besitzt jede maximale Untergruppe Primzahlpotenzindex. Ist C aus $\mathfrak{f}G$ und ist n die Anzahl der Primzahlen, die $[G : C]$ teilen, so stellen wir fest, daß durch Satz 3.2 mindestens $n - 1$ von G und $\mathfrak{f}G$ verschiedene Klassen von konjugierten Untergruppen definiert werden.

Folgerung 3.3: *Sei* $(\mathfrak{f}, \mathfrak{D})$ *eine Sylowfunktion, und seien* π *und* ϱ *Primzahlmengen. Dann ist* $\mathfrak{D}_\pi \cap \mathfrak{D}_\varrho$ *in* $\mathfrak{D}_{\pi \cap \varrho}$ *und* $\mathfrak{D}_{\pi \cup \varrho}$ *enthalten.*

Beweis: Die auflösbare Gruppe G sei aus $\mathfrak{D}_\pi \cap \mathfrak{D}_\varrho$. Wegen Satz 3.2 und den Voraussetzungen über G enthält eine maximale $(\pi \cup \varrho)_{\mathfrak{f}}$-Untergruppe W von G eine π-Hallgruppe P, eine ϱ-Hallgruppe R und eine $\mathfrak{f}$-Untergruppe C von G. Daher liegt G in $\mathfrak{D}_{\pi \cup \varrho}$.

Um den ersten Teil der Folgerung zu beweisen, können wir wegen Folgerung 2.5 annehmen, daß P und R mit C vertauschbar sind. Nach den Hallschen Sätzen gibt es eine mit P vertauschbare ϱ-Hallgruppe S von $W = PRC$; es folgt:

$$\circ\,(PC \cap RC) = \frac{\circ\,(PC)\,\circ(RC)}{\circ\,(PSC)} = \frac{\circ\,(P)\,\circ\,(R)\,\circ\,(C)\,\circ\,(PS \cap C)}{\circ\,(P \cap C)\,\circ\,(R \cap C)\,\circ\,(PS)}$$

$$= \circ\,(P \cap S)\,\circ\,(C)\,\frac{\circ\,(PS \cap C)}{\circ\,(P \cap C)\,\circ\,(R \cap C)}$$

Da die Hallgruppen P, R und PS mit C vertauschbar sind, ist

$$\frac{\circ\,(P \cap C)\,\circ\,(R \cap C)}{\circ\,(PS \cap C)}$$

die Ordnung einer $\pi \cap \varrho$-Hallgruppe von C. Folglich ist $PC \cap RC$ das Produkt einer $\pi \cap \varrho$-Hallgruppe von G mit C, und daher liegt G in $\mathfrak{D}_{\pi \cap \varrho}$.

Bemerkung: Trivialerweise wird durch $\mathfrak{f}G = 1$ für alle Gruppen eine Klasse von $\mathfrak{f}$-Untergruppen erklärt. Für endliche auflösbare Gruppen folgt daher aus der Existenz der p-Sylowgruppen für alle Primzahlen p und aus Folgerung 3.3 die Existenz der π-Hallgruppen für alle Primzahlmengen π, und aus Satz 3.2 folgen dann weitere Eigenschaften der Hallgruppen. Satz 3.2 kann man daher als eine Verallgemeinerung der Hallschen Sätze betrachten.

4. Formationen und $\mathfrak{f}$-Untergruppen.

Bemerkung: Die in der nachfolgenden Definition vorkommenden Begriffe hat *W.* Gaschütz bereits in [4] eingeführt.

Definition 4.1: Eine Formation $\mathfrak{F}$ ist eine Klasse von Gruppen, welche die folgenden Bedingungen erfüllt:

a) $\mathfrak{F}$ enthält alle epimorphen Bilder von Elementen aus $\mathfrak{F}$.

b) Sind M und N Normalteiler der Gruppe G, so daß G/M und G/N aus $\mathfrak{F}$ sind, so ist auch $G/(M \cap N)$ aus $\mathfrak{F}$.

