

RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

LAMBERTO CATTABRIGA

**Potenziali di linea e di dominio per equazioni non
paraboliche in due variabili a caratteristiche multiple**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 31 (1961), p. 1-45

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1961__31__1_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

POTENZIALI DI LINEA E DI DOMINIO PER EQUAZIONI NON PARABOLICHE IN DUE VARIABILI
A CARATTERISTICHE MULTIPLE

Memoria () di LAMBERTO CATTABRIGA (a Bologna)*

Lo studio delle equazioni a caratteristiche multiple in due variabili è stato iniziato in modo sistematico da H. Block ¹⁾, che ha ampiamente trattato il problema della costruzione di una soluzione fondamentale per tali equazioni. Soltanto in alcuni casi particolari, Egli ha anche impostato problemi al contorno, ma la sua trattazione, che è quella classica della traduzione del problema in equazioni integrali, non è sempre esauriente ²⁾. Recentemente lo studio di problemi al contorno per equazioni a caratteristiche multiple è stato ripreso da B. Pini, che ha trattato problemi per equazioni non paraboliche del quarto ordine ³⁾.

Nei nn. che seguono esponiamo alcuni risultati per potenziali

(*) Pervenuta in redazione il 12 ottobre 1960.

Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università, Bologna.

¹⁾ H. BLOCK, *Sur les équations linéaires aux dérivées partielles à caractéristiques multiples*, Arkiv för Mat. Astr. och Fys., Note I e II, Bd. 7, 1912 e Nota III, Bd. 8, 1913.

²⁾ Cfr. anche E. DEL VECCHIO, *Sur deux problèmes d'intégration pour les équations paraboliques* $\partial^2 z / \partial \xi^2 - \partial z / \partial \eta = 0$, $\partial^2 z / \partial \xi^2 - \partial^2 z / \partial \eta^2 = 0$; H. BLOCK, *Remarque à la note précédente*, Arkiv för Mat. Astr. och Fys., Bd., 11, 1916-17.

³⁾ B. PINI, *Sulle equazioni lineari del quarto ordine in due variabili con caratteristiche coincidenti*, Note I e II, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, 8, 1958-59 e 9, 1960.

relativi all'operatore $\mathcal{Q}_0 = D_x^{2n+1} + (-1)^n D_y^2$ ⁴⁾ con n numero naturale qualunque. Esso risulta ipoellittico, secondo la definizione di ipoellitticità data da L. Hörmander ⁵⁾. Nel n. 1 si costruiscono oltre alla soluzione fondamentale, anche altre funzioni ausiliarie non considerate da Block, che si presentano naturalmente nella costruzione della soluzione fondamentale e riescono utili per gli sviluppi successivi. Assieme ad alcuni procedimenti già usati da B. Pini ⁶⁾, ci si vale in questo n. di valutazioni asintotiche per trasformate di Fourier ⁷⁾ e di Laplace, che consentono di ottenere sia stime più precise di quelle di Block per la soluzione fondamentale, sia stime corrispondenti per le funzioni ausiliarie. Il n. 2 contiene uno studio dei potenziali di linea, relativi a curve $x = \chi(y)$, $0 \leq y \leq 1$, che si possono costruire con i nuclei ottenuti al n. 1. In particolare si esaminano le discontinuità delle successive derivate nei punti della curva su cui sono distribuiti. Teoremi di unicità per due problemi al contorno relativi alla equazione $\mathcal{Q}_0[u] = 0$, che appaiono tipici sono provati al n. 3. Utilizzando i potenziali studiati al n. 2, si danno nel n. 4 le soluzioni esplicite di tali problemi nella striscia $\Gamma \{-\infty < x < +\infty, 0 < y < 1\}$ e nelle semistriscie $\Gamma^+ \{x > 0, 0 < y < 1\}$ e $\Gamma^- \{x < 0, 0 < y < 1\}$, in ipotesi di regolarità per i dati al contorno, che sembrano quelle naturali trattandosi di soluzioni classiche. I nuclei dei potenziali con cui si esprimono tali soluzioni, si presentano come gli analoghi dei nuclei, che S. Agmon ⁸⁾ chiama nuclei di Poisson, mediante i quali è possibile esprimere la soluzione del problema di Dirichlet in un semipiano, per equazioni ellittiche di ordine superiore al secondo

⁴⁾ Si è posto $D_x^r = \partial^r / \partial x^r$, $D_y^s = \partial^s / \partial y^s$.

⁵⁾ L. HÖRMANDER, *On the theory of general partial differential operators*, Acta Math., 94, 1955.

⁶⁾ B. PINI, *Sul problema fondamentale di valori al contorno per una classe di equazioni paraboliche lineari*, Annali di Mat. pura appl., 4, 43, 1957.

⁷⁾ Cfr. M. J. LIGHTHILL, *Fourier Analysis*, Cambridge, 1958; Cap. IV.

⁸⁾ S. AGMON, *Multiple layer potentials and the Dirichlet problem for higher order elliptic equations in the plane*, Comm. Pure Appl. Math., X, 1957.

in due variabili. Nel n. 5, infine si presenta un potenziale di dominio, con cui è possibile rappresentare soluzioni della equazione non omogenea $\mathcal{L}_0[u] = g$.

Ciò che si è qui sviluppato, oltre a mostrare alcune particolarità, che sono proprie agli operatori di questo tipo di ordine dispari, mette in luce come lo stesso procedimento ed analoghi risultati possano valere per una classe più vasta di equazioni ipoellittiche a caratteristiche multiple. In particolare appare chiaro come ciò si verifichi per gli operatori che si ottengono sostituendo in \mathcal{L}_0 alla derivata seconda rispetto ad y una qualunque derivata pari di ordine $\leq 2n$, e quali siano i mutamenti da apportare in tal caso alla trattazione che segue.

1. *Costruzione della soluzione fondamentale e di altre soluzioni particolari della equazione $\mathcal{L}_0[u] = 0$.*

Indichiamo con α_k , $k = 0, \dots, 2n$, le radici della equazione $\alpha^{2n+1} = (-1)^{n+1}$.

È

$$\alpha_k = \begin{cases} e^{(2k+1)\pi i/(2n+1)} & \text{per } n \text{ pari,} \\ e^{2k\pi i/(2n+1)} & \text{per } n \text{ dispari.} \end{cases}$$

Per ogni punto $Q \equiv (\xi, \eta)$ le parti reali ed i coefficienti delle parti immaginarie delle funzioni

$$(1) \quad \alpha_k \int_0^{+\infty} \exp \{ \alpha_k \mu (x - \xi) - \mu^{(2n+1)/2} |y - \eta| \} d\mu, \quad k = 0, \dots, 2n$$

sono soluzioni della equazione $\mathcal{L}_0[u] = 0$ in tutti i punti $P \equiv (x, y)$ con $y \neq \eta$. Poichè delle α_k una è eguale a $(-1)^{n+1}$ e le altre $2n$ sono a due a due complesse coniugate, prendendo le parti reali ed i coefficienti delle parti immaginarie delle (1) otterremo effettivamente soltanto $2n + 1$ funzioni reali, che possiamo pensare corrispondenti alle $n + 1$ radici α_k con $\Im \alpha_k \geq 0$, cioè a $k = 0, \dots, n$. Di queste per n pari ve ne sono $n/2$, per $k = 0, \dots, (n - 2)/2$, con $\Re \alpha_k > 0$ ed $n/2 + 1$, per $k = n/2, \dots, n$, con $\Re \alpha_k < 0$ e per n dispari $(n + 1)/2$, per $k = 0, \dots, (n - 1)/2$, con $\Re \alpha_k > 0$ ed $(n + 1)/2$, per $k = (n + 1)/2, \dots, n$, con

