RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIOVANNI ZACHER

Caratterizzazione dei gruppi immagini omomorfe duali di un gruppo finito

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 31 (1961), p. 412-422

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1961__31__412_0>

CARATTERIZZAZIONE DEI GRUPPI IMMAGINI OMOMORFE DUALI DI UN GRUPPO FINITO

Nota (*) *di* GIOVANNI ZACHER (*a Padova*)

Baer si è occupato di problemi di « dualità » relativi al reticolo dei sottogruppi di un gruppo in due lavori, [1] [1]) e [2], apparsi nel 1937 e nel 1939. In questi lavori dimostrò, fra le altre cose, che i gruppi dotati di duale [2]) sono periodici e caratterizzò i gruppi abeliani con duale.

Nel 1950 Suzuki, nel lavoro [9], comparso nel 1951, ha determinato i gruppi finiti risolubili dotati di duale, risultato da me esteso recentemente ai gruppi risolubili infiniti [12]. E in un lavoro pubblicato nel 1955 sui centralizzanti dei sottogruppi di un gruppo finito [7], Gaschütz ebbe a considerare, dimostrando che riuscivano risolubili, gruppi con l'ordine finito e col reticolo dei sottogruppi dotato di un particolare automorfismo duale involutorio. Curzio invece ha studiato [5] una classe di gruppi finiti col reticolo di composizione autoduale. In un lavoro, [11], apparso nel 1960, io mi sono occupato poi dei gruppi, il cui reticolo dei sottogruppi è immagine omomorfa duale di quello di un gruppo d'ordine finito, ed ho dimostrato che la loro classificazione si riconduce essenzialmente alla determinazione dei gruppi finiti dotati di duale e semplici.

(*) Pervenuta in redazione il 10 luglio 1961.
Indirizzo dell'A.: Seminario matematico, Università, Padova.

[1]) I numeri tra parentesi quadre si riferiscono alla bibliografia che compare alla fine di questa Nota.

[2]) Per la terminologia rimando al successivo n. 1 di questa Nota.

Ebbene lo scopo precipuo di questa Nota è di stabilire che:

Gli unici gruppi finiti semplici dotati di duale sono quelli d'ordine primo.

Da questo e dai teoremi ricordati non sarà difficile dedurre che:

Se G è un gruppo d'ordine finito, le seguenti condizioni sono equivalenti fra di loro:

a) G è l'immagine omomorfa duale di un gruppo finito;

b) G è il prodotto diretto di p-gruppi modulari non hamiltoniani e di P-gruppi non abeliani con gli ordini primi fra loro;

c) G è risolubile e dotato di duale;

d) il reticolo dei sottogruppi di G è isomorfo al reticolo dei sottogruppi di un gruppo abeliano;

e) G è risolubile ed autoduale.

Ne segue, in particolare, la risoluzione, per i gruppi d'ordine finito, di uno dei problemi proposti da Birkhoff {[3], problema 37}.

1. - Per rendere più agevole la lettura di questa Nota, ricordo in questo numero alcune convenzioni circa la terminologia e le notazioni.

Lettere maiuscole in carattere gotico indicano gruppi; $\mathfrak{G}_p$ indica un sottogruppo di Sylow con l'ordine uguale ad una potenza di p; 1 è il sottogruppo identico oppure l'elemento identico; $|\mathfrak{G}|$ è l'ordine di $\mathfrak{G}$, $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$ il reticolo dei sottogruppi di $\mathfrak{G}$, e $\Phi_1(\mathfrak{G})$ il sottogruppo di Frattini di $\mathfrak{G}$.

La notazione $\mathfrak{H} < \mathfrak{G}$ significa che $\mathfrak{H}$ è un sottogruppo proprio di $\mathfrak{G}$; se $\mathfrak{H} \leqslant \mathfrak{G}$, $\mathscr{N}(\mathfrak{H})$ indica il normalizzante di $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{G}$.

Un sottogruppo non identico $\mathfrak{H}$ di $\mathfrak{G}$ è un sottogruppo di Hall di $\mathfrak{G}$ se il suo ordine è primo con il suo indice in $\mathfrak{G}$.

Se φ è un omomorfismo di $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$ in $\mathscr{L}(\overline{\mathfrak{G}})$, $\varphi(\mathfrak{H})$ indicherà l'immagine mediante φ del sottogruppo $\mathfrak{H}$ di $\mathfrak{G}$ in $\mathscr{L}(\overline{\mathfrak{G}})$.

Un gruppo $\overline{\mathfrak{G}}$ è l'immagine omomorfa duale di un gruppo $\mathfrak{G}$ se esiste un omomorfismo duale ψ di $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$ su $\mathscr{L}(\overline{\mathfrak{G}})$, vale a dire una trasformazione univoca di $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$ su $\mathscr{L}(\overline{\mathfrak{G}})$ tale che $\psi(\mathfrak{H} \cup \mathfrak{N}) = \psi(\mathfrak{H}) \cap \psi(\mathfrak{N})$, $\psi(\mathfrak{H} \cap \mathfrak{N}) = \psi(\mathfrak{H}) \cup \psi(\mathfrak{N})$.

