

# RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

SANTUZZA GHEZZO

## **Una caratterizzazione geometrica dei reticoli semimodulari**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,*  
tome 31 (1961), p. 381-395

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1961\\_\\_31\\_\\_381\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1961__31__381_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

## UNA CARATTERIZZAZIONE GEOMETRICA DEI RETICOLI SEMIMODULARI

*Nota (\*) di SANTUZZA GHEZZO (a Padova)*

1. - È noto che se in un reticolo  $L$  non è contenuto alcun sottoreticolo consistente di cinque elementi  $z \cup y = x \cup y > > z > x > x \cap y = z \cap y$  e  $y$  non confrontabile con  $z$  nè con  $x$  (sottoreticolo che noi diremo pentagonale),  $L$  è modulare e soddisfa alle due leggi di copertura

$$C'_1) y \succ x \cap y \Rightarrow x \cup y \succ x$$

$$C'_2) x \cup y \succ y \Rightarrow x \succ x \cap y$$

duali una dell'altra.

Mi sono proposta qualche indagine sulla struttura di un reticolo in presenza di un sottoreticolo pentagonale.

Ho trovato (n. 3, 4) che se un reticolo è atomico e soddisfa alla  $C'_2$ ) e non alla  $C'_1$ ), per ogni suo sottoreticolo pentagonale (per quanto sopra, certo, esistente) generato da  $z, x$  e  $y$  risulta che tutti gli elementi  $\bar{y}$  che coprono  $y$ : o generano con  $z$  e  $x$  ancora sottoreticoli pentagonali, ovvero con  $y, x$  e  $(z \cap \bar{y}) \cup x$  generano dei sottoreticoli del tipo della fig. 1, che diremo sotto-triquadrangolari.

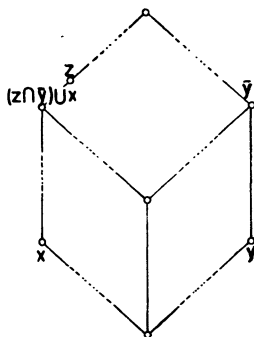


Fig. 1

(\*) Pervenuta in redazione il 10 luglio 1961.

Indirizzo dell'A.: Seminario matematico, Università, Padova.

Al n. 5 del presente lavoro definisco l'insieme  $P_y^\dagger$  di  $L$  che contiene  $y$  e per ogni suo elemento  $a$  contiene tutti gli elementi di  $L$  che coprono  $a$ . Deduco alcune proprietà di questo insieme nel caso che  $y$  generi con  $x$  e  $z$  un sottoreticolo pentagonale di  $L$ , arrivando ad una condizione perchè  $L$  contenga sottoreticoli sotto-triquadrangolari (teor. 5.1).

Al n. 6 considero, in un reticolo qualunque  $L$  che contenga un sottoreticolo pentagonale generato da  $x$ ,  $z$  e  $y$ , l'insieme  $H$  degli elementi dell'intervallo  $S : [y, z \cup y]$  che generano con  $z$  e  $x$  dei sottoreticoli pentagonali. Mi risulta che ogni elemento di  $H$  genera in  $S$  un ideale principale contenuto in  $H$ ; e che, se  $L$  è condizionatamente completo e unione-continuo,  $H$  ammette elementi massimali, ed  $H$  è la riunione degli ideali principali generati dai suoi elementi massimali.

Se  $g_1$  è un elemento massimale di  $H$  ed  $L$  è anche sotto-semimodulare, cioè soddisfa alla  $C'_2$ , e atomico, gli elementi  $g_1$ ,  $g_2 > g_1$ ,  $x$  e  $(g_2 \cap z) \cup x$  generano in  $L$  un sottoreticolo sotto-triquadrangolare.

Infine ai numeri 7 e 8 si arriva ad una condizione necessaria e sufficiente perchè un reticolo atomico, condizionatamente completo e unione-continuo sia sotto-semimodulare (teor. 7.1), condizione che vale in particolare nei reticoli atomici generati in modo compatto (coroll. 8.1).

Insieme con i teoremi enunciati valgono anche i loro duali.

2. - Indicheremo gli elementi di un reticolo con le lettere latine minuscole e gli insiemi di elementi del reticolo stesso con le maiuscole. Inoltre le scritture  $a > b$  e  $b < a$  staranno ad indicare che  $a$  « copre »  $b$ , cioè che è  $a > b$  e che per nessun  $c$  del reticolo è  $a > c > b$ .

Ricordiamo che vale <sup>1)</sup> il seguente

**TEOREMA 2.1:** *Un reticolo  $L$  è non modulare se e solo se contiene un sottoreticolo isomorfo al reticolo pentagonale della fig. 2.*

---

<sup>1)</sup> V. [1], cap. V, § 2, pag. 66.