Eine nur auflösbare Gruppen enthaltende Formation $\mathfrak{F}$ wird gesättigt genannt, wenn folgende Bedingung erfüllt its:

c) Ist die Gruppe G nicht aus $\mathfrak{F}$ und ist N ein minimaler Normalteiler von G, so daß G/N aus $\mathfrak{F}$ ist, so besitzt N ein Komplement in G, und alle Komplemente von N sind in G konjugiert.

Bemerkung: *W.* Gaschütz und *U.* Lubeseder haben in [5] die Äquivalenz der Bedingungen 1) und 2) des folgenden Satzes bewiesen. Wir geben einen einfachen Beweis.

Satz 4.2: *Die folgenden Eigenschaften der nur auflösbare Gruppen enthaltenden Formation* $\mathfrak{F}$ *sind äquivalent*:

1) $\mathfrak{F}$ *ist gesättigt.*

2) *Ist* M *ein minimaler Normalteiler der auflösbaren Gruppe* G, *so daß* G *nicht aus* $\mathfrak{F}$, *aber* G/M *aus* $\mathfrak{F}$ *ist, so besitzt* M *ein Komplement in* G.

3) *In jeder auflösbaren Gruppe* A *existiert eine* $\mathfrak{F}$-*Untergruppe.*

Beweis: Trivialerweise folgt 2) aus 1).

Gilt 2), so ist ein Komplement U von M wegen Bedingung *a)* von Definition 4.1 in der Formation $\mathfrak{F}$ enthalten, da $U \simeq G/M$ ist. Da M ein abelscher minimaler Normalteiler von G ist, erfüllt U die Bedingung $(+)$ von Definition 1.6, und U ist daher eine $\mathfrak{F}$-Untergruppe von G. Nach Satz 1.10 sind alle $\mathfrak{F}$-Untergruppen von G in G konjugiert. Da U ein beliebiges Komplement von M in G ist, folgt 1).

Gilt 3), so können wir Hilfsatz 1.4 2) wegen Satz 1.10 anwenden. Da ein minimaler Normalteiler einer auflösbaren Gruppe abelsch ist, ist eine $\mathfrak{F}$-Untergruppe von G Komplement von M in G.

Es folgt 2).

Satz 2.2 von [4] besagt, daß 3) aus 1) folgt.

Hilfssatz 4.3: *Sei $\mathfrak{E}$ eine Klasse von Gruppen, die alle epimorphen Bilder ihrer Elemente enthält. Ist $\mathfrak{E}$ keine Formation, so gibt es eine Gruppe G, die von minimaler Ordnung bzgl. der folgenden Eigenschaft ist:*

1) *G ist nicht aus $\mathfrak{E}$.*

2) *Es gibt verschiedene minimale Normalteiler M und N von G, so daß G/M und G/N aus $\mathfrak{E}$ sind.*

Beweis: Da $\mathfrak{E}$ keine Formation ist, gibt es eine Gruppe G, die minimal bzgl. der folgenden Eigenschaft ist: Es gibt verschiedene Normalteiler R und S von G, so daß G/R und G/S, aber nicht G aus $\mathfrak{E}$ ist. Da die Klasse $\mathfrak{E}$ alle epimorphen Bilder ihrer Elemente enthält, ist $R \cap S = 1$. Ist L ein in R (oder in S) enthaltener minimaler Normalteiler von G, so ist $RL/L \cap SL/L = L/L$. Aus der Miminalität von G folgt nun, daß G/L aus $\mathfrak{E}$ ist. Es gibt also eine Gruppe G mit den Eigenschaften 1) und 2) .