Se la corrispondenza è biunivoca, si parla di ψ come di un isomorfismo duale e si dice che $\mathfrak{G}$ è dotato di duale.

Un sottogruppo $\mathfrak{M}$ di $\mathfrak{G}$ si dice $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$-caratteristico se coincide con la propria immagine in ogni automorfismo di $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$.

Avverto finalmente, una volta per tutte, che in questa Nota prendo in considerazione soltanto gruppi d'ordine finito.

2. - Presentiamo ora due definizioni, utili per quanto esporremo.

DEFINIZIONE I: Un sottogruppo $\mathfrak{N}$ di un gruppo $\mathfrak{G}$ si dirà rigidamente legato ad un sottogruppo $\mathfrak{M}$ di $\mathfrak{G}$ se per ogni automorfismo φ di $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$ l'essere $\varphi(\mathfrak{M}) = \mathfrak{M}$ implica $\varphi(\mathfrak{N}) = \mathfrak{N}$.

DEFINIZIONE II: Se $\mathfrak{N}$ ed $\mathfrak{M}$ è una coppia di sottogruppi di un gruppo $\mathfrak{G}$, si dirà che $\mathfrak{N}$ è r-normale (reticolarmente normale) in $\mathfrak{M}$, se $\mathfrak{N}$ è un sottogruppo normale di $\mathfrak{M}$ e se per ogni automorfismo φ di $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$ risulta pure $\varphi(\mathfrak{N})$ normale in $\varphi(\mathfrak{M})$.

Naturalmente è ovvia la seguente:

PROPOSIZIONE I: I sottogruppi r-normali di un sottogruppo $\mathfrak{M}$ di $\mathfrak{G}$ formano un sottoreticolo di $\mathscr{L}(\mathfrak{M})$, e che se $\mathfrak{N}$ è r-normale in $\mathfrak{M}'$ ed $\mathfrak{M}''$, lo è sia in $\mathfrak{M}' \cup \mathfrak{M}''$ che in $\mathfrak{M}' \cap \mathfrak{M}''$.

Le due proposizioni che seguono chiariscono la relazione che intercorre tra le due nozioni testè introdotte.

PROPOSIZIONE II: Se $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}$ sono due sottogruppi di un gruppo $\mathfrak{G}$, se $\mathfrak{N}$ è rigidamente legato ad $\mathfrak{M}$ in $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$, e se $\mathfrak{N} \leqslant \mathfrak{M}$, allora $\mathfrak{N}$ è r-normale in $\mathfrak{M}$.

Infatti sia φ un automorfismo di $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$ e sia a un elemento di $\varphi(\mathfrak{M})$. Se α è l'automorfismo interno di $\mathfrak{G}$ indotto da a in $\mathfrak{G}$, allora α induce un automorfismo α^* in $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$; posto $\chi = \varphi^{-1}\alpha^*\varphi$, χ risulta un automorfismo di $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$ con $\chi(\mathfrak{M}) = \mathfrak{M}$, e quindi pure $\chi(\mathfrak{N}) = \mathfrak{N}$; pertanto $\alpha^*(\varphi(\mathfrak{N})) = \varphi(\mathfrak{N})$, ossia $\varphi(\mathfrak{N})$ è normale in $\varphi(\mathfrak{M})$.

PROPOSIZIONE III: Se $\mathfrak{N} \leqslant \mathfrak{G}$ è r-normale nel normalizzante $\mathscr{N}(\mathfrak{N})$ di $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{G}$, $\mathscr{N}(\mathfrak{N})$ è rigidamente legato ad $\mathfrak{N}$.

Infatti si ha $\varphi(\mathfrak{N})$ normale in $\varphi(\mathscr{N}(\mathfrak{N}))$, e quindi se $\varphi(\mathfrak{N}) = \mathfrak{N}$, è anche $\varphi(\mathscr{N}(\mathfrak{N})) = \varphi(\mathfrak{N})$.

E passiamo alla dimostrazione di un primo lemma.

LEMMA I: *Sia ψ un isomorfismo duale tra i reticoli $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$ ed $\mathscr{L}(\overline{\mathfrak{G}})$ di due gruppi $\mathfrak{G}$ e $\overline{\mathfrak{G}}$. Se $\mathfrak{M}$ è un sottogruppo di $\mathfrak{G}$ ed $\mathfrak{N}$ un sottogruppo r-normale di $\mathfrak{M}$, allora esiste un gruppo $\mathfrak{H}$ con $\mathfrak{M} \leqslant \mathfrak{H}$ e tale che $\mathfrak{N}$ è normale in $\mathfrak{H}$ e $\psi(\mathfrak{H})$ è normale in $\varphi(\mathfrak{N})$; ψ subordina un isomorfismo duale tra i due reticoli $\mathscr{L}(\mathfrak{H}/\mathfrak{N})$ ed $\mathscr{L}(\psi(\mathfrak{N})/\psi(\mathfrak{H}))$.*