Re $\alpha_k < 0$. Ponendo $\mu = \lambda |y - \eta|^{-2/(2n+1)}$, $t = (x - \xi) |y - \eta|^{-2/(2n+1)}$ si ottiene

$$\begin{aligned} \alpha_k \int_0^{+\infty} \exp \{ \alpha_k \mu (x - \xi) - \mu^{(2n+1)/2} |y - \eta| \} d\mu &= \\ &= |y - \eta|^{-2/(2n+1)} \alpha_k \int_0^{+\infty} \exp(\alpha_k \lambda t - \lambda^{(2n+1)/2}) d\lambda = \\ &= |y - \eta|^{-2/(2n+1)} g_k(t), \quad -\infty < t < +\infty. \end{aligned}$$

Se consideriamo la funzione $\exp(\alpha_k \lambda t - \lambda^{(2n+1)/2})$ per valori complessi di λ , intendendo di scegliere per $\lambda^{(2n+1)/2}$ quella determinazione che per λ reale positivo è reale positiva, otteniamo una funzione olomorfa di λ in tutto il piano privato del semiasse reale negativo e dell'origine. Se è $-\pi/(2n+1) < \varphi < \pi/(2n+1)$ si può scrivere

$$g_k(t) = \alpha_k e^{i\varphi} \int_0^{+\infty} \exp \{ \alpha_k \varrho e^{i\varphi t} - \varrho^{(2n+1)/2} e^{(2n+1)i\varphi/2} \} d\varrho. \text{ *)}$$

Imponendo che sia $\alpha_k e^{i\varphi} = \pm i$ si vede che fra i valori di k tali che $0 \leq k \leq n$ soltanto $k = n/2$ per n pari e $k = (n+1)/2$ per n dispari consentono di scrivere la precedente eguaglianza. Per tali valori di k , che indicheremo in seguito con k_0 , si ha $\alpha_{k_0} = \frac{n+1}{2n+1} \pi$, sicchè è Re $\alpha_{k_0} < 0$, ed inoltre $\varphi = -\pi/2(2n+1)$ e

$$\begin{aligned} g_{k_0}(t) &= i \int_0^{+\infty} \exp \{ i\varrho t - \varrho^{(2n+1)/2} e^{-i\pi/2} \} d\varrho = \\ &= i \int_0^{+\infty} \exp \left\{ -\frac{\varrho^{(2n+1)/2}}{\sqrt{2}} + i \left(\frac{\varrho^{(2n+1)/2}}{\sqrt{2}} + \varrho t \right) \right\} d\varrho. \end{aligned}$$

Posto $\alpha_k t = -p$ si potrà desumere il comportamento asin-

*) È infatti in tal caso $\lim_{\varrho \rightarrow +\infty} \int_0^{\varrho} \exp \{ \alpha_k \varrho e^{i\varphi} - \varrho^{(2n+1)/2} e^{(2n+1)i\varphi/2} \} d\varrho = 0$.

totico delle $g_k(t)$ e loro derivate per $t \rightarrow \pm \infty$ da quello della funzione

$$\Phi(p) = \int_0^{+\infty} e^{-p\lambda} e^{-(2n+1)\lambda/2} d\lambda$$

e delle sue derivate per $p \rightarrow \infty$. Se $\Re p > 0$ è ¹⁰⁾

$$\Phi^{(\nu)}(p) \approx (-1)^\nu \sum_0^\infty \frac{(-1)^h}{h!} \Gamma\left(\frac{2nh + h + 2\nu + 2}{2}\right) p^{-(2nh+h+2\nu+2)/2},$$

per $p \rightarrow \infty$, $\nu = 0, 1, \dots$

e quindi per $|t| \rightarrow \infty$, $\Re(\alpha_k t) < 0$,

$$(2) \quad g_k^{(\nu)}(t) \approx \nu! (-t)^{-\nu-1} +$$

$$+ \alpha_k^{\nu+1} \sum_1^\infty \frac{(-1)^h}{h!} \Gamma\left(\frac{2nh + h + 2\nu + 2}{2}\right) (-\alpha_k t)^{-(2nh+h+2\nu+2)/2}$$

Da questa si traggono, per ogni numero naturale ν le

$$(3) \quad D^\nu \Im g_k(t) = - \Gamma\left(\frac{2n + 2\nu + 3}{2}\right) \cdot \Im [\alpha_k^{\nu+1} (-\alpha_k t)^{-(2n+2\nu+3)/2}] + o(|t|^{-(2n+2\nu+3)/2}),$$

per $|t| \rightarrow +\infty$ con $\Re(\alpha_k t) < 0$ e

$$(4) \quad D^\nu [\Re g_k(t) - \Re g_{k_0}(t)] = - \Gamma\left(\frac{2n + 2\nu + 3}{2}\right) \cdot \{ \Re [\alpha_k^{\nu+1} (-\alpha_k t)^{-(2n+2\nu+3)/2}] - \Re [\alpha_{k_0}^{\nu+1} (-\alpha_{k_0} t)^{-(2n+2\nu+3)/2}] \} +$$

$$+ o(t^{-(2n+2\nu+3)/2})$$

per $t \rightarrow +\infty$ e $\Re \alpha_k < 0$. Dalle $\Im g_k(t)$, $\Re g_k(t) - \Re g_{k_0}(t)$, mediante le posizioni fatte sopra, si ottengono $2n$ soluzioni della equazione $\Omega_0[u] = 0$.

¹⁰⁾ Cfr. G. DOETSCH, *Handbuch der Laplace-Transformation*, Bd. II, 1955; pp. 45-46. Qui e nel seguito si intende di considerare il valore principale delle potenze indicate.

In forza delle (3) e (4), per le n di esse corrispondenti a radici α_k con $\Re \alpha_k < 0$, varranno per $t \rightarrow +\infty$ le valutazioni

$$D^\nu \Im g_k = o(t^{-(2n+2\nu+3)/2}),$$

$$D^\nu [\Re g_k - \Re g_{k_0}] = (-1)^\nu \Gamma\left(\frac{2n+2\nu+3}{2}\right) \cdot [(-1)^k - (-1)^{k_0}] t^{-(2n+2\nu+3)/2} + o(t^{-(2n+2\nu+3)/2})$$

per n pari, e

$$D^\nu \Im g_k = (-1)^{k+\nu+1} \Gamma\left(\frac{2n+2\nu+3}{2}\right) t^{-(2n+2\nu+3)/2} + o(t^{-(2n+2\nu+3)/2}),$$

$$D^\nu [\Re g_k - \Re g_{k_0}] = o(t^{-(2n+2\nu+3)/2})$$

per n dispari.

Per le funzioni $\Im g_k$ corrispondenti a radici α_k con $\Re \alpha_k > 0$, in numero di $n/2$ se n è pari e di $(n-1)/2$ se n è dispari, seguiranno poi da (3) per $t \rightarrow -\infty$ le valutazioni

$$D^\nu \Im g_k = (-1)^k \Gamma\left(\frac{2n+2\nu+3}{2}\right) |t|^{-(2n+2\nu+3)/2} + o(|t|^{-(2n+2\nu+3)/2})$$

per n pari, e

$$D^\nu \Im g_k = o(|t|^{-(2n+2\nu+3)/2})$$

per n dispari. Per le funzioni $\Re g_k - \Re g_{k_0}$ corrispondenti a radici α_k con $\Re \alpha_k > 0$, in numero di $n/2$ se n è pari e di $(n+1)/2$ se n è dispari, non si possono invece ottenere valutazioni corrispondenti per $t \rightarrow -\infty$ utilizzando soltanto le (2), poichè in tal caso è $\Re(\alpha_{k_0} t) \rightarrow +\infty$. Per giungere ad un tale risultato, oltre alle

$$D^\nu \Re g_k = \nu! |t|^{-\nu-1} + o(|t|^{-(2n+2\nu+3)/2}) \quad \text{per } t \rightarrow -\infty$$

se n è pari, e

$$D^\nu \Re g_k = \nu! |t|^{-\nu-1} + (-1)^{k+1} \Gamma\left(\frac{2n+2\nu+3}{2}\right) \cdot |t|^{-(2n+2\nu+3)/2} + o(|t|^{-(2n+2\nu+3)/2}), \quad \text{per } t \rightarrow -\infty$$

se n è dispari, che si ottengono dalle (2) per $\Re \alpha_k > 0$, ci procureremo allora valutazioni corrispondenti per la $\Re g_{k_0}$. Per questo ricorriamo alla espressione di g_{k_0} data più sopra. Si può scrivere

$$g_{k_0} = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\varrho t} \exp(-|\varrho|^{(2n+1)/2} e^{-i\pi/4}) d\varrho - \\ - \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\varrho t} \exp(-|\varrho|^{(2n+1)/2} e^{-i\pi/4}) \operatorname{sgn} \varrho d\varrho = \frac{i}{2} (I_1 - I_2).$$