Hilfssatz 4.4: *Sei $\mathfrak{F}$ eine Formation und seien M und N Normalteiler der Gruppe G, so daß G/M und G/N aus $\mathfrak{F}$ sind. Gilt für die $\mathfrak{F}$-Untergruppen B/M bzw. C/N von G/M bzw. G/N die Gleichung $BN = CM$, so ist $(B \cap C)/(M \cap N)$ eine $\mathfrak{F}$-Untergruppe von $G/(M \cap N)$.*

Beweis: Sei G eine Gruppe minimaler Ordnung, für die die Behauptung des Satzes nicht gilt. Es folgt:

$$M \cap N = 1 \tag{1}$$

Aus den Gleichungen $BN = CM = BC$ folgen die Gleichungen:

$$\begin{aligned} o\,(B \cap C) &= \frac{o\,(B)\, o\,(C)}{o\,(BC)} = \frac{o\,(B)\, o\,(C)}{o\,(BN)} = \frac{o\,(C)\, o\,(B \cap N)}{o\,(N)}\,, \\ o\,(C) &= \frac{o\,(B \cap C)\, o\,(N)}{o\,(B \cap N)} = \frac{o\,(B \cap C)\, o\,(N)}{o\,(B \cap C \cap N)}\,; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= (B \cap C)N\,, \\ B &= (B \cap C)M\,; \end{aligned} \tag{2}$$

$$(3) \quad \begin{aligned} C/N &= (B \cap C)N/N \simeq (B \cap C)/(B \cap C \cap N)\,, \\ B/M &= (B \cap C)M/M \simeq (B \cap C)/(B \cap C \cap M)\,. \end{aligned}$$

Da C/N und B/M in $\mathfrak{F}$ liegen, gilt wegen (1) und (3):

$$(4) \qquad B \cap C \,\varepsilon\, \mathfrak{F}$$

Da G wegen der Minimalität von G nicht in $\mathfrak{F}$ liegt, können wir wegen (4) annehmen, daß $B \subset G$ ist .Da B/M und $B/(N \cap B)$ in $\mathfrak{F}^*$ enthalten sind, folgt dann aus der Minimalität von G:

(5) B besitzt eine $\mathfrak{F}$-Untergruppe E.

Nach Hilfssatz 1.4 (2) ist $EM/M = B/M$; da EN/N zu C/N in BN/N konjugiert ist, können wir annehmen, daß $EN = C$ ist. Es folgt:

$$E \subseteq EM \cap EN = B \cap C$$

Wegen (5), (4) und Hilfssatz 1.7 (3) ist dann $E = B \cap C$, und nach Hilfssatz 1.8 ist folglich $B \cap C$ eine $\mathfrak{F}$-Untergruppe von G, da $B \cap C$ eine $\mathfrak{F}$-Untergruppe von B und B/M eine $\mathfrak{F}$-Untergruppe von G/M ist. Da dies der Minimalität von G widerspricht, ist der Hilfssatz bewiesen.

Satz 4.5: *Mit $\mathfrak{F}$ ist auch $\mathfrak{F}^*$ eine Formation.*

Beweis: Sei G eine Gruppe minimaler Ordnung mit Normalteilern M und N, so daß G/M und G/N, aber nicht $G/(M \cap N)$ in $\mathfrak{F}^*$ liegen. Da wegen Bedingung *c*) von Definition 1.1 nun $\mathfrak{F}^*$ alle epimorphen Bilder ihrer Elemente enthält, können wir wegen Hilfssatz 4.3 annehmen, daß M und N minimale Normalteiler von G sind. Da auch $G/MN \varepsilon \mathfrak{F}^*$ ist, gibt es $\mathfrak{F}$-Untergruppen A/M bzw. B/N von G/M bzw. G/N, so daß $AN = BM$ ist. Aus Hilfssatz 4.4 folgt daher:

(1) G enthält eine $\mathfrak{F}$-Untergruppe C.

Sei D eine weitere $\mathfrak{F}$-Untergruppe von G. Da G/M und G/N in $\mathfrak{F}^*$ liegen, gibt es Elemente $g \varepsilon G$ und $m \varepsilon M$, so daß $CM = D^g M$ und $C^m N = D^g N$ ist. Nach Hilfssatz 4.4 und Hilfssatz 1.7 (3) ist

$$C^m = CM \cap C^m N = D^g M \cap D^g N = D^g\,.$$

Es gilt daher:

(2) Alle $\mathfrak{F}$-Untergruppen von G sind in G konjugiert.