Posto per semplicità, $\psi(\mathfrak{N}) = \overline{\mathfrak{N}}$, $\psi(\mathfrak{M}) = \overline{\mathfrak{M}}$, risulta ovviamente $\overline{\mathfrak{M}} \leqslant \overline{\mathfrak{N}}$. Se a è un elemento qualunque di $\overline{\mathfrak{N}}$, consideriamo l'automorfismo interno α indotto da a in $\overline{\mathfrak{G}}$, e poniamo $\overline{\mathfrak{H}} = \bigcap_{a \in \overline{\mathfrak{N}}} \alpha(\overline{\mathfrak{M}})$. Allora $\overline{\mathfrak{H}}$ è normale in $\overline{\mathfrak{N}}$. Se facciamo vedere che $\mathfrak{N}$ è normale in $\mathfrak{H} = \psi^{-1}(\overline{\mathfrak{H}})$, la conclusione è immediata. Ora $\psi^{-1}(\alpha(\overline{\mathfrak{M}}))$ non è altro che il trasformato di $\mathfrak{M}$ mediante l'automorfismo χ di $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$ definito dalla posizione $\chi = \psi^{-1}\alpha^*\psi$. Dunque $\mathfrak{N}$ è normale in $\chi(\mathfrak{M})$ atteso che $\chi(\mathfrak{N}) = \mathfrak{N}$. Ma allora $\mathfrak{N}$ è normale in $\mathfrak{H}$, tenuto conto che $\mathfrak{H} = \bigcup_{\chi = \psi^{-1}\alpha^*\psi} \chi(\mathfrak{M})$ con a che descrive $\mathfrak{N}$.

COROLLARIO I: *Se $\mathfrak{G}$ è un gruppo con duale, se $\mathfrak{N}$ è normale in $\mathfrak{M}$ ed $\mathfrak{M}$ è rigidamente legato ad $\mathfrak{N}$ in $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$, allora il gruppo $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ ha duale.*

È ovviamente $\mathfrak{H} = \mathfrak{M}$.

Facciamo seguire ora alcune condizioni sufficienti perchè un sottogruppo $\mathfrak{N}$ di $\mathfrak{G}$ sia rigidamente legato ad un sottogruppo $\mathfrak{M}$ di $\mathfrak{G}$, o perchè $\mathfrak{N}$ sia r-normale in un sottogruppo $\mathfrak{M}$ di $\mathfrak{G}$.

PROPOSIZIONE IV: Se $\mathfrak{N} \leqslant \mathfrak{M} \leqslant \mathfrak{H}$ è una terna di sottogruppi di $\mathfrak{G}$ e se $\mathfrak{M}$ è r-normale in $\mathfrak{H}$, mentre $\mathfrak{N}$ è $\mathscr{L}(\mathfrak{M})$-caratteristico, allora $\mathfrak{N}$ è r-normale in $\mathfrak{H}$.

Infatti se φ è un automorfismo di $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$, $\varphi(\mathfrak{N})$ è $\mathscr{L}(\varphi(\mathfrak{M}))$-caratteristico in $\varphi(\mathfrak{M})$, e $\varphi(\mathfrak{M})$ è normale in $\varphi(\mathfrak{H})$. Ciò basta per concludere che $\varphi(\mathfrak{N})$ è normale in $\varphi(\mathfrak{H})$.

Ricordiamo che un automorfismo φ di $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$ si dice non singolare [3]) se $|\,\varphi(\mathfrak{H})\,| = |\,\mathfrak{H}\,|$ per ogni sottogruppo $\mathfrak{H}$ di $\mathfrak{G}$.

Si ha allora

PROPOSIZIONE V: Se $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$ è privo di automorfismi singolari, se $\mathfrak{N}$ è un sottogruppo di Hall del sottogruppo $\mathfrak{M}$ di $\mathfrak{G}$, allora $\mathfrak{N}$ è r-normale in $\mathfrak{M}$, se è normale in $\mathfrak{M}$.

Per la dimostrazione vedasi teorema 14 a pag. 50 in [10].

E ancora

PROPOSIZIONE VI: Se $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$ è privo di automorfismi singolari, se $\mathfrak{N}$ è un p-sottogruppo normale di un sottogruppo $\mathfrak{M}$ di $\mathfrak{G}$, se $\mathfrak{N}$ è r-normale nel p-sottogruppo di Sylow che lo contiene, $\mathfrak{N}$ è r-normale in $\mathfrak{M}$.

---

[3]) Vedasi pag. 42 in [10].

Corollario II: *Sia $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$ privo di automorfismi singolari, $\mathfrak{N}$ un p-gruppo normale di un soitogruppo $\mathfrak{M}$ di $\mathfrak{G}$ e $\mathfrak{S}$ un sottogruppo di Sylow di $\mathfrak{M}$ contenente $\mathfrak{N}$. Se $\mathfrak{S}/\mathfrak{N}$ è abeliano elementare, $\mathfrak{N}$ r-normale in $\mathfrak{M}$.*

In virtù della VI, basterà dimostrare che $\mathfrak{N}$ è r-normale in $\mathfrak{S}$. Ora se φ è un automorfismo di $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$, $\varphi(\mathfrak{S})$ è un p-sottogruppo di Sylow di $\varphi(\mathfrak{M})$, e quindi $\varphi(\mathfrak{N})$ è normale in $\varphi(\mathfrak{M})$ perchè $\varphi(\mathfrak{N}) \geqslant \Phi_1(\varphi(\mathfrak{S}))$, come segue dal fatto che $\mathfrak{N} \geqslant \Phi_1(\mathfrak{S})$ e che si ha $\varphi(\Phi_1(\mathfrak{H})) = \Phi_1(\varphi(\mathfrak{H}))$ qualunque sia $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{G}$.