Una valutazione asintotica per questi due ultimi integrali si può ottenere utilizzando certi risultati di M. J. Lighthill, sul comportamento asintotico delle trasformate di Fourier ¹¹⁾. Si vede in questo modo che I_1 ed I_2 si comportano per $|t| \rightarrow +\infty$ come le trasformate di Fourier, nel senso delle distribuzioni di

$$1 - |\varrho|^{(2n+1)/2} e^{-i\pi/4} \quad \text{e} \quad \operatorname{sgn} \varrho - |\varrho|^{(2n+1)/2} e^{-i\pi/4} \operatorname{sgn} \varrho$$

rispettivamente. Precisamente riesce per $|t| \rightarrow +\infty$

$$I_1 = -2e^{-i\pi/4} \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{2n+3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2n+3}{2}\right) \cdot |t|^{-(2n+3)/2} + o(|t|^{-n-2}),$$

$$I_2 = \left(\frac{it}{2}\right)^{-1} + 2ie^{-i\pi/4} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} \frac{2n+3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2n+3}{2}\right) \cdot |t|^{-(2n+3)/2} \operatorname{sgn} t + o(|t|^{-n-2}),$$

da cui si traggono per n pari le valutazioni

$$\Re g_{k_0} = -t^{-1} + \frac{(-1)^{n/2}}{2} \Gamma\left(\frac{2n+3}{2}\right) (\operatorname{sgn} t + 1) \cdot |t|^{-(2n+3)/2} + o(|t|^{-n-2}),$$

¹¹⁾ Cfr. op. cit. in 7) Cap. IV, th. 19.

$$\Im g_{k_0} = - (-1)^{n/2} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{2n+3}{2}\right) (\operatorname{sgn} t - 1) \cdot \\ \cdot |t|^{-(2n+3)/2} + o(|t|^{-n-2})$$

e per n dispari le

$$\Re g_{k_0} = -t^{-1} + \frac{(-1)^{(n+1)/2}}{2} \Gamma\left(\frac{2n+3}{2}\right) (\operatorname{sgn} t - 1) \cdot \\ \cdot |t|^{-(2n+3)/2} + o(|t|^{-n-2}),$$

$$\Im g_{k_0} = - (-1)^{(n+1)/2} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{2n+3}{2}\right) (\operatorname{sgn} t + 1) \cdot \\ \cdot |t|^{-(2n+3)/2} + o(|t|^{-n-2}),$$

tutte per $|t| \rightarrow +\infty$.

Per valutare le derivate di g_{k_0} , basterà valutare le funzioni

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varrho^\nu e^{-i\varrho t} \exp(-|\varrho|^{(2n+1)/2} e^{-i\pi/4}) d\varrho, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \varrho^\nu e^{-i\varrho t} \exp(-|\varrho|^{(2n+1)/2} e^{-i\pi/4} \operatorname{sgn} \varrho) d\varrho, \quad \nu = 1, 2, \dots,$$

ciascuna delle quali può scriversi nella forma

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\varrho t} |\varrho|^\nu \exp(-|\varrho|^{(2n+1)/2} e^{-i\pi/4}) d\varrho = J_1,$$

oppure nell'altra

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\varrho t} |\varrho|^\nu \exp(-(\varrho|^{(2n+1)/2} e^{-i\pi/4}) \operatorname{sgn} \varrho) d\varrho = J_2$$

Allo stesso modo tenuto per $\nu = 0$ si vede che questi integrali differiscono rispettivamente dalle trasformate di Fourier delle

funzioni

$$|e|^{\nu} - |e|^{(2n+1+2\nu)/2} e^{-i\pi/4} \quad \text{e} \quad |e|^{\nu} \operatorname{sgn} e - |e|^{(2n+1+2\nu)/2} e^{-i\pi/4} \operatorname{sgn} e$$

per quantità che sono $o(|t|^{-n-\nu-2})$ per $|t| \rightarrow +\infty$. Pertanto si avrà

$$J_1 = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}(\nu+1)\right) \nu! |t|^{-\nu-1} - 2e^{-i\pi/4} \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{2n+2\nu+3}{2}\right) \cdot \\ \cdot \Gamma\left(\frac{2n+2\nu+3}{2}\right) |t|^{-(2n+2\nu+3)/2} + o(|t|^{-n-\nu-2})$$

$$J_2 = -2i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}(\nu+1)\right) \nu! |t|^{-\nu-1} \operatorname{sgn} t + \\ + 2ie^{-i\pi/4} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} \frac{2n+2\nu+3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2n+2\nu+3}{2}\right) \cdot \\ \cdot |t|^{-(2n+2\nu+3)/2} \operatorname{sgn} t + o(|t|^{-n-\nu-2})$$

per ogni numero naturale ν . Dalla

$$D^{\nu} g_{k_0} = \frac{i^{\nu+1}}{2} (J_1 - J_2)$$

seguirà allora

$$D^{\nu} \Re e g_{k_0} = (-1)^{\nu+1} \left\{ \nu! |t|^{-\nu-1} - (-1)^{n/2} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{2n+2\nu+3}{2}\right) \cdot \right. \\ \left. \cdot |t|^{-(2n+2\nu+3)/2} (\operatorname{sgn} t + 1) \right\} + o(|t|^{-n-\nu-2}),$$

e

$$D^{\nu} \Im m g_{k_0} = -(-1)^{n/2} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{2n+2\nu+3}{2}\right) \cdot \\ \cdot |t|^{-(2n+2\nu+3)/2} (\operatorname{sgn} t - 1) + o(|t|^{-n-\nu-2})$$

per n pari, ed analogamente

$$D^{\nu} \Re e g_{k_0} = (-1)^{\nu+1} \left\{ \nu! |t|^{-\nu-1} - (-1)^{(n+1)/2} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{2n+2\nu+3}{2}\right) \cdot \right. \\ \left. \cdot |t|^{-(2n+2\nu+3)/2} (\operatorname{sgn} t - 1) \right\} + o(|t|^{-n-\nu-2})$$

e

$$D^{\nu} \Im g_{k_0} = (-1)^{\nu+1} \frac{(-1)^{(n+1)/2}}{2} \Gamma \left(\frac{2n+2\nu+3}{2} \right) \cdot |t|^{-(2n+2\nu+3)/2} (\operatorname{sgn} t + 1) + o(|t|^{-n-\nu-2})$$

per n dispari. Si conclude così che se n è pari per le $n/2$ funzioni $\Re g_k - \Re g_{k_0}$ con $\Re \alpha_k > 0$ si hanno le valutazioni

$$D^{\nu} [\Re g_k - \Re g_{k_0}] = o(|t|^{-(2n+2\nu+3)/2})$$

per $t \rightarrow -\infty$; si vede inoltre che anche la funzione $\Im g_{k_0}$ è tale che

$$D^{\nu} \Im g_{k_0} = (-1)^{n/2} \Gamma \left(\frac{2n+2\nu+3}{2} \right) |t|^{-(2n+2\nu+3)/2} + o(|t|^{-n-\nu-2})$$

per $t \rightarrow -\infty$. Analogamente se n è dispari per le $(n+1)/2$ funzioni $\Re g_k - \Re g_{k_0}$ con $\Re \alpha_k > 0$ varranno le valutazioni

$$D^{\nu} [\Re g_k - \Re g_{k_0}] = -\Gamma \left(\frac{2n+2\nu+3}{2} \right) \cdot [(-1)^k - (-1)^{(n+1+2\nu)/2}] |t|^{-(2n+2\nu+3)/2} + o(|t|^{-(2n+2\nu+3)/2})$$

per $t \rightarrow -\infty$, mentre la funzione $\Im g_{k_0}$ sarà tale che

$$D^{\nu} \Im g_{k_0} = o(|t|^{-n-\nu-2})$$

sempre per $t \rightarrow -\infty$.