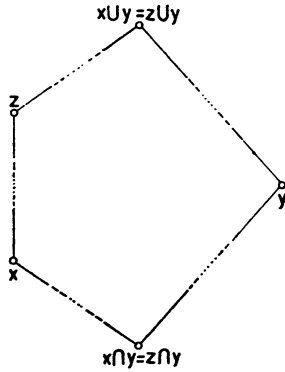


Fig. 2

Da cui segue che in un reticolo modulare sono soddisfatte le seguenti condizioni:

$C_1)$  se  $y \succ a$  e  $a \prec x$  non confrontabile con  $y$ , allora  $x \cup y \succ x$ ,

e dualmente

$C_2)$  se  $a \succ y$  e  $a \succ x$  non confrontabile con  $y$ , allora  $x \succ x \cap y$ .

Quindi valgono le:

$C'_1)$  se  $y \succ x \cap y$ , allora  $x \cup y \succ x$

e

$C'_2)$  se  $x \cup y \succ y$ , allora  $x \succ x \cap y$ .

Noi indicheremo il reticolo della fig. 1, che è generato dagli elementi  $x, z$  e  $y$  per i quali è  $x \cup y = z \cup y$  e  $x \cap y = z \cap y$ , con la scrittura  $\{z \succ x; y \text{ non confrontabile con } z \text{ nè con } x\}$ .

Assumiamo inoltre, come d'uso <sup>2)</sup>, le seguenti definizioni di semimodularità:

**DEFINIZIONE 2.1:** Un reticolo è sopra-semimodulare se verifica la  $C'_1)$ ; e sotto-semimodulare se verifica la  $C'_2)$ .

<sup>2)</sup> V. [2], n. 3, Def. 3.2, pag. 4.

Inoltre:

DEFINIZIONE 2.2: Diremo sopra-triquadrangolare <sup>3)</sup> un reticolo del tipo della fig. 3.

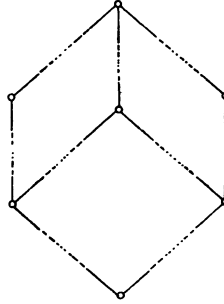


Fig. 3

Un reticolo siffatto è sopra-semimodulare senza essere sotto-semimodulare.

Dualmente

DEFINIZIONE 2.3: Diremo sotto-triquadrangolare un reticolo del tipo della fig. 4.

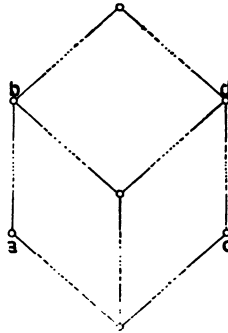


Fig. 4

e lo indicheremo, a volte, con  $\{b > a, d > c; a, b$  non confrontabili con  $c, d\}$ .

Ricordiamo <sup>4)</sup> infine la seguente:

DEFINIZIONE 2.4: Un reticolo  $L$  si dice atomico se  $a, b \in L$  ed  $a > b$  implicano  $a \geq c > b$  per qualche  $c \in L$ .

<sup>3)</sup> V. [4], Cap. II, § 1, n. 69, pag. 102.

<sup>4)</sup> V. [2], n. 2, nota <sup>1)</sup>, pag. 3.

3. - Dal teorema 2.1 e dalla definizione 2.1 segue che un reticolo che non contenga sottoreticoli pentagonali è semimodulare.

Siano ora  $a$  e  $b$ , con  $a > b$ , due elementi di un reticolo  $L$  e indichiamo con  $P_b$  l'insieme, eventualmente vuoto, degli elementi di  $L$  che coprono  $b$ ; e con  $P_b^a$  l'insieme degli elementi  $c$  di  $P_b$  tali che si abbia  $a > c$ .

Si ha intanto il seguente lemma:

**LEMMA 3.1:** *Se un reticolo  $L$  sotto-semimodulare contiene un sottoreticolo pentagonale  $M \{z > x; y \text{ non confrontabile con } z \text{ nè con } x\}$ , per ogni elemento  $y'$ , se esiste, dell'insieme  $P_y^{x \cup y}$ , risulta che: se  $y' \cap x \neq y' \cap z$  allora  $y', y, x \cup (y' \cap z) \leq z$  e  $x$  generano in  $L$  un reticolo sotto-triquadrangolare; se invece  $y' \cap x = y' \cap z$  allora  $x, z$  e  $y'$  generano un sottoreticolo pentagonale di  $L$ , con  $z \cup y' = x \cup y$  e  $x \cap y' \geq z \cap y$ .*

Infatti:

se esiste in  $P_y^{x \cup y}$  un elemento  $y'$ , si ha:

$$y' \cup x = y' \cup z = y \cup x$$

e

$$y' \cap z \geq y' \cap x \geq y \cap x = y \cap z.$$

Sia  $t' = y' \cap z$  e supponiamo  $y' \cap x \neq y' \cap z$  e quindi  $t' > y' \cap x$ , e  $t' > y \cap z$ , di conseguenza  $t'$  non è minore nè uguale ad  $y$  altrimenti sarebbe  $y \cap z \geq t' > y \cap z$ .

