RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

FRANCA BUSULINI

Sopra un antiautomorfismo del gruppo delle lunghezze

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 31 (1961), p. 249-254

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1961__31__249_0>

SOPRA UN ANTIAUTOMORFISMO DEL GRUPPO DELLE LUNGHEZZE

Nota (*) *di* FRANCA BUSULINI (*a Gorizia*)

INTRODUZIONE

Nello studio di una geometria generale sopra una retta s, propedeutica ad una geometria del piano [5, 4, 3, 2], si sono dati diversi modelli aritmetici della s, generalizzando, rispetto a quelle classiche, le proprietà del gruppo delle congruenze, in modo però che siano sempre compatibili con una più approfondita interpretazione della realtà empirica. Non si era invece riusciti a dare un modello aritmetico relativo ad una impostazione, analoga a quella classica, nella quale tuttavia non si ammetta la *invertibilità* del segmento [5, t. I, pp. 6-33, t. III, pp. 187-200; 4].

In questa nota si costruisce un modello che risolve il problema per il caso della retta non ordinata o parzialmente ordinata.

Rimane così insoluto un problema, relativo alla retta totalmente ordinata, che si presenta nello studio dei fondamenti di una geometria elementare « generale » [4].

1. - In diversi lavori di geometria sopra una retta [4, 1, 2], venne considerato il gruppo G $(\alpha, \beta, ...)$ delle lunghezze dei segmenti della retta, che si presenta come un gruppo additivo non abeliano.

Questo gruppo risulta dotato di un antiautomorfismo involutorio ω: $\omega(\alpha) = \overline{\alpha}$, cioè tale che

$$\overline{\alpha + \beta} = \overline{\beta} + \overline{\alpha}\,, \qquad \overline{\overline{\alpha}} = \alpha\,. \tag{1}$$

(*) Pervenuta in Redazione il 18 Novembre 1961.
Lavoro fatto nel gruppo di ricerca n. 33 del C.N.R. (anno acc. 1961-62).

La corrispondenza ω soddisfa inoltre alla seguente più particolare proprietà

$$\overline{\alpha} \neq -\alpha \,, \quad \text{se} \quad \alpha \neq 0 \,, \tag{2}$$

equivalente alla [2, n. 2.5]

$$(\alpha + \overline{\alpha} = \beta + \overline{\beta}) \Rightarrow (\alpha = \beta) \,.$$

Ora, seguendo procedimenti classici della teoria dei gruppi, si costruisce un gruppo G che soddisfa oltre che alle (1), con ω non identico, anche alla condizione (2).

Questa condizione non è ad es. soddisfatta da alcun elemento nell'antiautomorfismo banale che scambia ciascun elemento di G con il proprio opposto: $\alpha \longleftrightarrow -\alpha$.

Consideriamo ora il gruppo moltiplicativo G delle matrici reali non singolari del secondo ordine pensato come gruppo additivo. Lo scambio di una matrice con la trasposta dà luogo ad un antiautomorfismo, nel quale però vi sono particolari elementi che non soddisfano alla (2); ad es.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}' = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}^{-1} .$$

2. - Siano H e $\overline{H}$ due gruppi ciclici additivi non finiti generati rispettivamente dagli elementi distinti h, $\overline{h}$. Pertanto, n essendo un intero qualsiasi:

$$nh \in H \,, \quad n\overline{h} \in \overline{H} \,.$$

Conveniamo inoltre che

$$x_i = h \quad \text{oppure} \quad x_i = \overline{h}$$

e

$$(x_i = h) \Rightarrow (\overline{x}_i = \overline{h}) \,, \quad (x_i = \overline{h}) \Rightarrow (\overline{x}_i = h) \,;$$

di modo che:

$$\overline{\overline{x}}_i = x_i \,.$$

Indichiamo con A l'insieme degli elementi

$$(3) \qquad a = (n_1x_1, n_2x_2, \dots, n_rx_r) ;$$

le n_ix_i $(i = 1, \dots, r)$ diconsi le componenti di a.

Se in due componenti successive $n_{i-1}x_{i-1}$, n_ix_i è

$$1) \quad x_{i-1} = x_i ,$$

oppure

$$2) \quad x_{i-1} \neq x_i \quad \text{ma} \quad n_{i-1} = 0 \quad \text{o} \quad n_i = 0 ,$$

poniamo:

$$(4) \qquad n_{i-1}x_{i-1} + n_ix_i = (n_{i-1} + n_i)x ,$$

dove nel caso

$$\begin{array}{lll} 1) & x = x_{i-1} = x_i , & \\ 2) & x = x_{i-1} & \text{se} \quad n_{i-1} \neq 0 \quad \text{e} \quad n_i = 0 \\ & x = x_i & \text{se} \quad n_{i-1} = 0 \quad \text{e} \quad n_i \neq 0 , \\ & x = x_i & \text{arbitrario se} \quad n_{i-1} = n_i = 0 . \end{array}$$

L'elemento di A

$$(5) \quad a' = (n_1x_1, \dots, n_{i-2}x_{i-2}, (n_{i-1} + n_i)x, n_{i+1}x_{i+1}, \dots, n_rx_r)$$

dicesi dedotto da a mediante *contrazione*; oppure a dicesi dedotto da a' mediante *dilatazione.*

Due elementi di A

$$(6) \qquad a = (n_1x_1, \dots, n_rx_r) , \qquad b = (m_1y_1, \dots, m_sy_s)$$

si diranno equivalenti:

$$(7) \qquad a \approx b ,$$

se dall'uno si può passare all'altro con una catena finita di operazioni che siano contrazioni o dilatazioni. La (7) è evidentemente un'effettiva relazione di equivalenza in A.