Alcune delle valutazioni precedenti si possono ulteriormente precisare utilizzando un procedimento già usato da B. Pini ¹²⁾. Si verifica anzitutto facilmente che è

$$g_k^{(2n+1)} + (-1)^n \frac{4t^2}{(2n+1)^2} g_k'' + (-1)^n \frac{14+4n}{(2n+1)^2} t g_k' + (-1)^n \frac{4n+6}{(2n+1)^2} g_k = 0$$

¹²⁾ Cfr. op. cit. in *) pp. 294-95.

ossia

$$g_k^{(2n)} + (-1)^n \frac{4t^2}{(2n+1)^2} g_k' + (-1)^n \frac{4n+6}{(2n+1)^2} t g_k = \text{cost.}$$

Un semplice calcolo mostra poi che la costante qui sopra a secondo membro è eguale a $(-1)^{n+1} 2 / (2n+1)$, onde le $\Im g_k$ e $\Re g_k - \Re g_{k_0}$ saranno soluzioni della equazione

$$(5) \quad z^{(2n)} + (-1)^n \frac{4t^2}{(2n+1)^2} z' + (-1)^n \frac{4n+6}{(2n+1)^2} tz = 0.$$

Per $t > 0$ poniamo $\eta(\xi) = tz$, $\xi = t^{(2n+1)/(2n-1)} / (2n+1)$; la η soddisferà allora alla equazione

$$(6) \quad \eta^{(2n)} + \sum_0^{2n-2} c_r \xi^{-(2n-r)} \eta^{(r)} + (-1)^n \frac{4}{(2n+1)^2} \eta' + (-1)^n \frac{2}{(2n+1)^2} \xi^{-1} \eta = 0,$$

ove le c_r sono opportune costanti. Le radici della equazione

$$\lambda^{2n} + (-1)^n \frac{4}{(2n+1)^2} \lambda + (-1)^n \frac{2}{(2n+1)^2} \xi^{-1} = 0$$

per $\xi \rightarrow +\infty$ tendono ciascuna ad una radice della $\lambda^{2n} + (-1)^n 4\lambda / (2n+1)^2$. Una di esse tenderà perciò a zero per $\xi \rightarrow +\infty$, mentre le altre $2n-1$ tenderanno ciascuna ad una radice della equazione

$$\lambda^{2n-1} = (-1)^{n+1} 4 / (2n+1)^2.$$

Sia per n pari che per n dispari, n radici di questa equazione hanno parte reale positiva ed $n-1$ parte reale negativa. La (6) avrà quindi ¹³⁾ n integrali η_i , linearmente indipendenti tali che

$$\eta_i^{(r)} = O(\exp c_i \xi) \quad \text{per} \quad \xi \rightarrow +\infty, \quad r = 0, 1, \dots, \quad i = 1, \dots, n$$

¹³⁾ Cfr. per es. R. BELLMAN, *Stability theory of differential equations*, 1953; pp. 50 e segg.

ed $n - 1$ integrali η_j , linearmente indipendenti fra loro e dai precedenti, tali che

$$(7) \quad \eta_j^{(\nu)} = O(\exp - c_j \xi) \quad \text{per } \xi \rightarrow +\infty, \quad \nu = 0, 1, \dots, \quad j = 1, \dots, n-1$$

con c_i e c_j costanti positive. Di conseguenza vi saranno n integrali della equazione (5) che tendono esponenzialmente all'infinito per $t \rightarrow +\infty$ ed $n - 1$ tali che

$$z^{(\nu)}(t) = O(\exp - ct^{(2n+1)/(2n-1)}) \quad \text{per } t \rightarrow +\infty, \quad \nu = 0, 1, \dots, \quad c > 0,$$

tutti fra loro linearmente indipendenti. D'altra parte per n pari vi sono $n/2$ funzioni $\Im g_k$ ed $n/2$ funzioni $\Re g_k - \Re g_{k_0}$ corrispondenti a radici α_k con $\Re \alpha_k < 0$ e per n dispari $(n+1)/2$ funzioni $\Im g_k$ ed $(n-1)/2$ funzioni $\Re g_k - \Re g_{k_0}$ per le quali si verifica la stessa circostanza. Ricordando allora che le $\Im g_k$ e le $\Re g_k - \Re g_{k_0}$ sono $2n$ soluzioni linearmente indipendenti della equazione (5), si conclude che le n indicate sopra sono le uniche fra esse che tendano a zero per $t \rightarrow +\infty$, le altre n tendendo necessariamente all'infinito in modo esponenziale. Esse sono tutte le $\Im g_k$ e $\Re g_k - \Re g_{k_0}$ con $\Re \alpha_k > 0$. Posto poi per $t < 0$ $z(t) = z(-\tau) = \zeta(\tau)$, la ζ soddisferà alla equazione

$$\zeta^{(2n)} - (-1)^n \frac{4\tau^2}{(2n+1)^2} \zeta' - (-1)^n \frac{4n+6}{(2n+1)^2} \tau \zeta = 0,$$

mentre il cambiamento di variabili $\xi = \frac{1}{2n+1} \tau^{(2n+1)/(2n-1)}$, $\eta(\xi) = \tau \zeta$ condurrà alla equazione

$$(6') \quad \eta^{(2n)} + \sum_0^{2n-2} c_r \xi^{-(2n-r)} \eta^{(r)} - (-1)^n \frac{4}{(2n+1)^2} \eta' - (-1)^n \frac{2}{(2n+1)^2} \xi^{-1} \eta = 0.$$

Osservato che delle radici di

$$\lambda^{2n-1} = (-1)^n 4/(2n+1)^2$$

$n - 1$ hanno parte reale positiva ed n parte reale negativa, si potrà affermare che vi sono n soluzioni linearmente indipendenti di (6') che tendono a zero come le (7) per $\xi \rightarrow +\infty$ e quindi altrettante soluzioni linearmente indipendenti di (5) tali che

$$z^{(\nu)}(t) = O(\exp - c |t|^{(2n+1)/(2n-1)}) \text{ per } t \rightarrow -\infty, \nu = 0, 1, \dots, c > 0;$$

ve ne saranno invece $n - 1$ che tendono esponenzialmente all'infinito per $t \rightarrow -\infty$. I risultati ottenuti più sopra assicurano d'altra parte che fra le $\Im g_k, \Re g_k - \Re g_{k_0}$ ve ne sono in ogni caso $n + 1$ che tendono a zero per $t \rightarrow -\infty$. Le rimanenti $n - 1$, per quanto ora provato, dovranno perciò divergere per $t \rightarrow -\infty$. Esse sono tutte le $\Im g_k$ e $\Re g_k - \Re g_{k_0}$ con $\Re \alpha_k < 0$, tranne la $\Im g_{k_0}$. È pure evidente che alla radice della equazione in λ che tende a zero per $\xi \rightarrow +\infty$ ($\xi \rightarrow -\infty$), corrisponderà una soluzione della (5) che è $O(|t|^{-(2n+3)/2})$ per $t \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow -\infty$) e quindi che tutte le $\Im g_k$ e $\Re g_k - \Re g_{k_0}$ che sono $o(|t|^{-(2n+3)/2})$ per $t \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow -\infty$) saranno più precisamente combinazioni lineari di soluzioni della (5) che tendono a zero come $\exp(-c |t|^{(2n+1)/(2n-1)})$, $c > 0$, per $t \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow -\infty$). In particolare avremo

$$|D^\nu \Im g_{k_0}| < C \exp(-c |t|^{(2n+1)/(2n-1)})$$

per $t > -M$ o $t < M$ secondochè n sia pari oppure dispari, C e c essendo costanti positive dipendenti soltanto da M e ν .