Tenuto conto di ciò e della semimodularità di  $L$  risulta che  $t' \cup y = y' > y$  implica che  $t' > t' \cap y = (y' \cap z) \cap y = y \cap z$ , e quindi  $t'$  è non maggiore di  $x$  e non maggiore di  $y$ .

Dovendo inoltre essere  $t' > y' \cap x \geq y \cap x = y \cap z$ , risulterà  $y' \cap x = y \cap x$ , e perciò anche  $t'$  non minore nè uguale ad  $x$  altrimenti  $y' \cap x \geq t' > y' \cap x$ .

In questo caso dunque (v. fig. 5), gli elementi  $y', y, t' \cup x \leq z$  e  $x$  generano in  $L$  un reticolo sotto-triquadrangolare  $N$ , come si verifica facilmente.

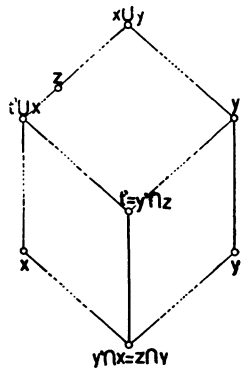


Fig. 5

Il sottoreticolo pentagonale  $M$  risulta inscritto in  $N$  se e solo se  $(z, y')$  è una coppia modulare <sup>5)</sup>.

Supponiamo ora che  $y' \cap x = y' \cap z \geq y \cap z$ , allora essendo  $y' \cup x = y' \cup z = y \cup x$ , gli elementi  $x, z$  e  $y'$ , generano un sottoreticolo pentagonale di  $L$ , come in fig. 6.

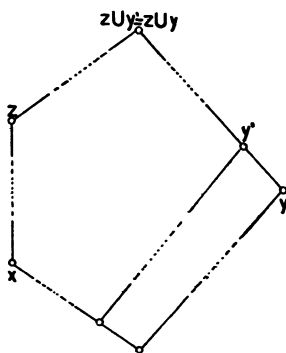


Fig. 6

Il lemma 3.1 è così completamente dimostrato.

Notiamo le seguenti osservazioni:

**OSSEVAZIONE 3.1:** *Nelle ipotesi del lemma 3.1 nessun elemento di  $P$ , può esser confrontabile con  $z$  o con  $x$ .*

Infatti essendo  $x \cup y = z \cup y > z > x$ , potrebbe solo essere  $y' = z \cup y$ . Ma per la sotto-semimodularità di  $L$ , poichè  $z$  non copre  $z \cap y$ ,  $z \cup y$  non può coprire  $y$ .

**OSSEVAZIONE 3.2:** *Se  $\{z > x$  e  $y$  non confrontabile con  $z$  nè con  $x\}$  è un sottoreticolo pentagonale di un reticolo  $L$ , la condizione  $y' \cap x = y' \cap z$  è equivalente alla  $y' \cap z < x$ , per qualunque  $y' : z \cup y > y' > y$ .*

Infatti in tali ipotesi risulta:

$$y \cap x \leq y' \cap x \leq y' \cap z < z;$$

e inoltre è

$$y' \cap z \text{ non maggiore nè uguale ad } x \text{ e } y' \cap x < x$$

<sup>5)</sup> Una coppia  $(z, y)$  è detta modulare quando:  $z > x \Rightarrow z \cap (y \cup x) = (z \cap y) \cup x$ . Cfr. [1], Cap. VII, § 1, pag. 100.

poichè in caso contrario sarebbe  $x \leq y'$  e quindi  $x \cup y = y'$ , mentre è  $x \cup y = z \cup y > y'$ .