Consideriamo le rispettive classi di equivalenza $< a >$, che interpretiamo come elementi $\alpha = < a >$ di un insieme G.

Con riferimento alle (6) poniamo: $\alpha = < a >$, $\beta = < b >$ e

$$(8) \qquad \alpha + \beta = \gamma ,$$

essendo $\gamma = < (n_1 x_1, \dots, n_r x_r, m_1 y_1, \dots, m_s y_s) > = <(a, b)>$.

Si verifica facilmente che rispetto all'operazione interna (8), G è un gruppo additivo non abeliano avente come zero

$$(9) \qquad 0 = <(0x_1, \dots, 0x_r)> = <(0x)> ;$$

inoltre

$$(10) \qquad - < a > = <(- n_r x_r, \dots, - n_1 x_1)> .$$

Osservazione: Il gruppo G è dunque un gruppo libero con i generatori $h, \bar{h}$, del quale si è voluto dare, trattandosi di una prova esistenziale, una effettiva costruzione.

Introduciamo in G la mappa biettiva ω

$$(11) \qquad \alpha \longleftrightarrow \bar{\alpha} = < (n_r \bar{x}_r, \dots, n_1 \bar{x}_1) > .$$

Risulta subito che

$$(1') \qquad \overline{\alpha + \beta} = \bar{\beta} + \bar{\alpha} , \quad \bar{\bar{\alpha}} = \alpha ,$$

cioè ω è un antiautomorfismo involutorio di G. Inoltre, come immediato

$$(2') \qquad (\alpha \neq 0) \Rightarrow (\bar{\alpha} \neq - \alpha) .$$

3. - Se la retta s è (parzialmente o totalmente) ordinata, il relativo gruppo G delle lunghezze risulta (parzialmente o totalmente) ordinato, nel senso che esso possiede un sistema G^+ di

elementi, detti positivi, tale che

1°) $0 \in G^+$.
2°) $(\alpha, \beta \in G^+) \Rightarrow (\alpha + \beta) \in G^+$.
3°) $(\alpha, \beta \in G^+, \alpha + \beta = 0) \Rightarrow (\alpha = \beta = 0)$.

Il gruppo G risulterebbe un *po*-gruppo o un *so*-gruppo, secondo le definizioni di Birkhoff e dei numerosi altri studiosi di proprietà relative ai gruppi ordinati (che è stato possibile consultare), se inoltre il sistema degli elementi positivi fosse invariante, cioè se

4°) $(\alpha \in G) \Rightarrow (-\alpha + G^+ + \alpha = G^+)$.

Si ritiene invece che questa condizione non segua dalle proprietà geometriche della retta s [4, 1], per cui la summenzionata ampia teoria dei *po*-gruppi e degli *so*-gruppi non sarebbe applicabile al gruppo G delle lunghezze.

Tuttavia l'antiautomorfismo ω caratterizza ulteriormente il gruppo (parzialmente o totalmente) ordinato G, in quanto il sistema degli elementi positivi è invariante per ω, cioè

5°) $(\alpha \in G^+) \Rightarrow (\bar{\alpha} \in G^+)$.

Possiamo dotare di un ordinamento il modello costruito al n. 2, mediante le seguenti convenzioni: $0 \in G^+$ e un elemento $\alpha \neq 0$ appartenga a G^+ se $n_1 + ... + n_r > 0$; invece se $\alpha \neq 0$ e $n_1 + ... + n_r = 0$, nè α appartenga a G^+, nè $-\alpha$ appartenga a G^+; pertanto l'ordinamento risulta parziale.

Si verifica direttamente che questo ordinamento (parziale) soddisfa alle proprietà 1ª), 2ª), 3ª), 5ª); anzi soddisfa anche alla 4ª).

Rimane quindi aperto il seguente problema:

È possibile dimostrare che la proprietà 4ª) dell'ordinamento totale, consegue dalle 1ª), 2ª), 3ª), 5ª), nel qual caso ω risulta l'identità [4], oppure esiste un esempio in contrario [3, n. 16]? (*)

(*) Cfr. H. FREUDENTHAL [6].

Il richiesto esempio dovrebbe essere un gruppo additivo G ordinato, non abeliano, non archimedeo, in cui una lunghezza potrebbe essere eguale ad una sua parte, l'elemento $\alpha - \beta$ potrebbe appartenere a G^+ senza che vi appartenga $-\beta + \alpha$; etc..

BIBLIOGRAFIA

[1] BUSULINI F.: *Sopra una retta elementare parzialmente ordinata.* [Atti dell'Acc. Patavina di Sc., Lett. ed Arti, t. 72 (1959-60)].
[2] BUSULINI F.: *Contributi alla geometria della retta.* [Ann. Università Ferrara, t. 9 (1960-61)].
[3] MORIN U.: *Geometria elementare e teoria dei gruppi.* [Atti del Convegno sulla teoria dei gruppi finiti, Firenze 1960].
[4] MORIN U., BUSULINI F.: *Alcune considerazioni sopra una geometria generale.* [Atti dell'Ist. Veneto di Sc., Lett. ed Arti, t. 107 (1959), pp. 373-386].
[5] MORIN U., BUSULINI F.: *Elementi di geometria.* [t. I, II, III. Cedam, Padova (1958-59)].
[6] Alla domanda posta nella [3] H. FREUDENTHAL dà recentemente [*Math. Reviews* t. 22 (8395) 1961] una risposta purtroppo non pertinente, dato che non si tiene conto dell'antiautomorfismo ω.