Indichiamo ora con $\varphi_i^*(t)$, $i = 1, \dots, n - 1$, le $n - 1$ funzioni $\Im g_k$ e $\Re g_k - \Re g_{k_0}$ corrispondenti a radici $\alpha_k \neq \alpha_{k_0}$ e con $\Re \alpha_k < 0$, con $f^*(t)$ la funzione $\Im g_{k_0}$ e con $\varphi_j^*(t)$, $j = 1, \dots, n$, le n funzioni $\Im g_k$ e $\Re g_k - \Re g_{k_0}$ corrispondenti a radici α_k con $\Re \alpha_k > 0$. Per ogni punto $Q \equiv (\xi, \eta)$ le funzioni

$$U^*(x, y; \xi, \eta) = |y - \eta|^{-2/(2n+1)} f^* \left(\frac{x - \xi}{|y - \eta|^{2/(2n+1)}} \right),$$

$$V_i^*(x, y; \xi, \eta) = |y - \eta|^{-2/(2n+1)} \varphi_i^* \left(\frac{x - \xi}{|y - \eta|^{2/(2n+1)}} \right),$$

$$W_j^*(x, y; \xi, \eta) = |y - \eta|^{-2/(2n+1)} \varphi_j^* \left(\frac{x - \xi}{|y - \eta|^{2/(2n+1)}} \right)$$

$i = 1, \dots, n - 1, j = 1, \dots, n$, costituiscono $2n$ soluzioni linearmente indipendenti, di $\mathfrak{L}_0[u] = 0$ in tutti i punti $P \equiv (x, y)$ con $y \neq \eta$; inoltre, per ogni ν intero positivo è

$$(8) \quad \varphi_i^{*(\nu)}(t) = O(t^{-(2n+2\nu+3)/2}) \quad \text{per } t \rightarrow +\infty, \quad i = 1, \dots, n - 1,$$

$$(9) \quad \psi_j^{*(\nu)}(t) = O(|t|^{-(2n+2\nu+3)/2}) \quad \text{per } t \rightarrow -\infty, \quad j = 1, \dots, n,$$

ed esisteranno finiti (eventualmente nulli) i $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{(2n+2\nu+3)/2} \varphi_i^{*(\nu)}$,
 $\lim_{t \rightarrow -\infty} |t|^{(2n+2\nu+3)/2} \psi_j^{*(\nu)}$;

$$(10_1) \quad |f^{*(\nu)}(t)| < C \exp(-c|t|^{(2n+1)/(2n-1)}) \quad \text{per } t > -M,$$

$$(10_2) \quad f^{*(\nu)}(t) = (-1)^{n/2} \Gamma\left(\frac{2n+2\nu+3}{2}\right) |t|^{-(2n+2\nu+3)/2} + \\ + o(|t|^{-(n-\nu-2)}) \quad \text{per } t \rightarrow -\infty$$

per n pari, e

$$(10_3) \quad f^{*(\nu)}(t) = (-1)^{(n+2\nu+3)/2} \Gamma\left(\frac{2n+2\nu+3}{2}\right) t^{-(2n+2\nu+3)/2} + \\ + o(t^{-n-\nu-2}) \quad \text{per } t \rightarrow +\infty,$$

$$(10_4) \quad |f^{*(\nu)}(t)| < C \exp(-c|t|^{(2n+1)/(2n-1)}) \quad \text{per } t < M,$$

per n dispari, ove C e c sono costanti positive dipendenti soltanto da M e ν .

La $U^*(P, Q)$ risulta continua in tutto il piano con tutte le sue derivate rispetto ad x , tranne nel punto $P \equiv Q$, ove la si ponga eguale a zero nei punti (x, η) con $x \neq \xi$, mentre le V_i^* , W_j^* , ove si pongano eguali a zero nei punti (x, η) con $x > \xi$ e $x < \xi$ rispettivamente, risultano continue in tutto il piano con le loro derivate rispetto ad x , con esclusione dei punti (x, η) per cui è $x < \xi$ ed $x > \xi$ rispettivamente.

Cerchiamo ora di costruire per ogni punto $Q(\xi, \eta)$ altre $2n$ soluzioni di $\mathfrak{L}_0[u] = 0$ della forma

$$U(P, Q) = |y - \eta|^{(2n-1)/(2n+1)} f\left(\frac{x - \xi}{|y - \eta|^{2/(2n+1)}}\right),$$

$$V_i(P, Q) = |y - \eta|^{(2n-1)/(2n+1)} \varphi_i \left(\frac{x - \xi}{|y - \eta|^{2/(2n+1)}} \right),$$

$$W_j(P, Q) = |y - \eta|^{(2n-1)/(2n+1)} \psi_j \left(\frac{x - \xi}{|y - \eta|^{2/(2n+1)}} \right),$$

$i = 1, \dots, n - 1, j = 1, \dots, n$, legate alle precedenti dalle

$$(11) \quad \begin{aligned} D_\nu U &= -D_\eta U = U^* \operatorname{sgn}(y - \eta), \\ D_\nu V_i &= -D_\eta V_i = V_i^* \operatorname{sgn}(y - \eta), \\ D_\nu W_j &= -D_\eta W_j = W_j \operatorname{sgn}(y - \eta). \end{aligned}$$

Indicate con $z(t)$ le funzioni $f(t), \varphi_i(t), \psi_j(t)$ e con $z^*(t)$ le $f^*, \varphi_i^*, \psi_j^*$ corrispondenti, affinchè le U, V_i, W_j siano soluzioni di $\mathfrak{L}_0[u] = 0$ e siano soddisfatte le (11) dovrà essere

$$z^{(2n+1)} - (-1)^n \frac{2}{2n+1} (tz^{*'} + z^*) = 0$$

ossia

$$(12) \quad z^{(2n)} - (-1)^n \frac{2}{2n+1} tz^* = \text{cost.},$$

e

$$(13) \quad \frac{2n-1}{2n+1} z - \frac{2}{2n+1} tz' - z^* = 0.$$

Scelta eguale a zero la costante che figura a secondo membro della (12), mostriamo che per ogni z^* esiste una ed una sola soluzione comune alle (13) e

$$(12') \quad z^{(2n)} = (-1)^n \frac{2}{2n+1} tz^*.$$

Tramite la (5) si verifica infatti che ogni soluzione della (12') è pure soluzione della equazione che si ottiene derivando $2n$ volte la (13). In particolare se consideriamo l'unica soluzione della (12') per la quale è

$$z^{(k)}(0) = \frac{2n+1}{2n-2k-1} z^{*(k)}(0), \quad k = 0, \dots, 2n-1$$

essa annulla per $t = 0$ il primo membro di (13) e le sue prime $2n - 1$ derivate, onde tale funzione sarà pure soluzione di (13). Si potrà allora scrivere

$$f(t) = t^{(2n-1)/2} \left(a^+ + \frac{2n+1}{2} \int_t^{+\infty} \tau^{-(2n+1)/2} f^*(\tau) d\tau \right) \quad \text{per } t > 0,$$

$$f(t) = |t|^{(2n-1)/2} \left(a^- + \frac{2n+1}{2} \int_{-\infty}^t |\tau|^{-(2n+1)/2} f^*(\tau) d\tau \right) \quad \text{per } t < 0,$$

$$\varphi_i(t) = t^{(2n-1)/2} \left(b_i + \frac{2n+1}{2} \int_i^{+\infty} \tau^{-(2n+1)/2} \varphi_i^*(\tau) d\tau \right) \quad \text{per } t > 0,$$

$$\psi_j(t) = |t|^{(2n-1)/2} \left(d_j + \frac{2n+1}{2} \int_{-\infty}^t |\tau|^{-(2n+1)/2} \psi_j^*(\tau) d\tau \right) \quad \text{per } t < 0,$$

ove a^+ , a^- , b_i , d_j sono costanti dipendenti da n , nulle se e solo se sono nulli i