Dunque se  $y' \cap z = y' \cap x$ , è  $y' \cap z < x$ ; viceversa se  $y' \cap \cap z < x$ , essendo anche  $y' \cap z < y'$ , risulta

$$y' \cap z \leq y' \cap x \leq y' \cap z.$$

Segue facilmente:

**OSSERVAZIONE 3.3:** *Se  $\{z > x; y$  non confrontabile con  $z$  nè con  $x\}$  è un sottoreticolo pentagonale di un reticolo  $L$ , ed è  $z \cup y > y' \geq y$ , allora anche  $\{z > x; y'$  non confrontabile con  $z$  nè con  $x\}$  è un sottoreticolo pentagonale di  $L$  se e solo se  $y' \cap z < x$ .*

Vale inoltre il seguente:

**LEMMA 3.2:** *Se il reticolo  $L$  di cui al lemma 3.1 è atomico, l'insieme  $P_y^{z \cup y}$  è certamente non vuoto.*

Infatti se  $L$  è sotto-semimodulare e contiene  $\{z > x; y$  non confrontabile con  $z$  nè con  $x\}$  esso contiene anche qualche elemento  $a$  tale che si abbia

$$y \cup z > a > y$$

altrimenti  $z$  dovrebbe coprire  $y \cap z$ ; da ciò, per l'atomicità segue l'asserto.

In base ai lemmi 3.1 e 3.2, sussiste, insieme con il duale, il seguente

**TEOREMA 3.1:** *Se un reticolo  $L$  atomico e sotto-semimodulare contiene un sottoreticolo pentagonale  $M: \{z > x, y$  non confrontabile con  $z$  nè con  $x\}$ , esiste in  $L$  almeno un elemento  $y': z \cup y > y' > y$  il quale, se non genera con  $x$  e  $z$  ancora un sottoreticolo pentagonale di  $L$ , è vertice di un reticolo sotto-triquadrangolare.*

4. - Nel reticolo  $L$  di cui al lemma 3.1 consideriamo ora, se esistono, gli elementi  $y''$  di  $P_y$  che non stanno in  $P_y^{z \cup y}$ ; vogliamo verificare il seguente:

**LEMMA 4.1:** *In un reticolo sotto-semimodulare, se un elemento  $y$  genera insieme con due fissati elementi  $z$  e  $x$ ,  $z > x$ , un sottoreticolo pentagonale, lo stesso accade ad ogni elemento  $y''$  di  $P_y$  che non stia in  $P_y^{z \cup y}$ .*



Infatti per un siffatto  $y''$  si ha

$$z \cap y = x \cap y \leq x \cap y'' \leq z \cap y'' \leq (x \cup y) \cap y'' = y$$

e inoltre  $z \cap y'' \neq y$  altrimenti sarebbe  $z > z \cap y'' = y$ , e  $z \cap y$  è non minore di  $z \cap y''$  poichè da  $z \cap y'' < z$  e  $z \cap y'' < y$  risulta  $z \cap y'' \leq z \cap y$ ; perciò  $x \cap y = z \cap y = x \cap y'' = z \cap y''$ .

Per le unioni si ha:

$$x \cup y = z \cup y \leq x \cup y'' \leq z \cup y'' = (z \cup y) \cup y'' = (x \cup y) \cup y'' = x \cup y'' ,$$

dove

$$x \cup y'' = (x \cup y) \cup y'' \neq x \cup y ;$$

dunque

$$x \cup y = z \cup y < x \cup y'' = z \cup y'' .$$

Se ne deduce che  $x$ ,  $z$  e  $y''$  generano anch'essi un sottoreticolo pentagonale di  $L$ , come volevasi.

Dai lemmi 3.1 e 4.1 segue:

**TEOREMA 4.1:** *Se un reticolo  $L$  sotto-semimodulare contiene un sottoreticolo pentagonale  $\{z > x; y$  non confrontabile con  $z$  nè con  $x\}$ , ogni eventuale elemento che copru  $y$ , se non è vertice di un reticolo sotto-triquadrangolare di  $L$ , genera con  $z$  e  $x$  ancora un sottoreticolo pentagonale.*

E dualmente.

5. - Sia ora  $L$  un reticolo sotto-semimodulare e atomico, e sia  $P_1^\dagger$  l'insieme così definito:

**DEFINIZIONE 5.1:**  $b \in P_1^\dagger$  e per ogni elemento  $a \in P_1^\dagger$  sia anche  $P_a \subset P_1^\dagger$ .

L'insieme  $P_1^\dagger$  risulta filtrante inferiormente e tale che per ogni suo elemento  $c$  esiste almeno una catena massimale<sup>6)</sup> finita che lo congiunge con  $b$ .