Lemma II: *Se $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$ è privo di automorfismi singolari, se $\mathfrak{M}$ è un sottogruppo r-normale di un p-sottogruppo di Sylow $\mathfrak{G}_p$ di $\mathfrak{G}$, se $\mathfrak{N} \leqslant \mathfrak{M}$ è $\mathscr{L}(\mathfrak{M})$-caratteristico, allora il normalizzante $\mathscr{N}(\mathfrak{N})$ di $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{G}$ è rigidamente legato ad $\mathfrak{N}$ in $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$.*

$\mathfrak{N}$ è r-normale in $\mathscr{N}(\mathfrak{N})$ in virtù della IV e VI. Ma allora per la III, $\mathscr{N}(\mathfrak{N})$ è rigidamente legato ad $\mathfrak{N}$.

Lemma III: *Sia $\mathfrak{D}$ un gruppo intersezione di due p-sottogruppi distinti di $\mathfrak{G}$, e $\mathfrak{D}$ sia massimo rispetto a tale proprietà. Allora il normalizzante $\mathscr{N}(\mathfrak{D})$ di $\mathfrak{D}$ in $\mathfrak{G}$ è rigidamente legato a $\mathfrak{D}$ in $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$.*

Infatti $\mathfrak{D}$ coincide con l'intersezione di tutti i p-sottogruppi di Sylow di $\mathscr{N}(\mathfrak{D})$. Se ora φ è un automorfismo di $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$ che tiene fisso $\mathfrak{D}$, allora φ muta i p-sottogruppi di Sylow di $\mathscr{N}(\mathfrak{D})$ in quelli di $\varphi(\mathscr{N}(\mathfrak{D}))$, per cui sarà $\mathfrak{D}$ normale in $\varphi(\mathscr{N}(\mathfrak{D}))$, il che implica ovviamente $\varphi(\mathscr{N}(\mathfrak{D})) = \mathscr{N}(\mathfrak{D})$.

Infine enunciamo la seguente caratterizzazione, dovuta a Suzuki [9], dei gruppi finiti risolubili dotati di duale.

Proposizione VII: Un gruppo finito $\mathfrak{G}$ ha duale se e solo se è il prodotto diretto di p-gruppi modulari non hamiltoniani e di P-gruppi [4]) non abeliani con gli ordini a due a due primi fra loro.

Per comodità di esposizione formuliamo ancora esplicitamente il seguente criterio che è una conseguenza immediata della VII.

Proposizione VIII: Un gruppo $\mathfrak{G}$ non ha duale se contiene un sottogruppo non speciale diverso da un P-gruppo.

---

[4]) I P-gruppi [10] sono i p-gruppi abeliani elementari, ed ogni gruppo unione di un p-gruppo abeliano elementare, $\mathfrak{P}$, e di un gruppo ciclico $\{b\}$ con l'ordine primo q, diverso da p e con l'elemento generatore b soddisfacente per ogni a di $\mathfrak{P}$ alla $bab^{-1} = a^r$, r essendo un intero che non dipende da a e che verifica le $r \not\equiv 1$ mod. p, $r \equiv 1$ mod. p.

3. - Il presente numero dedichiamo alla dimostrazione della non esistenza di gruppi semplici non abeliani con duale.

Osserviamo anzitutto che se $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$ è dualmente isomorfo ad $\mathscr{L}(\overline{\mathfrak{G}})$, se $\mathfrak{G}$ è semplice tale è pure $\overline{\mathfrak{G}}$ e viceversa, come segue dal teorema I in [11]. E ancora, sempre in virtù di questo teorema, se fra i gruppi semplici non abeliani con duale, $\mathfrak{G}$ è quello di ordine minimo, ogni gruppo $\mathfrak{H}$ con duale ed ordine $|\mathfrak{H}|$ minore di $|\mathfrak{G}|$ è risolubile. Inoltre gli automorfismi di $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$ sono tutti non singolari, se $\mathfrak{G}$ è semplice [10].

Ammettiamo che l'insieme J dei gruppi semplici non abeliani con duale non sia vuoto; allora sia detto una volta per sempre che in tutto questo numero con $\mathfrak{G}$ indicheremo quello fra i gruppi di J che ha ordine minimo. Inoltre con ψ indicheremo un fissato isomorfismo duale tra $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$ ed il reticolo $\mathscr{L}(\overline{\mathfrak{G}})$ di un conveniente gruppo $\overline{\mathfrak{G}}$, semplice.

Una serie di proposizioni che andremo via via dimostrando ci porterà a concludere che era assurdo supporre l'insieme J non vuoto.

La nostra indagine si concentra alla determinazione della struttura dei sottogruppi di Sylow di $\mathfrak{G}$ relativi al minimo divisore primo di $|\mathfrak{G}|$ e al modo come questi sono immersi in $\mathfrak{G}$. Pertanto con p indicheremo nel seguito sempre il più piccolo divisore primo di $|\mathfrak{G}|$.