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{(2n+3)/2} f^*(t), \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} |t|^{(2n+3)/2} f^*(t), \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{(2n+3)/2} \varphi_i^*(t), \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} |t|^{(2n+3)/2} \psi_j^*(t).$$

Ricordando le (10) avremo allora per ogni ν intero positivo e con lo stesso significato dei simboli là usati

$$(14_1) \quad |f^{(\nu)}(t)| < C \exp(-c |t|^{(2n+1)/(2n-1)}),$$

per $t > -M$ o $t < M$ secondochè n è pari o dispari,

$$(14_2) \quad f^{(\nu)}(t) = O(|t|^{(2n-2\nu-1)/2})$$

per $t \rightarrow -\infty$ o $t \rightarrow +\infty$, secondochè n è pari o dispari, e in ogni caso

$$(15) \quad \varphi_i^{(\nu)}(t) = O(t^{(2n-2\nu-1)/2}) \quad \text{per } t \rightarrow +\infty, \quad i = 1, \dots, n-1$$

$$(16) \quad \psi_j^{(\nu)}(t) = O(|t|^{(2n-2\nu-1)/2}) \quad \text{per } t \rightarrow -\infty, \quad j = 1, \dots, n,$$

riuscendo invece divergenti le $\varphi_i^{(v)}$ per $t \rightarrow -\infty$ e le $\psi_j^{(v)}$ per $t \rightarrow +\infty$. Esisteranno inoltre finiti (eventualmente nulli) i

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-(2n-2v-1)/2} f^{(v)}(t), \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} |t|^{-(2n-2v-1)/2} f^{(v)}(t), \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-(2n-2v-1)/2} \varphi_i^{(v)}(t),$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} |t|^{-(2n-2v-1)/2} \psi_j^{(v)}(t).$$

Tutto quanto precede, in particolare le (8), (9), (10), (14), (15), (16), ci consente di concludere che

I. - *In corrispondenza ad ogni punto $Q \equiv (\xi, \eta)$ è possibile costruire $2n$ funzioni*

$$U(P, Q) = |y - \eta|^{(2n-1)/(2n+1)} f \left(\frac{x - \xi}{|y - \eta|^{2/(2n+1)}} \right),$$

$$V_i(P, Q) = |y - \eta|^{(2n-1)/(2n+1)} \varphi_i \left(\frac{x - \xi}{|y - \eta|^{2/(2n+1)}} \right),$$

$$W_j(P, Q) = |y - \eta|^{(2n-1)/(2n+1)} \psi_j \left(\frac{x - \xi}{|y - \eta|^{2/(2n+1)}} \right),$$

$i = 1, \dots, n - 1, j = 1, \dots, n$, in modo che la $U(P, Q)$ sia soluzione della equazione $\mathfrak{L}_0[u] = 0$ in tutto il piano tranne nel punto $P \equiv Q$, e ciò si verifichi anche per le funzioni $V_i(P, Q)$ e $W_j(P, Q)$ ove si escludano i punti (x, η) con $x \leq \xi$ ed $x \geq \xi$ rispettivamente. Con tali esclusioni le U, V_i, W_j e tutte le loro derivate riescono continue in tutto il piano; nei punti (x, η) intendendo con ciò che ne coincidono i limiti per $y \rightarrow \eta^+$ ed $y \rightarrow \eta^-$. Valgono inoltre le valutazioni

$$(17_1) \quad D_x^\lambda D_y^k U(P, Q) = |y - \eta|^{-[2\lambda + (2n+1)k - 2n + 1]/(2n+1)} \cdot O \left(\left[\frac{|x - \xi|}{|y - \eta|^{2/(2n+1)}} \right]^{-\{2\lambda + (2n+1)k - 2n + 1 + (2n+1)[1 - (-1)^k]/2\}/2} \right)$$

per $(x - \xi) |y - \eta|^{-2/(2n+1)} \rightarrow -\infty$ se n è pari ed $(x - \xi) \cdot |y - \eta|^{-2/(2n+1)} \rightarrow +\infty$ se n è dispari,

$$(17_2) \quad |D_x^\lambda D_y^k U(P, Q)| < C |y - \eta|^{-[2\lambda + (2n+1)k - 2n + 1]/(2n+1)} \cdot \exp \left(-c \left[\frac{|x - \xi|}{|y - \eta|^{2/(2n+1)}} \right]^{(2n+1)/(2n-1)} \right)$$

per $x - \xi > 0$ se n è pari ed $x - \xi < 0$ se n è dispari; la (17₁) riu-
scendo valida anche per le funzioni V_i e W_j , per $(x - \xi) |y - \eta|^{-2/(2n+1)} \rightarrow$
 $\rightarrow +\infty$ e $(x - \xi) |y - \eta|^{2/(2n+1)} \rightarrow -\infty$ rispettivamente. La fun-
zione $U(P, Q)$ è la soluzione fondamentale della equazione $\Delta_0[u] = 0$.

Indichiamo ora con Γ la striscia $0 < y < 1$, $-\infty < x < +\infty$
e per ogni coppia di punti $P \equiv (x, y)$ e $Q \equiv (\xi, \eta)$ di $\bar{\Gamma}$ consi-
deriamo le funzioni

$$\begin{aligned} Z(P, Q) &= U(x, y; \xi, \eta) - U(x, -y; \xi, \eta) + \\ &+ \sum_1^{\infty} [U(x, 2l + y; \xi, \eta) - U(x, 2l - y; \xi, \eta) + \\ &+ U(x, -2l + y; \xi, \eta) - U(x, -2l - y; \xi, \eta)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_i(P, Q) &= V_i(x, y; \xi, \eta) - V_i(x, -y; \xi, \eta) + \\ &+ \sum_1^{\infty} [V_i(x, 2l + y; \xi, \eta) - V_i(x, 2l - y; \xi, \eta) + \\ &+ V_i(x, -2l + y; \xi, \eta) - V_i(x, -2l - y; \xi, \eta)], \\ & \qquad \qquad \qquad i = 1, \dots, n - 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_j(P, Q) &= W_j(x, y; \xi, \eta) - W_j(x, -y; \xi, \eta) + \\ &+ \sum_1^{\infty} [W_j(x, 2l + y; \xi, \eta) - W_j(x, 2l - y; \xi, \eta) + \\ &+ W_j(x, -2l + y; \xi, \eta) - W_j(x, -2l - y; \xi, \eta)] \\ & \qquad \qquad \qquad j = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

la prima delle quali è definita in tutto Γ tranne per $P \equiv Q$,
e così pure le seconde e le terze ove si escludano i punti (x, η)
con $x \leq \xi$ ed $x \geq \xi$ rispettivamente. Osserviamo che tutti i
punti $(x, -y)$, $(x, 2l + y)$, $(x, 2l - y)$, $(x, -2l + y)$, $(x, -2l - y)$
non appartengono a Γ ; sulla frontiera di questa potendo soltanto
cadere il primo di essi per $y = 0$ ed il terzo per $y = 1$, $l = 1$.
È inoltre

$$\begin{aligned} U(x, -2l + y; \xi, \eta) &= U(x, 2l - y; \xi, -\eta), \\ U(x, -2l - y; \xi, \eta) &= U(x, 2l + y; \xi, -\eta), \end{aligned}$$

analoghe relazioni valendo per le V_i e W_j . La funzione $Z(P, Q)$ per $n = 1$ erà già stata considerata da Block ¹⁴⁾, ove è provato che la serie che figura nella espressione di Z , privata del primo termine, è assolutamente ed uniformemente convergente in \bar{I} e che la $D_y Z$ si può ottenere derivando termine a termine la espressione di Z , la serie che ne risulta riuscendo assolutamente ed uniformemente convergente in \bar{I} . Gli stessi risultati valgono anche per le funzioni H_i, K_j ; si può anzi provare allo stesso modo che le derivate di tutti gli ordini delle Z, H_i, K_j , rispetto a tutte le loro variabili, si possono ottenere derivandone successivamente termine a termine le rispettive espressioni, le serie che ne risultano riuscendo sempre assolutamente ed uniformemente convergenti in \bar{I} . Facilmente si prova poi che per ogni h, k, s interi positivi risulta

$$\begin{aligned}
 (18) \quad & D_x^h D_\xi^k Z(x, 0; \xi, \eta) = D_x^h D_\xi^k Z(x, y; \xi, 0) = 0, \\
 & D_y^s D_x^h D_\xi^k Z(x, 0; \xi, y) = 0, \\
 & D_x^h D_\xi^k Z(x, 1; \xi, \eta) = D_x^h D_\xi^k Z(x, y; \xi, 1) = 0, \\
 & D_y^s D_x^h D_\xi^k Z(x, 1; \xi, \eta) = 0
 \end{aligned}$$

per $-\infty < x, \xi < +\infty, P \equiv Q$. Le stesse relazioni hanno luogo per H_i e K_j ove, nelle prime di esse se $\eta = 0$ od $y = 0$ si escluda che sia $x \leq \xi, x \geq \xi$ rispettivamente, le stesse esclusioni presentandosi nelle seconde se $\eta = 1$ od $y = 1$. Dunque