Sei V eine C enthaltende, echte Untergruppe von G. Wegen den Bedingungen *b*) und *c*) von Definition 1.1 liegen dann auch $V/(M \cap V)$ und $V/(N \cap V)$ in $\mathfrak{F}^*$. Aus der Minimalität von G folgt:

(3) $$\text{Ist } C \subseteq V \subset G, \quad \text{so ist} \quad V \varepsilon \mathfrak{F}^* .$$

Sei $\mathfrak{S} = [V;\ V \simeq U/L \text{ mit } C \subseteq U \subseteq G \text{ und } L \subseteq U]$, und sei $\mathfrak{f}$ die Funktion, die einer Gruppe X aus $\mathfrak{S}$ die Klasse der $\mathfrak{F}$-Untergruppen von X zuordnet. Da G nicht in $\mathfrak{F}^*$ liegt, ist wegen Hilfssatz 1.2 dann $(\mathfrak{f}, \mathfrak{S})$ keine Sylowfunktion. Wegen (2) und (3) muß also $(\mathfrak{f}, \mathfrak{S})$ die Bedingung *c*) von Definition 1.1 verletzen.

Da nach Hilfssatz 1.7 (2) für einen Epimorphismus σ von G nun C^σ eine $\mathfrak{F}$-Untergruppe von G^σ ist, gibt es wegen (3) einen nicht trivialen Normalteiler K von G und eine $\mathfrak{F}$-Untergruppe W/K von G/K, so daß W/K nicht zu CK/K in G/K konjugiert ist. Da G/KM und G/KN aus $\mathfrak{F}^*$ sind, folgt aus der Minimalität von G, daß
$$KM \cap KN \neq K$$
ist. Da M und N minimale Normalteiler von G sind, ist also:

(4) $$KM \cap KN = KN = KM$$

Da WM/KM zu CKM/KM in G/KM konjugiert ist, enthält WM wegen (2) eine $\mathfrak{F}$-Untergruppe von G. Nach Hilfssatz 1.7 (3) ist $W/K \subset G/K$, und wegen (4) ist $WM = WN$; daher ist wegen der Minimalität von G mit $W/(M \cap W)$ und $W/(N \cap W)$ auch W in $\mathfrak{F}^*$. Da W/K eine $\mathfrak{F}$-Untergruppe von G/K ist, enthält daher nach Hilfssatz 1.8 auch W eine $\mathfrak{F}$-Untergruppe R von G, so daß $W = RK$ ist. Wegen (2) ist daher W/K zu CK/K in G/K konjugiert. Da dies vorher ausgeschlossen wurde, ist Satz 4.5 bewiesen.

Bemerkung: Ist $\mathfrak{F}$ die Klasse der π-Gruppen, so enthält $\mathfrak{F}^*$ nach den Hallschen Sätzen alle auflösbaren Gruppen und nach einem Satz von *H.* Wielandt (vgl. [9]) alle Gruppen, die eine nilpotente π-Hallgruppe besitzen.

Folgerung 4.6: *Sei $\mathfrak{F}$ eine Formation; dann enthält* $(\mathfrak{F}^*)^*$ *genau dann alle auflösbaren Gruppen, wenn $\mathfrak{F}^*$ sie enthält.*

Beweis: Enthält $\mathfrak{F}^*$ alle auflösbaren Gruppen, so ist nach Definition 1.6 die $\mathfrak{F}^*$-Untergruppe einer auflösbaren Gruppe G die Gruppe G selbst.

Wir nehmen nun an, daß $(\mathfrak{F}^*)^*$, aber nicht $\mathfrak{F}^*$ alle auflösbaren Gruppen enthält. Dann gibt es eine auflösbare Gruppe G minimaler Ordnung, die in $(\mathfrak{F}^*)^*$, aber nicht in $\mathfrak{F}^*$ liegt. Ist N ein minimaler Normalteiler von G, so besitzt wegen der Minimalität von G die Faktorgruppe G/N eine $\mathfrak{F}$-Untergruppe E/N.

Ist $E \subset G$, so liegt E wegen der Minimalität von G in $\mathfrak{F}^*$, und daher besitzt E eine $\mathfrak{F}$-Untergruppe C. Nach Hilfssatz 1.8 ist C eine $\mathfrak{F}$-Untergruppe von G, und nach Satz 1.10 liegt dann G in $\mathfrak{F}^*$. Da dies vorher ausgeschlossen wurde, ist $E = G$.