E incominciamo col provare che:

A. - Se $\mathfrak{G}_p$ è un sottogruppo di Sylow di $\mathfrak{G}$ relativo al numero primo p, minimo divisore primo di $|\mathfrak{G}|$, esiste almeno un altro sottogruppo di Sylow di $\mathfrak{G}$ a intersezione non identica con $\mathfrak{G}_p$, a meno che $\mathfrak{G}_p$ non sia un gruppo generalizzato dei quaternioni.

Supponiamo che due qualunque p-sottogruppi di Sylow abbiano intersezione identica, e sia $\mathfrak{H}$ un sottogruppo minimo di un fissato p-sottogruppo di Sylow $\mathfrak{G}_p$; inoltre sia φ un automorfismo di $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$. Poichè $\mathfrak{G}$ è semplice, φ non è singolare, sicchè $\varphi(\mathfrak{G}_p)$ è ancora un p-sottogruppo di Sylòw di $\mathfrak{G}$. Se allora $\varphi(\mathfrak{H}) = \mathfrak{H}$, risulta pure $\varphi(\mathfrak{G}_p) = \mathfrak{G}_p$, perchè altrimenti l'intersezione $\varphi(\mathfrak{G}_p) \cap \mathfrak{G}_p$ non sarebbe identica, contro ipotesi. $\mathfrak{G}_p$ è dunque rigidamente legato ad $\mathfrak{H}$ in $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$. Ma allora $\psi(\mathfrak{G}_p)$ è normale in $\psi(\mathfrak{H})$ (prop. II). Ne segue che $\mathfrak{G}_p$ può contenere un solo sottogruppo minimo perchè in caso contrario $\overline{\mathfrak{G}}$ non sarebbe semplice. $\mathfrak{G}_p$ dunque è ciclico o generalizzato dei quaternioni [5]; poichè $\mathfrak{G}$ è semplice non abeliano, per un noto teorema di Burnside [6]), $\mathfrak{G}_p$ non può essere ciclico [7]).

Facciamo ora vedere che:

B. - Se $\mathfrak{D}$ è una intersezione massima non identica di due sottogruppi di Sylow distinti di $\mathfrak{G}$ d'ordine p^α, il normalizzante $\mathscr{N}(\mathfrak{D})$ di $\mathfrak{D}$ in $\mathfrak{G}$ ha ordine p^2q con q numero primo maggiore di p, $p < q$, ed $\mathscr{N}(\mathfrak{D})$ risulta essere o un gruppo irriducibile a sottogruppi di Sylow ciclici, o un prodotto diretto di $\mathfrak{D}$ e di un gruppo $\mathfrak{R}$ isomorfo ad un P-gruppo d'ordine pq.

Il gruppo $\mathscr{N}(\mathfrak{D})$ è rigidamente legato a $\mathfrak{D}$ in $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$ (lemma III), per cui $\mathscr{N}(\mathfrak{D})/\mathfrak{D}$ ha duale (Corollario I). Poichè $|\mathscr{N}(\mathfrak{D})| < |\mathfrak{G}|$, $\mathscr{N}(\mathfrak{D})/\mathfrak{D}$ (e quindi pure $\mathscr{N}(\mathfrak{D})$) è risolubile. Se si tiene presente che i p-sottogruppi di Sylow di $\mathscr{N}(\mathfrak{D})/\mathfrak{D}$ non sono normali [8]), si avrà per VII che $\mathscr{N}(\mathfrak{D})/\mathfrak{D} = \mathfrak{A}/\mathfrak{D} \times \mathfrak{C}/\mathfrak{D}$, con $\mathfrak{A}/\mathfrak{D}$ un P-gruppo d'ordine pq^β con $p < q$, $\beta \geqslant 1$, e $\mathfrak{C}/\mathfrak{D}$ gruppo risolubile con duale e d'ordine primo con quello di $\mathfrak{A}/\mathfrak{D}$. Consideriamo il sottogruppo di Frattini $\Phi_1(\mathfrak{A})$ di $\mathfrak{A}$. È ovviamente $\Phi_1(\mathfrak{A}) \leqslant \mathfrak{D}$; proviamo che $\Phi_1(\mathfrak{A}) = \mathfrak{D}$, se $\Phi_1(\mathfrak{A}) \neq 1$. Infatti $\Phi_1(\mathfrak{A})$ è r-normale in $\mathfrak{A}$ (prop. IV) e quindi per il lemma I esiste un gruppo $\mathfrak{H} \geqslant \mathfrak{A}$ tale che $\mathfrak{H}/\Phi_1(\mathfrak{A})$ ha quale e quindi è risolubile pure. Ora i p-sottogruppi di Sylow di $\mathfrak{H}/\Phi_1(\mathfrak{A})$ hanno ordini divisibili almeno per p^2 se $\Phi_1(\mathfrak{A}) < \mathfrak{D}$, il che comporta (Prop. VII) che in $\mathfrak{A}/\mathfrak{D}$ i p-sottogruppi di Sylow siano normali, il che, come si è osservato, non è vero. È dunque $\Phi_1(\mathfrak{A}) = \mathfrak{D}$, se $\Phi_1(\mathfrak{A}) \neq 1$.