Osserviamo subito che se  $L$  contiene il sottoreticolo penta-

---

<sup>6)</sup> È detta « massimale » o « connessa » una catena  $x_0 < x_1 < \dots < x_i$  quando  $x_i > x_{i-1}$  per ogni  $i$ . Cfr. [1], Cap. I, n. 9, p. 11.

gonale  $\{z > x; y \text{ non confrontabile con } z \text{ nè con } x\}$ , per ogni  $\bar{y} \in P_{\bar{y}}^{\dagger}$  il quale generi con  $z$  e  $x$  un sottoreticolo pentagonale di  $L$ , cioè, per l'osserv. 3.3, per ogni  $\bar{y} \in P_{\bar{y}}^{\dagger}$  tale che  $\bar{y} \cap z < x$ , gli elementi di  $P_{\bar{y}} \subset P_{\bar{y}}^{\dagger}$  non sono, per l'osserv. 3.1, confrontabili con  $x$  nè con  $z$ .

Inoltre se  $\bar{y} \cap z$  è non minore di  $x$ , per nessun elemento  $\bar{y} \in P_{\bar{y}}$  può essere  $\bar{y} \cap z < x$  poichè  $\bar{y} \cap z \geq \bar{y} \cap z$ .

Dunque:

PROPOSIZIONE 5.1: *Se in  $P_{\bar{y}}^{\dagger}$  c'è un elemento  $\bar{y}$  confrontabile con  $z$  o con  $x$ , allora  $\bar{y} \cap z$  è non minore di  $x$  ed essendo  $y \cap z < x$ , nella catena*

$$a_0 = y < a_1 < \dots < a_n = \bar{y}$$

ci sarà un primo elemento  $a_r$  tale che  $a_r \cap z$  è non minore di  $x$ , con  $r \leq n - 1$ . Gli elementi  $a_{r-1}, a_r, x, (a_r \cap z) \cup x \leq z$  generano allora in  $L$  un reticolo sotto-triquadrangolare (come in fig. 7).

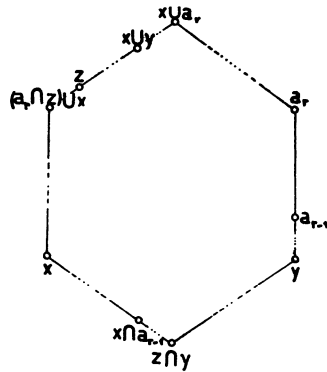


Fig. 7

Vale inoltre la seguente:

PROPOSIZIONE 5.2: *In un reticolo  $L$  atomico, se l'insieme  $P_{\bar{b}}^{\dagger}$  ha un elemento massimale  $m$ , questo è massimo in  $P_{\bar{b}}^{\dagger}$ , ed è inoltre elemento universale  $m = u$  in  $L$ .*

Infatti se  $m$  non fosse massimo in  $P_{\bar{b}}^{\dagger}$ , esisterebbe ivi un  $\bar{b}$  non confrontabile con  $m$  per cui  $m < \bar{b} \cup m \in L$ , e per l'atomi-

cità di  $L$ , ci sarebbe in  $P_1^\dagger$  un  $m' \succ m$ , assurdo dal quale segue la prima parte dell'affermazione precedente.

Ad analoga conclusione si perviene supponendo che esista in  $L$  un elemento  $a$  non minore nè uguale ad  $m$ , cosicchè risulta  $m = u \in P_1^\dagger$ , c.v.d.

Segue in particolare l'esistenza di una catena massimale finita di estremi  $b$  ed  $u$ .

Dalle proposizioni 5.1 e 5.2, tenuto conto che se in  $L$  esiste elemento universale  $u$ , questo è confrontabile con ogni elemento di  $L$ , segue ora la

**PROPOSIZIONE 5.3:** *Se un reticolo  $L$  atomico, sotto-semimodulare contiene il sottoreticolo pentagonale  $\{z \succ x, y$  non confrontabile con  $z$  nè con  $x\}$ , e se ammette elemento universale che appartenga a  $P_1^\dagger$ , esistono due elementi  $a_r \succ a_{r-1} \geq y$  i quali con  $x$  e  $(a_r \cap z) \cup x$  generano in  $L$  un reticolo sotto-triquadrangolare.*

Riassumendo i risultati finora ottenuti possiamo enunciare il seguente:

**TEOREMA 5.1:** *Se un reticolo  $L$  atomico, sotto-semimodulare e tale che ogni suo elemento  $b$  sia origine di una catena massimale finita avente per ultimo elemento l'elemento universale  $u$  di  $L$ , contiene un sottoreticolo pentagonale  $\{z \succ x; y$  non confrontabile con  $z$  nè con  $x\}$ , esso contiene, nella sezione terminante  $z \cap y$  (7), anche un sottoreticolo sotto-triquadrangolare generato da  $x, a_{r-1} \geq y, a_r \succ a_{r-1}$  e  $(a_r \cap z) \cup x \leq z$ , per certi convenienti  $a_{r-1}, a_r$  (come in fig. 7).*

E dualmente.