Da $(\mathfrak{F}^*)^*$ alle auflösbaren Gruppen enthält, bilden die auflösbaren Gruppen aus $\mathfrak{F}^*$ nach Satz 4.5 und Satz 4.2 eine gesättigte Formation, und folglich besitzt N ein Komplement V in G.

Da $G/N \,\varepsilon\, \mathfrak{F}$ und N ein abelscher minimaler Normalteiler von G ist, ist V nach Definition 1.6 eine $\mathfrak{F}$-Untergruppe von G. Das ist unmöglich, da nach Satz 1.10 dann G in $\mathfrak{F}^*$ läge.

Satz 4.7: *Sei $\mathfrak{F}$ eine Formation, und sei π eine Primzahlmenge, Dann bildet die Klasse der auflösbaren Gruppen X aus $\mathfrak{F}^*$, die Produkt einer $\mathfrak{F}$-Untergruppe und einer π-Hallgruppe von X sind, eine Formation.*

Beweis: Wir nehmen an, daß die Behauptung von Satz 4.7 falsch ist. Wegen Hilfssatz 4.3 gibt es dann eine auflösbare Gruppe G mit verschiedenen minimalen Normalteilern M und N, so daß G/M und G/N, aber nicht G Produkt einer π-Hallgruppe und einer $\mathfrak{F}$-Untergruppe sind. Da wegen Satz 4.5 nun G in $\mathfrak{F}^*$ liegt, gibt es eine π-Hallgruppe H und eine $\mathfrak{F}$-Untergruppe C von G, so daß

$$G = HCM = HCN$$

ist. Wegen der Auflösbarkeit von G haben M und N Primzahlpotenzordnung, und daher ist wegen der Minimalität von G

$$H \cap N = 1 = H \cap M .$$

Folglich sind CM und CN Produkte einer $\mathfrak{F}$-Untergruppe und einer π'-Hallgruppe von G. Nach Satz 2.4 ist $CM = CN$; da $M \cap N = 1$ und da $\mathfrak{F}$ eine Formation ist, ist $CM \varepsilon \mathfrak{F}$. Da C eine $\mathfrak{F}$-Untergruppe von G ist, gilt nach Hilfssatz 1.7 (3) die Gleichung

$$CM = C .$$

Folglich ist $G = HC$. Dieser Widerspruch beweist Satz 4.7.

Folgerung 4.8: *Sei $\mathfrak{F}$ eine Formation, und sei π eine Primzahlmenge. Dann ist auch $(\mathfrak{F}^*)_\pi$ eine Formation.*

Beweis: Nach Definition 1.9 enthält $(\mathfrak{F}^*)_\pi$ nur auflösbare Gruppen; ist also $\mathfrak{g}$ die Funktion, die einer Gruppe X aus $(\mathfrak{F}^*)_\pi$ die Produkte einer $\mathfrak{F}$-Untergruppe und einer π-Hallgruppe von X zuordnet, so ist nach Satz 1.10 und Satz 2.4 dann $(\mathfrak{g}, (\mathfrak{F}^*)_\pi)$ eine Sylowfunktion. Nach Satz 4.7 bilden die Gruppen Y aus $(\mathfrak{F}^*)_\pi$ mit der Eigenschaft $\mathfrak{g}Y = Y$ eine Formation $\mathfrak{G}$. Da nach Hilfssatz 1.4 (2) und Satz 1.10 die Klasse der auflösbaren Gruppen aus $\mathfrak{G}^*$ mit $(\mathfrak{F}^*)_\pi$ übereinstimmt, folgt aus Satz 4.5 die Behauptung.