Da $\Phi_1(\mathfrak{A}) = \mathfrak{D}$ segue che $\mathfrak{A}$ è supersolubile [9]), essendo tale $\mathfrak{A}/\mathfrak{D}$. Ma allora esiste un solo sottogruppo di Sylow $\mathfrak{A}_q$ di $\mathfrak{A}$ e si ha $\mathfrak{D} \cup \mathfrak{A}_q = \mathfrak{D} \times \mathfrak{A}_q$. Se $\mathfrak{A}_p$ è un p-sottogruppo di Sylow di $\mathfrak{A}$, il gruppo $\Phi_1(\mathfrak{A})$ essendo contenuto in $\mathfrak{D}$, è r-normale in $\mathfrak{A}$ (Corollario II). Il che comporta che sia $\Phi_1(\mathfrak{A}_p) = \mathfrak{D}$ (lemma I

---

[5]) Vedasi ad es. [13], teorema 15 a pag. 148.

[6]) Vedasi ad es. [13], teorema 4 a pag. 169.

[7]) Anche la seconda alternativa si potrebbe escludere fin d'ora ricorrendo ad un recente risultato di Brauer e Suzuki [4].

[8]) Vedasi ad es. [13] teorema 7 a pag. 138.

[9]) Satz 10 a pag. 148 in [8].

e prop. VII), ammesso che sia $\Phi_1(\mathfrak{A}_p) \neq 1$. $\mathfrak{A}_p$ è dunque ciclico se $\Phi_1(\mathfrak{A}_p) \neq 1$, e se $\mathfrak{T}$ è sottogruppo minimo di $\mathfrak{A}_p$, $\mathfrak{T}$ è r-normale in $\mathfrak{A}$ (prop. VI). Ma allora deve essere $\mathfrak{D} = \mathfrak{T}$ ed $\mathfrak{A}$ avere ordine p^2q^β. Se invece $\Phi_1(\mathfrak{A}_p) = 1$, un qualunque sottogruppo ciclico $\{a\}$ di $\mathfrak{D}$ è r-normale in $\mathfrak{A}$ (Corollario II). Ma allora deve essere $\{a\} = \mathfrak{D}$ (Lemma I e prop. VII) e risulta $\mathfrak{A} = \mathfrak{D} \times \mathfrak{R}$ con $\mathfrak{R}$ un P-gruppo di ordine pq^β. Dimostriamo adesso che $\mathfrak{E}/\mathfrak{D} = 1$. Infatti si ha $\mathfrak{E} = \mathfrak{D} \times \mathfrak{E}_1$ perchè $\mathfrak{D}$ è un sottogruppo di Sylow normale d'ordine p di $\mathfrak{E}$, e p è il minimo divisore primo di $|\mathfrak{G}|$ e quindi anche di $|\mathfrak{E}|$. Ma allora se fosse $\mathfrak{E}_1$ diverso da 1, poichè $\mathfrak{E}_1$ è r-normale in $\mathcal{N}(\mathfrak{D})$ (prop. V), pel lemma I il gruppo $\mathcal{N}(\mathfrak{D})/\mathfrak{E}_1$ che è isomorfo ad $\mathfrak{A}$ sarebbe contenuto in un gruppo risolubile dotato di duale, e ciò non è possibile (prop. VIII). E per un motivo del tutto analogo non può neppure essere β maggiore di 1.

Passiamo ora a dimostrare che:

C. - Il gruppo $\mathfrak{G}$ è d'ordine pari ed i 2-sottogruppi di Sylow di $\mathfrak{G}$ sono gruppi quadrinomi.

Osserviamo anzitutto che $\mathfrak{G}$ è p-normale. Infatti altrimenti il centro $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_p)$ di un p-sottogruppo di Sylow $\mathfrak{G}_p$ sarebbe contenuto in una intersezione massima $\mathfrak{D}$, per cui in virtù della *B.* dovrebbe essere $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_p) = \mathfrak{D}$ e quindi $\mathfrak{G}_p$ abeliano elementare e con ciò anche p-normale, contro ipotesi. Se ora $\mathcal{N}(\mathfrak{G}_p)$ è il normalizzante di $\mathfrak{G}_p$ in $\mathfrak{G}$, facciamo vedere che $\mathcal{N}(\mathfrak{G}_p)$ contiene propriamente $\mathfrak{G}_p$. Infatti essendo G semplice non abeliano e p-normale, è $\mathcal{N}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_p)) > \mathfrak{G}_p$ [10]). Se ora fosse $\mathcal{N}(\mathfrak{G}_p) = \mathfrak{G}_p$, i p-sottogruppi di Sylow di $\mathcal{N}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_p))$ conterrebbero tutti $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_p)$, e quindi una intersezione massima $\mathfrak{D}$ di $\mathfrak{G}_p$ con un altro p-sottogruppo di Sylow di $\mathcal{N}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_p))$ avrebbe $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_p)$ per sottogruppo. Ma allora per la *B.* si conclude che $\mathfrak{D} = \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_p)$ e $\mathfrak{G}_p$ sarebbe abeliano elementare, il che contraddice la semplicità di $\mathfrak{G}$ e l'ipotesi $\mathcal{N}(\mathfrak{G}_p) = \mathfrak{G}_p$ [11]).