6. - Sia ora  $L$  un reticolo qualunque.

Supponiamo che  $L$  contenga un sottoreticolo pentagonale  $\{z \succ x; y$  non confrontabile con  $z$  nè con  $x\}$  indichiamo con  $S$  l'intervallo  $[y, z \cup y]$  di  $L$ , cioè l'insieme degli elementi  $s$  di  $L$  tali che si abbia  $y \leq s \leq z \cup y$ , e consideriamo l'insieme  $H$  degli

---

7) Gli insiemi degli elementi  $x$  di un reticolo  $L$  soddisfacenti a  $x < b$  oppure ad  $a < x$ , si dicono rispettivamente «sezione cominciante di  $b$ :  $(b)$ », e «sezione terminante di  $a$ :  $a$ ». Cfr. [3], parte I, Cap. I, n. 2, pag. 4.

elementi di  $S$  che generano con  $x$  e  $z$  dei sottoreticoli pentagonali.

OSSERV. 6.1:  $H$  risulta non vuoto poichè  $y \in H$ ; inoltre se  $\bar{s} \in H$  ogni elemento  $s \in S$  tale che sia  $s < \bar{s}$ , appartiene ad  $H$ .

Infatti se  $\bar{s} \in H$  allora  $\bar{s} \cap z < x$ , e quindi  $s < \bar{s}$  implica  $s \cap z \leq \bar{s} \cap z < x$ . Da ciò per l'osserv. 3.3 segue l'asserto. In altre parole: ogni elemento  $h$  di  $H$  genera in  $S$  (sottoreticolo di  $L$ ) un ideale principale  $(h) \subset H$ .

Imponiamo ora ad  $L$  di essere condizionatamente completo<sup>8)</sup>, cioè supponiamo che ogni suo sottoinsieme non vuoto e limitato abbia maggiorante minimo. In tal caso esiste in  $L$  un elemento  $\bar{h} = UH$  tale che per ogni  $h \in H$  si abbia  $h \leq \bar{h}$ . È subito visto che:

OSSERVAZIONE 6.2: Siccome per ogni  $h$  di  $H$  si ha  $h \leq z \cup y$ , risulta anche  $\bar{h} = UH \leq z \cup y$ .

Inoltre ogni catena  $H'$  di elementi di  $H$  è limitata, e dunque ammette in  $L$  un maggiorante minimo  $UH' = \bar{h}' \leq \bar{h}$ .

OSSERVAZIONE 6.3: L'insieme  $H'_1$  che contiene gli elementi  $h'$  di una catena  $H'$  di  $H$  ed ogni elemento  $s$  di  $S$  tale che sia  $s \leq h'$  per qualche  $h' \in H'$ , è un ideale di  $S$  contenuto in  $H$ . Inoltre  $UH'_1 = UH'$ .

Infatti la prima affermazione consegue dall'osserv. 1.5 e dal fatto che se  $h'_1$  e  $h'_2 \in H'_1$  allora  $h'_1 \leq h'$  e  $h'_2 \leq h'$  per qualche  $h' \in H'$  e perciò  $h'_1 \cup h'_2 \leq h'$  da cui  $h'_1 \cup h'_2 \in H'_1$ . Per dimostrare che  $UH'_1 = UH'$ , basta osservare che per ogni elemento  $h'_1 \in H'_1$  è  $h'_1 \leq h' \leq UH'$  per qualche  $h' \in H'$  e quindi (con ragionamento analogo a quello dell'osserv. 6.2) segue

$$UH'_1 \leq UH'$$

D'altra parte ogni  $h' \in H'$  appartiene ad  $H'_1$  per costruzione, dunque  $h' \leq UH'_1$  e quindi

$$UH' \leq UH'_1.$$

Supponiamo ora che il reticolo  $L$  sia anche unione-continuo<sup>9)</sup>, cioè che  $a \cap UB = U(a \cap B)$ <sup>10)</sup> per ogni ideale  $B$  di  $L$ , e consideriamo l'insieme  $I$  ottenuto come segue:

<sup>8)</sup> V. [1], Cap. IV, n. 3, pag. 51.

<sup>9)</sup> V. [2], n. 2, lemma 2.3, pag. 2.

<sup>10)</sup> Con  $a \cap B$  indichiamo l'insieme degli elementi  $a \cap b$ ,  $b \in B$ .

Sia  $H'$  una catena di  $H$  siffatta che il suo maggiorante minimo  $\bar{h}'$  sia non minore di alcun elemento  $h \in H$ , e si definisca  $I$  come l'insieme degli elementi  $h'$  di  $H'$ , e degli elementi  $l$  di  $L$  tali che  $l \leq h'$  per qualche  $h' \in H'$ .