Hilfssatz 4.9: *Ist $(\mathfrak{f}, \mathfrak{D})$ eine Sylowfunktion und bilden die Gruppen G aus $\mathfrak{D}$ mit der Eigenschaft $\mathfrak{f}G = G$ eine Formation, so ist auch die Klasse der Gruppen X aus $\mathfrak{D}$ mit der Eigenschaft $\mathfrak{n}\mathfrak{f}X = X$ eine Formation.*

Beweis: Nach Hilfssatz 1.3 ist $(\mathfrak{n}\mathfrak{f}, \mathfrak{D})$ eine Sylowfunktion. Daher folgt die Bedingung *a*) von Definition 4.1 aus der Bedingung *c*) von Definition 1.1. Wir müssen noch zeigen: Ist C aus $\mathfrak{f}G$, sind M, N, CM und CN Normalteiler von G, so ist auch $C(M \cap N)$ normal in G.

Sei G eine Gruppe minimaler Ordnung, für welche diese Behauptung falsch ist. Nach Hilfssatz 4.3 können wir annehmen, daß M und N verschiedene minimale Normalteiler von G sind.

Aus $CM \cap CN \cap M = 1$ würde folgen, daß $CM \cap CN$ ein Komplement von M in CM ist. Dann wäre $C = CM \cap CN$ normal in G, was wegen der Minimalität von G unmöglich ist. Da Gleiches für N statt M gilt, folgt aus der Minimalität von G die Ungleichung

$$MN \subseteq CM \cap CN\,,$$

und daher gilt:

$$CM = CM \cap CN = CN$$

Da die Gruppen X mit der Eigenschaft $\mathfrak{f}X = X$ eine Formation bilden, ist also $\mathfrak{f}(CM) = CM$. Da C eine $\mathfrak{f}$-Untergruppe von G ist, gilt nach Hilfssatz 1.7 (3):

$$CM = C = CN$$

Folglich ist C ein Normalteiler von G.

Satz 4.10: *Sei $\mathfrak{F}$ eine Formation, und sei* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{D})$ *eine Sylowfunktion, so daß $\mathfrak{D}$ eine Formation ist. Dann sind $\mathfrak{F}^*\mathfrak{D}$ und die Klasse der Gruppen G aus $\mathfrak{D} \cap \mathfrak{F}^*$, in der eine $\mathfrak{F}$-Untergruppe von G von einer* $\mathfrak{g}$-*Untergruppe von G normalisiert wird, Formationen.*

Beweis: Wir nehmen zunächst an, daß $\mathfrak{F}^*\mathfrak{D}$ keine Formation ist. Wegen Hilfssatz 4.3 gibt es dann eine Gruppe G und verschiedene minimale Normalteiler M und N von G, so daß G/M und G/N, aber nicht G in $\mathfrak{F}^*\mathfrak{D}$ liegen und so daß G minimal bzgl. dieser Eigenschaft ist.

Sei $\mathfrak{f}$ die Funktion, die jeder Gruppe X aus $\mathfrak{F}^*$ die Klasse der $\mathfrak{F}$-Untergruppen von X zuordnet. Wegen der Minimalität von G liegt ein Element U aus $\mathfrak{n}\mathfrak{f}G$ und jede U enthaltende Untergrup- von G nicht in $\mathfrak{F}^*\mathfrak{D}$. Da $UM/M = (UM \cap UN)M/M$ und $UN/N = (UM \cap UN)N/N$ in $\mathfrak{D}$ und in $\mathfrak{F}^*\mathfrak{D}$ enthalten sind und da keine Obergruppe von U in $\mathfrak{F}^*\mathfrak{D}$ liegt, schließen wir aus der Minimalität von G, daß

$$UM \cap UN = G$$

ist. Dann ist $UM = UN = G$, und da $\mathfrak{D}$ eine Formation ist, liegt auch U in $\mathfrak{D}$. Dies widerspricht der Minimalität von G.