A partire da $\mathfrak{G}_p$, consideriamo la catena discendente dei sottogruppi di Frattini di $\mathfrak{G}$: $\mathfrak{G}_p = \Phi_0(\mathfrak{G}_p) > \Phi_1(\mathfrak{G}_p) > \ldots > \Phi_t(\mathfrak{G}_p) > \Phi_{t+1}(\mathfrak{G}_p) = 1$.

---

[10]) Vedasi ad es. teorema 6 a pag. 171 in [13].

[11]) Vedasi nota [6]).

Supponiamo che $\mathfrak{G}$ non sia abeliano elementare, per cui sarà $t \geqslant 1$.

Il gruppo $\mathfrak{G}_p/\Phi_t(\mathfrak{G}_p)$ risulta d'ordine almeno p^2, perchè $\mathfrak{G}_p$ non può essere ciclico essendo $\mathfrak{G}$ semplice non abeliano e p il minimo divisore primo di $|\mathfrak{G}|$.

Da $\mathcal{N}(\mathfrak{G}_p) > \mathfrak{G}_p$, segue pure $\mathcal{N}(\Phi_t(\mathfrak{G}_p)) > \mathfrak{G}_p$, e poichè $\mathcal{N}(\Phi_t(\mathfrak{G}_p))$ è rigidamente legato a $\mathfrak{G}_p$ (lemma II), il gruppo $\mathcal{N}(\Phi_t(\mathfrak{G}_p))/\Phi_t(\mathfrak{G}_p)$ ha duale. Se ora si tiene conto che p^2 divide l'ordine di $\mathcal{N}(\Phi_t(\mathfrak{G}_p))/\Phi_t(\mathfrak{G}_p)$, per la VII si conclude che $\mathcal{N}(\Phi_t(\mathfrak{G}_p))/\Phi_t(\mathfrak{G}_p) = \mathfrak{G}_p/\Phi_t(\mathfrak{G}_p) \times \mathfrak{C}/\Phi_t(\mathfrak{G}_p)$ con $\mathfrak{C}/\Phi_t(\mathfrak{G}_p) = 1$.

Ma allora $\mathcal{N}(\Phi_t(\mathfrak{G}_p)) = \mathfrak{G}_p \times \mathfrak{C}_1$ [12]) ove $\mathfrak{C}_1 \neq 1$ è il complemento di $\Phi_t(\mathfrak{G}_p)$ in $\mathfrak{C}$.

È dunque $\mathcal{N}(\mathfrak{G}_p) = \mathfrak{G}_p \times \mathfrak{C}_1$. Ne segue che $\mathfrak{G}_p$ è dotato di duale e quindi non può essere isomorfo ad un gruppo generalizzato dei quaternioni. Pertanto $\mathfrak{G}_p$ contiene una intersezione massima non identica $\mathfrak{D}$ (per la *A.*) con un altro p-sottogruppo di Sylow. Ma allora la struttura di $\mathcal{N}(\mathfrak{D})$ quale chiarita in *B.* è in contrasto con la relazione $\mathcal{N}(\mathfrak{G}_p) = \mathfrak{G}_p \times \mathfrak{C}_1$ ove $\mathfrak{C}_1 \neq 1$. Concludiamo dunque che $\mathfrak{G}$ è abeliano elementare. E se si tiene di nuovo presente la *B.*, deve essere $|\mathfrak{G}_p| = p^2$. Ma allora affinchè $\mathfrak{G}$ sia semplice, necessariamente deve essere $p = 2$.

Siamo ora in grado di dimostrare il seguente

TEOREMA 1: *Un gruppo finito semplice è dotato di duale se e solo se è un gruppo ciclico d'ordine primo.*

Nel gruppo semplice $\mathfrak{G}$ definito all'inizio di questo numero tutte le involuzioni (elementi di periodo 2) sono coniugate, in quanto i sottogruppi di Sylow d'ordine pari sono gruppi quadrinomi (per la *C.*). Ne segue che se $\mathfrak{D}$ è l'intersezione non identica di due 2-sottogruppi di Sylow di $\mathfrak{G}$, i centralizzanti delle involuzioni di $\mathfrak{G}$ sono tutti isomorfi al normalizzante $\mathcal{N}(\mathfrak{D})$ di $\mathfrak{D}$ in $\mathfrak{G}$. Pertanto per la *B.* risulta $C(\tau) = \{\tau\} \times \mathfrak{R}$, se τ indica una involuzione di $\mathfrak{G}$, ove $\mathfrak{R}$ è un P-gruppo di ordine $2q$, con q numero primo maggiore di 2. Ne segue che data una involuzione τ di $\mathfrak{G}$, esiste uno ed un solo sottogruppo ciclico d'ordine dispari di $\mathfrak{G}$ che centralizza τ, e precisamente è un gruppo $\{b\}$ d'ordine q.

---

[12]) Satz 5 e Satz 10 in [7].