Con ragionamenti analoghi a quelli dell'osserv. 3.5 si verifica che  $I$  è un ideale di  $L$  e che  $UI = \bar{h}' = UH'$ .

Per la condizione ora imposta ad  $L$ , risulta

$$(1) \quad z \cap \bar{h}' = z \cap UI = U(z \cap I).$$

Ma per ogni  $i \in I$  esiste qualche  $h' \in H' \subset H$  tale che sia  $i \leq h'$  e quindi  $z \cap i \leq z \cap h'$ , da cui (osserv. 3.2):  $z \cap i < x$ ; ne segue, analogamente all'osserv. 2.5,

$$(2) \quad U(z \cap I) \leq x.$$

Ricordiamo ora che per nessun  $\bar{y} : y \leq \bar{y} \leq z \cup y = x \cup y$  può essere  $z \cap \bar{y} = x$ , in quanto: se  $\bar{y} = z \cup y$  allora  $z \cap \bar{y} = z \neq x$  e se  $\bar{y} < z \cup y = x \cup y$  allora  $z \cap \bar{y} = x$  qui darebbe  $x < \bar{y}$  che con  $y \leq \bar{y}$  porge l'assurdo  $x \cup y = \bar{y} < x \cup y$ .

Perciò la (2) si può scrivere, tenuto conto della (1),

$$z \cap \bar{h}' < x.$$

Per l'osserv. 3.3 si conclude che  $\bar{h}' \in H' \subset H$  ed anche  $\bar{h}' < z \cup y$  poichè  $z \cup y$  non appartiene ad  $H$ .

Possiamo così affermare che:  $UI = \bar{h}'$  è un elemento massimale di  $H$ , e perciò  $I$  è l'ideale principale  $(\bar{h}')$  di  $L$ .

Si scelga ora, se esiste, un elemento  $h$  di  $H$  non appartenente all'ideale  $I$  di cui sopra, e si consideri una catena di elementi di  $H$ , la quale contenga  $h$ , ed il cui maggiorante minimo  $\bar{h}$  sia non minore di alcun elemento di  $H$ .

Si può costruire in  $L$ , in modo analogo ad  $I$ , l'ideale  $I' = (\bar{h})$ .

OSSERVAZIONE 6.4: *Gli elementi comuni ad un ideale così ottenuto e all'intervallo  $S$ , costituiscono un ideale principale  $I_s$  di  $S$ , formato di elementi di  $H$ .*

Dunque da quanto sopra risulta che l'insieme  $H$  ammette elementi massimali, i quali generano in  $S$  degli ideali principali

costituiti da elementi di  $H$ ; ed inoltre che  $H$  è la riunione di siffatti ideali.

In base alle osservazioni esposte in questo n. 6, possiamo in particolare, enunciare il seguente:

**LEMMA 6.1:** *Se un reticolo  $L$ , condizionatamente completo e unione-continuo, contiene un sottoreticolo pentagonale  $\{z > x; y \text{ non confrontabile con } z \text{ nè con } x\}$ , l'insieme  $H$  degli elementi i quali con  $z$  e  $x$  generano sottoreticoli pentagonali contenuti nell'intervallo  $[z \cap y, z \cup y]$ , ammette un elemento massimale  $g_1: z \cup y > g_1 \geq y$ .*

Supponiamo infine che  $L$  sia atomico e sotto-semimodulare, allora l'insieme  $P_{z_1}^{z \cup y}$  associato all'elemento  $g_1$  di cui al lemma 6.1, in virtù del lemma 3.2, contiene almeno un elemento  $g_2: z \cup y > g_2 \succ g_1$ , il quale, in base ai lemmi 3.1 e 6.1, genera con  $g_1$ ,  $x$  e  $(g_2 \cap z) \cup x$  un sottoreticolo sotto-triquadrangolare.

Dunque:

**TEOREMA 6.1:** *Se un reticolo atomico, sotto-semimodulare, condizionatamente completo e unione-continuo, contiene un sottoreticolo pentagonale  $\{z > x; y \text{ non confrontabile con } z \text{ nè con } x\}$ , esso contiene anche, nell'intervallo  $[z \cap y, z \cup y]$ , un sottoreticolo sotto-triquadrangolare generato da  $g_1, g_2, x$  e  $(g_2 \cap z) \cup x$ , per certi  $g_1$  e  $g_2$  tali che sia  $z \cup y > g_2 \succ g_1 \geq y$ .*

E dualmente.