II. - *Le funzioni $Z(P, Q), H_i(P, Q), K_j(P, Q)$ sono soluzioni della equazione $\mathfrak{L}_0[u] = 0$ in tutti i punti di I' in cui sono definite, hanno ivi la stessa regolarità delle $U(P, Q), V_i(P, Q), W_j(P, Q)$ rispettivamente e verificano le (18).*

2. Studio di potenziali di linea.

Sia I l'intervallo $0 < y < 1$, $\omega(y)$ una funzione continua in $\bar{I} = 0 \leq y \leq 1$ e $\bar{\gamma}$ una curva del piano rappresentata dalla

¹⁴⁾ Op. cit. in ¹⁾ Nota II.

equazione $x = \chi(y)$, $y \in \bar{I}$, con $\chi \in C^\alpha(I)$ ¹⁵, $2/(2n+1) < \alpha \leq 1$. Consideriamo le funzioni

$$u(x, y) = \int_0^1 U(x, y; \chi(\eta), \eta) \omega(\eta) d\eta;$$

$$v_i(x, y) = \int_0^1 V_i(x, y; \chi(\eta), \eta) \omega(\eta) d\eta \quad i = 1, \dots, n-1,$$

$$w_j(x, y) = \int_0^1 W_j(x, y; \chi(\eta), \eta) \omega(\eta) d\eta \quad j = 1, \dots, n.$$

Dalle valutazioni di I. segue che basterà studiare la u nei due casi $x < \chi(y)$, $x > \chi(y)$ per conoscere di conseguenza il comportamento delle v_i per $x > \chi(y)$ e delle w_j per $x < \chi(y)$.

Mediante le (17) è subito visto che la u è continua in tutto il piano assieme alle sue prime $2n-1$ derivate rispetto ad x e che ivi si ha

$$D_x^h u = \int_0^1 D_x^h U(P; \eta) \omega(\eta) d\eta$$
¹⁶, $h=1, \dots, 2n-1$.

La u ha poi, nei punti che non appartengono a $\bar{\gamma}$, derivate di tutti gli ordini rispetto ad x continue, la relazione precedente essendo in tal caso valida per ogni h intero positivo. Riesce poi

$$D_x D_x^h u = \lim_{\eta \rightarrow y^-} (y - \eta)^{-(2h-2n+1)/(2n+1)} f^{(h)} \left(\frac{x - \chi(\eta)}{(y - \eta)^{2/(2n+1)}} \right) \omega(\eta) +$$

¹⁵) Con la notazione $f \in C^\alpha(E)$, $0 < \alpha < 1$, intendiamo che la f sia continua in $\bar{E} = E + \mathfrak{F}E$ ed hölderiana di esponente α in E . Analogamente con $f \in C_k^\alpha(E)$ intenderemo che la f abbia derivata h -esima continua in \bar{E} ed hölderiana di esponente α in E . In queste notazioni ometteremo l'indicazione dell'insieme in cui la funzione è considerata, quando intenderemo riferirci all'intervallo I . Omettendo invece l'indice α vorremo intendere che la f è continua o rispettivamente dotata di derivata h -esima continua in \bar{E} . Con γ indicheremo poi la curva $\bar{\gamma}$ privata dei suoi estremi.

¹⁶) In luogo di $(x, y; \chi(\eta), \eta)$ scriveremo spesso per brevità $(P; \eta)$.

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^y D_y D_x^h U(P; \eta) \omega(\eta) d\eta - \lim_{\eta \rightarrow y+} (\eta - y)^{-(2h-2n+1)/(2n+1)} \cdot \\
 & \cdot f^{(h)} \left(\frac{x - \chi(\eta)}{(\eta - y)^{2/(2n+1)}} \right) \omega(\eta) + \int_0^1 D_y D_x^h U(P; \eta) \omega(\eta) d\eta = \\
 & = \int_0^1 D_y D_x^h U(P; \eta) \omega(\eta) d\eta = D_x^h D_y u,
 \end{aligned}$$

in tutto il piano, per $h = 0, \dots, n - 1$ e per ogni h nei punti che non stanno su $\bar{\gamma}$. Supposto poi che per $x \neq \chi(y)$ sia

$$D_y^{k-1} D_x^h u = \int_0^1 D_y^{k-1} D_x^h U(P; \eta) \omega(\eta) d\eta,$$

si avrà

$$\begin{aligned}
 D_y^k D_x^h u &= \lim_{\eta \rightarrow y-} D_y^{k-1} D_x^h U(P; \eta) \omega(\eta) - \lim_{\eta \rightarrow y+} D_y^{k-1} D_x^h U(P; \eta) \omega(\eta) + \\
 & + \int_0^1 D_y^k D_x^h U(P; \eta) \omega(\eta) d\eta = \int_0^1 D_y^k D_x^h U(P; \eta) \omega(\eta) d\eta = D_x^h D_y^k u,
 \end{aligned}$$

poichè se k è pari i due limiti scritti qui sopra sono nulli, come segue dalle (17), mentre se k è dispari i due limiti scritti sono eguali. Dunque se $x \neq \chi(y)$, per ogni h, k è

$$D_x^h D_y^k u = \int_0^1 D_x^h D_y^k U(P; \eta) \omega(\eta) d\eta,$$

tutte tali derivate riuscendo continue. In particolare la u e tutte le sue derivate sono soluzioni di $\mathfrak{L}_0[u] = 0$ in tutti i punti non situati su $\bar{\gamma}$. Esaminiamo il comportamento di $D_x^{2n} u$ per $(x, y) \rightarrow (\chi(z), z), z \in I$. Si ha per $x \neq \chi(y)$

$$D_x^{2n} u = \frac{(-1)^{n2}}{2n+1} \int_0^1 \frac{x - \chi(\eta)}{|y - \eta|^{(2n+2)/(2n+1)}} f^{(2n)} \left(\frac{x - \chi(\eta)}{|y - \eta|^{2/(2n+1)}} \right) \omega(\eta) d\eta;$$

L'integrale qui sopra si può scrivere

$$\begin{aligned}
 (19) \quad & [x - \chi(y)] \int_0^1 \frac{\omega(\eta)}{|y - \eta|^{(2n+3)/(2n+1)}} f^* \left(\frac{x - \chi(y)}{|y - \eta|^{2/(2n+1)}} \right) d\eta + \\
 & + [x - \chi(y)] \int_0^1 \frac{\omega(\eta)}{|y - \eta|^{(2n+3)/(2n+1)}} \left[f^* \left(\frac{x - \chi(\eta)}{|y - \eta|^{2/(2n+1)}} \right) - \right. \\
 & \left. - f^* \left(\frac{x - \chi(y)}{|y - \eta|^{2/(2n+1)}} \right) \right] d\eta + \int_0^1 \frac{\chi(y) - \chi(\eta)}{|y - \eta|^{(2n+3)/(2n+1)}} \cdot \\
 & \cdot f^* \left(\frac{x - \chi(\eta)}{|y - \eta|^{2/(2n+1)}} \right) \omega(\eta) d\eta .
 \end{aligned}$$