Ma si ha pure che se b è un elemento d'ordine dispari permutabile con una involuzione τ, τ è univocamente individuata da b. Ragionando per assurdo, supponiamo che b sia permutabile con almeno due involuzioni distinte τ_1 e τ_2 di $\mathfrak{G}$. Si ha allora $\mathcal{N}(\{\tau_1\}) = \{\tau_1\} \times \mathfrak{N}'$, $\mathcal{N}(\{\tau_2\}) = \{\tau_2\} \times \mathfrak{N}''$ con b contenuto in $\mathfrak{N}'$ che in $\mathfrak{N}''$. Quindi il normalizzante $\mathcal{N}(\{b\})$ di $\{b\}$ in $\mathfrak{G}$ contiene il gruppo $\mathfrak{A} = \mathcal{N}(\{\tau_1\}) \cup \mathcal{N}(\{\tau_2\})$, e $\{b\}$ è r-normale in $\mathfrak{A}$ (prop. I e V). Ora il gruppo $\mathfrak{A}/\{b\}$ contiene un gruppo diedrale diverso da un 2-gruppo, isomorfo al gruppo $\{\tau_1\} \cup \{\tau_2\}$. Ma ciò è impossibile (lemma I e prop. VIII); b dunque individua τ. Ne segue che se b è un elemento d'ordine dispari di $\mathfrak{G}$ permutabile con una involuzione τ, risulta $|\mathcal{N}(\{b\})| = |C(\tau)| = 4q$. Quindi se b è un elemento d'ordine q contenuto in $\mathcal{N}(\{\tau\})$, $\mathcal{N}(\{\tau\})$ è rigidamente legato a $\{b\}$ ed a $\{\tau\}$ (lemma II). Ma allora $\psi(\mathcal{N}(\{\tau\}) \neq 1$ è normale in $\psi(\{b\})$ e $\psi(\{\tau\})$ e quindi in $\overline{\mathfrak{G}} = \psi(\{b\}) \cup \psi(\{\tau\})$, assurdo data la semplicità di $\overline{\mathfrak{G}}$. L'ipotesi che l'insieme J non fosse vuoto ci ha quindi condotto ad un assurdo. E la conclusione della dimostrazione è ovvia.

4. - E concludiamo con il teorema enunciato nella prefazione.

TEOREMA 2: *Se $\mathfrak{G}$ è un gruppo d'ordine finito, le seguenti condizioni sono equivalenti fra di loro:*

a) $\mathfrak{G}$ è l'immagine omomorfa duale di un gruppo finito;

b) $\mathfrak{G}$ è il prodotto diretto di p-gruppi modulari non hamiltoniani e di P-gruppi non abeliani con gli ordini primi fra loro;

c) $\mathfrak{G}$ è risolubile e dotato di duale;

d) il reticolo dei sottogruppi di $\mathfrak{G}$ è isomorfo al reticolo dei sottogruppi di un gruppo abeliano;

e) $\mathfrak{G}$ è risolubile ed autoduale.

Da *a*) segue *b*) in virtù del teorema II in [11] ed il teorema 1 di questa Nota. Da *b*) segue *c*) in virtù del teorema 5 a pag. 89 in [10]. Da *c*) segue *d*) in virtù del corollario a pag. 91 in [10]. Da *d*) segue *e*) in virtù del teorema 1 a pag. 87 in [10]. È poi ovvio che *e*) implica *a*).

BIBLIOGRAFIA

[1] BAER R.: *Dualism in abelian groups*. Bull. Amer. Math. Soc., vol. XLIII, 121-124, 1937.

[2] BAER R.: *Duality and commutativity of groups*. Duke Math. Journal, vol. V, 824-838, 1939.

[3] BIERKHOFF G.: *Lattice theory*. American Math. Soc. Colloquim publicationes, vol. XXV, 1948.

[4] BRAUER R., SUZUKI M.: *On finite groups of even order whose 2-Sylow group is a quaternion group*. Proceed. of the Nat. Acad. of Sc. USA, vol. XLV, 1757-59, 1959.

[5] CURZIO M.: *Sui gruppi supersolubili per cui il reticolo dei sottogruppi di composizione è autoduale*. Le Matematiche, vol. XII, 74-79, 1957.

[6] GASCHÜTZ W.: *Uber die Φ-Untergruppe endlicher Gruppen*. Math. Zeit., vol. LVIII, 160-170, 1953.

[7] GASCHÜTZ W.: *Gruppen, deren sämtliche Untergruppen Zentralisatoren sind*. Archiv der Math., Vol. VI, 5-8, 1955.

[8] HUPPERT B.: *Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen*. Math. Zeit., vol. LX, 409-434, 1954.

[9] SUZUKI M.: *On the lattice of subgroups of finite groups*. Trans. Amer. Math. Soc., vol. LXX, 345-371, 1951.

[10] SUZUKI M.: *Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups*. Erg. der Math. und ihrer Grenzgebiete, Heft 10, Springer Verlag, Berlin, 1956.

[11] ZACHER G.: *On lattice dual-homomorphisms between finite groups*. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. XXX, 65-75, 1960.

[12] ZACHER G.: *I gruppi risolubili con duale*. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. XXXI, 104-113, 1961.

[13] ZASSENHAUS H.: *The theory of groups*. Second Edition, Chelsea Publ. C. New-York, 1958.