7. - Si verifica facilmente che:

**LEMMA 7.1:** *Se un reticolo  $L$  è tale che se contiene un sottoreticolo pentagonale  $\{z > x; y \text{ non confrontabile con } z \text{ nè con } x\}$ , esso contiene anche un sottoreticolo sotto-triquadrangolare  $\{s > x, g_2 > g_1; s, x \text{ non confrontabili con } g_1, g_2\}$  con  $s, g_1, g_2 \in L, z \geq s > x$  e  $z \cup y > g_2 > g_1 \geq y$ ,  $L$  è sotto-semimodulare.*

Infatti <sup>11)</sup> se in  $L$  per qualche coppia di elementi,  $z$  non confrontabile con  $y$  e  $z \cup y \succ y$ , esistesse un elemento  $x$  tale che fosse  $z > x > z \cap y$ , si sarebbe in presenza di un sottoreticolo pentagonale  $\{z > x, y \text{ non confrontabile con } z \text{ nè con } x\}$  il

<sup>11)</sup> V. analogo ragionamento in [3], parte I, Cap. VII, n. 2, lemma 1, pag. 87.

quale, per l'ipotesi fatta, assicura l'esistenza di almeno un elemento  $g_2 \in L: z \cup y > g_2 > y$ .

Il lemma 7.1, insieme col teor. 6.2 ci permettono di formulare il seguente

**TEOREMA 7.1:** *Condizione necessaria e sufficiente perchè un reticolo  $L$  atomico, condizionatamente completo e unione-continuo, sia sotto-semimodulare è che se contiene un sottoreticolo pentagonale  $\{z > x; y \text{ non confrontabile con } z \text{ nè con } x\}$ , esso contenga anche, un sottoreticolo sotto-triquadrangolare  $\{s > x, g_2 > g_1; s, x \text{ non confrontabili con } g_1, g_2\}$  con  $s, g_1, g_2 \in L, z \geq s > x$  e  $z \cup y > g_2 > g_1 \geq y$  (come in fig. 8).*

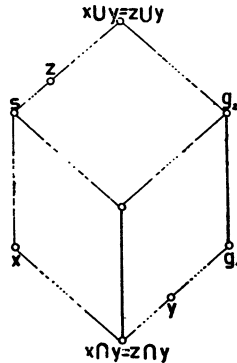


Fig. 8

Col teorema 7.1, vale il suo duale.

8. - Ricordiamo in particolare la seguente

**DEFINIZIONE 8.1**<sup>12)</sup>: *Un reticolo  $L$  è generato in modo compatto se  $L$  è completo e  $a = \cup\{c \in C(L) \mid c \leq a\}$  per ogni  $a \in L$ .*

Dove  $C(L)$  indica l'insieme degli elementi compatti di  $L$ , cioè l'insieme degli elementi  $c$  di  $L$  tali che se  $c \leq \cup S$  sia anche  $c \leq \cup S'$  per qualche sottoinsieme finito  $S'$  di  $S$ .

Poichè risulta che ogni reticolo generato in modo compatto è unione-continuo<sup>13)</sup>, dal teor. 7.1 si deduce il seguente.

<sup>12)</sup> V. [2], n. 2, def. 2.1 e def. 2.2, pag. 2.

<sup>13)</sup> V. [2], n. 2, lemma 2.3, pag. 2.

COROLLARIO 8.1: *Condizione necessaria e sufficiente perchè un reticolo  $L$  atomico, generato in modo compatto sia sotto-semimodulare è che se contiene un sottoreticolo pentagonale  $\{z > x; y$  non confrontabile con  $z$  nè con  $x\}$ , esso contenga anche un sottoreticolo sotto-triquadrangolare  $\{s > x, g_2 > g_1; s, x$  non confrontabili con  $g_1, g_2\}$  con  $s, g_1, g_2 \in L, z \geq s > x$  e  $z \cup y > g_2 > g_1 \geq y$ .*

## BIBLIOGRAFIA

- [1] BIRKHOFF G.: *Lattice Theory*, rev. ed., Amer. Math. Soc., Colloquium Publications, vol. XXV, New York, 1942.
- [2] DILWORTH R. P. and CRAWLEY PETER: *Decomposition theory for lattices without chain conditions*, Trans. of the Amer. Math. Soc., vol. XCVI, number 1, July, 1960.
- [3] DUBREIL JACOTIN M. L., LESIEUR L., CROISOT R.: *Leçons sur la théorie des treillis des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques*. Gauthier-Villars, Paris, 1953.
- [4] MORIN U.: *Algebra astratta e geometria algebrica*. Parte prima *Algebra astratta*, Cedam, Padova, 1955.