Um die zweite Behauptung des Satzes zu beweisen, müssen wir wegen Hilfssatz 4.3 noch zeigen: Liegt die Gruppe G in $\mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{D}$, ist U ein Element aus $\mathfrak{n}\mathfrak{f}G$ und sind M und N verschiedene minimale Normalteiler von G, so daß UM/M bzw. UN/N eine $\mathfrak{g}$-Untergruppe von G/M bzw. G/N enthalten, so enthält U ein Element aus $\mathfrak{g}G$. Wie bereits in diesem Satz bewiesen wurde, liegt U in $\mathfrak{D}$. Nach Hilfssatz 1.4 (1) ist in UM und in UN eine $\mathfrak{g}$-Untergruppe von G enthalten. Aus der Konjugiertheit der $\mathfrak{g}$-Untergruppen in UMN folgt, daß auch $UM \cap UN$ eine $\mathfrak{g}$-Untergruppe von G enthäalt. Da

$$UM/M \simeq (UM \cap UN)/(UM \cap UN \cap M)$$

und

$$UN/N \simeq (UM \cap UN)/(UM \cap UN \cap N)$$

ist, schließe wir aus Hilfssatz 4.9, daß

$$UM \cap UN = \mathfrak{n}\mathfrak{f}(UM \cap UN) = U$$

ist. Folglich enthält U eine $\mathfrak{g}$-Untergruppe von G.

Folgerung 4.11: *Sei* $(\mathfrak{f}, \mathfrak{D})$ *eine Sylowfunktion, so daß* $\mathfrak{D}$ *eine Formation ist. Dann ist auch die Klasse der auflösbaren Gruppen* G *aus* $\mathfrak{D}$ *mit der Eigenschaft, daß eine* $\mathfrak{f}$*-Untergruppe von* G *in einem Systemnormalisator von* G *enthalten ist, eine Formation.*

Beweis: Ist π eine Primzahlmenge, so bilden die π-Gruppen und wegen Hilfssatz 4.9 die auflösbaren Gruppen, die einen π-Hallschen Normalteiler besitzen, Formationen. Die dazugehörigen $\mathfrak{F}$-Untergruppen sind in auflösbaren Gruppen die π-Hallgruppen und die Normalisatoren der π-Hallgruppen. Da die letztgenannten Untergruppen normalisatorgleich sind, bilden wegen Satz 4.10 die auflösbaren Gruppen, in denen eine $\mathfrak{f}$-Untergruppe im Normalisator einer π-Hallgruppe enthalten ist, eine Formation. Da dies für alle Primzahlmengen π richtig ist, folgt aus der Definition des Systemnormalisators die Behauptung.

Folgerung 4.12: *Die auflösbaren Gruppen, in denen die Systemnormalisatoren normalisatorgleich sind, bilden eine Formation.*

Beweis: Die $\mathfrak{f}$-Untergruppen seien hier die Cartergruppen. Sie sind nilpotent, normalisatorgleich und für alle auflösbaren Gruppen erklärt. Da sie nach R. W. Carter [3] stets einen Systemnormalisator enthalten, erhalten wir aus Folgerung 4.11 die Behauptung.

Bemerkung: Folgerung 4.12 wurde bereits von R. W. Carter in [3] unter Benutzung der Deck- und Meideeigenschaften eines Systemnormalisators bewiesen.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] R. BAER: *Complementation in finite groups.* Centro Intern. Mat. Estivo, Rom 1959.

[2] R. W. CARTER: *On a class of finite soluble groups.* Proc. London Math. Soc. (3) 9 (1959) S. 623-640.

[3] R. W. CARTER: *Nilpotent self-normalizing subgroups of soluble groups.* Math. Z. 75 (1961) S. 136-139.

[4] W. GASCHÜTZ: *Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen.* Math. Z. 80 (1963) S. 300-305.

[5] W. GASCHÜTZ und U. LUBESEDER: *Kenzeichnung gesättigter Formationen.* Math. Z. 82 (1963) S. 198-199.

[6] P. HALL: *A note on soluble groupe.* J. London Math. Soc. 3 (1928) S. 98-105.

[7] P. HALL: *On the Sylow systems of soluble groups.* Proc. London Math. Soc. (2) 43 (1937) S. 507-528.

[8] O. ORE: *Contributions to the theory of groups finite orders.* Duke Math. J. 5 (1938) S. 431-460.

[9] H. WIELANDT: *Zum Satz von Sylow.* Math. Z. 60 (1954) S. 407-8.

Manoscritto pervenuto in redazione il 1° settembre 1965.