Per la hölderianità di $\chi(y)$ l'ultimo di questi integrali tende a

$$\int_0^1 \frac{\chi(z) - \chi(\eta)}{|z - \eta|^{(2n+3)/(2n+1)}} f^* \left(\frac{\chi(z) - \chi(\eta)}{|z - \eta|^{2/(2n+1)}} \right) \omega(\eta) d\eta .$$

Poniamo poi $t = [x - \chi(y)] \cdot |y - \eta|^{-2/(2n+1)}$, $\Delta t = [\chi(y) - \chi(\eta)] \cdot |y - \eta|^{-2/(2n+1)}$ e siano β δ due numeri tali che $0 < \beta < 1$, $\alpha > \frac{3 - \beta}{2n + 1}$,

$$3 - \beta < \delta < \begin{cases} (2n + 1)\alpha \\ 5 - \beta \end{cases}$$

È allora

$$\begin{aligned}
 (20) \quad & [x - \chi(y)] \frac{\omega(\eta)}{|y - \eta|^{(2n+3)/(2n+1)}} \cdot \\
 & \cdot \left[f^* \left(\frac{x - \chi(\eta)}{|y - \eta|^{2/(2n+1)}} \right) - f^* \left(\frac{x - \chi(y)}{|y - \eta|^{2/(2n+1)}} \right) \right] = \\
 & = [x - \chi(y)]^{(\delta - 3 + \beta)/2} \left(\frac{x - \chi(y)}{|y - \eta|^{2/(2n+1)}} \right)^{(5 - \beta - \delta)/2} \cdot \\
 & \cdot \frac{\omega(\eta)}{|y - \eta|^{(2n+\beta)/(2n+1)}} \frac{\chi(y) - \chi(\eta)}{|y - \eta|^{\delta/(2n+1)}} f^{*\prime}(t + \vartheta \Delta t), \quad 0 < \vartheta < 1,
 \end{aligned}$$

e, tenuto conto che $|\Delta t|$ si può maggiorare con una costante H indipendente da y ed η ,

$$|t^{(5-\beta-\delta)/2} f^{*'}(t + \vartheta \Delta t)| < K_1 \quad \text{per} \quad 0 < t \leq 2H,$$

$$|t^{(5-\beta-\delta)/2} f^{*'}(t + \vartheta \Delta t)| < K_2 t^{(5-\beta-\delta)/2} (t + \vartheta \Delta t)^{-(2n+5)/2} < K_3$$

per $t > 2H$

con K_1 e K_3 indipendenti da y ed η . Per $x > \chi(y)$ il modulo del primo membro della (20) si potrà maggiorare, a meno di un fattore costante con

$$[x - \chi(y)]^{(\delta-3+\beta)/2} \cdot |y - \eta|^{-(2n+\beta)/(2n+1)},$$

onde il secondo termine di (19) tenderà a zero per $(x, y) \rightarrow (\chi(z), z)$. Ancora per $x > \chi(y)$, posto $t = [x - \chi(y)] \cdot |y - \eta|^{-2/(2n+1)}$ il primo termine di (19) si muta in

$$\int_0^1 \frac{x - \chi(y)}{|y - \eta|^{(2n+3)/(2n+1)}} f^* \left(\frac{x - \chi(y)}{|y - \eta|^{2/(2n+1)}} \right) [\omega(\eta) - \omega(z)] d\eta +$$

$$+ \omega(z) \frac{2n+1}{2} \left(\int_{\frac{x-\chi(y)}{y^{2/(2n+1)}}}^{+\infty} + \int_{\frac{x-\chi(y)}{(1-y)^{2/(2n+1)}}}^{+\infty} \right) f^*(t) dt.$$

Con ragionamenti di tipo noto si vede che il primo di questi due termini tende a zero per $(x, y) \rightarrow (\chi(z), z)$, onde si conclude che per $z \in I$ è

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (\chi(z), z) \\ x > \chi(y)}} D_x^{2n} u = \frac{(-1)^{n2}}{2n+1} \int_0^1 \frac{\chi(z) - \chi(\eta)}{|z - \eta|^{(2n+3)/(2n+1)}} f^* \left(\frac{\chi(z) - \chi(\eta)}{|z - \eta|^{2/(2n+1)}} \right) \cdot$$

$$\cdot \omega(\eta) d\eta + (-1)^n \omega(z) 2 \int_0^{+\infty} f^*(t) dt.$$

Con gli stessi ragionamenti si prova che

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (\chi(x), x) \\ x < \chi(y)}} D_x^{2n} u = \frac{(-1)^{n2}}{2n+1} \int_0^1 \frac{\chi(z) - \chi(\eta)}{|z - \eta|^{(2n+2)/(2n+1)}} f^* \left(\frac{\chi(z) - \chi(\eta)}{|z - \eta|^{2/(2n+1)}} \right) \cdot \omega(\eta) d\eta - (-1)^n \omega(z) 2 \int_{-\infty}^0 f^*(t) dt.$$

Per quanto osservato più sopra, risultati analoghi restano acquisiti per le funzioni v , se $x \geq \chi(y)$ e w , se $x \leq \chi(y)$. Abbiamo così

III. - Se $\omega \in C$, $\chi \in C^\alpha$, $\frac{2}{2n+1} < \alpha \leq 1$, la funzione

$$u(x, y) = \int_0^1 U(x, y; \chi(\eta), \eta) \omega(\eta) d\eta$$

è continua in tutto il piano con le sue prime $2n - 1$ derivate rispetto ad x e le $D_x^h D_y u$, $h = 0, \dots, n - 1$, tali derivate potendosi sempre eseguire sotto il segno di integrale; nei punti (x, y) con $x \neq \chi(y)$ possiede derivate di tutti gli ordini continue, le quali risultano tutte soluzioni di $\mathfrak{L}_0[u] = 0$; inoltre per $z \in I$ è

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (\chi(x), x) \\ x > \chi(y)}} D_x^{2n} u = \int_0^1 D_x^{2n} U(\chi(z), z; \chi(\eta), \eta) \omega(\eta) d\eta + (-1)^n \omega(z) 2 \int_0^{+\infty} f^*(t) dt,$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (\chi(x), x) \\ x < \chi(y)}} D_x^{2n} u = \int_0^1 D_x^{2n} U(\chi(z), z; \chi(\eta), \eta) \omega(\eta) d\eta - (-1)^n \omega(z) 2 \int_{-\infty}^0 f^*(t) dt.$$

Delle stesse proprietà godono le funzioni

$$v_i(x, y) = \int_0^1 V_i(x, y; \chi(\eta), \eta)\omega(\eta)d\eta,$$

$$w_j(x, y) = \int_0^1 W_j(x, y; \chi(\eta), \eta)\omega(\eta)d\eta,$$

$i = 1, \dots, n - 1, j = 1, \dots, n$, nei punti (x, y) con $x \geq \chi(y)$ od $x \leq \chi(y)$ rispettivamente. In particolare si avrà

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (\chi(z), z) \\ x > \chi(y)}} D_x^{2n} v_i = \int_0^1 D_x^{2n} V_i(\chi(z), z; \chi(\eta), \eta)\omega(\eta)d\eta +$$

$$+ (-1)^n \omega(z) 2 \int_0^{+\infty} \varphi_i^*(t) dt,$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (\chi(z), z) \\ x < \chi(y)}} D_x^{2n} w_j = \int_0^1 D_x^{2n} W_j(\chi(z), z; \chi(\eta), \eta)\omega(\eta)d\eta -$$

$$- (-1)^n \omega(z) 2 \int_{-\infty}^0 \psi_j(t) dt^{17}.$$

17) Si può calcolare che è

$$\int_0^{+\infty} f^* dt = \frac{n}{2n+1} \pi, \quad \int_{-\infty}^0 f^* dt = \frac{n+1}{2n+1} \pi,$$

$$\int_0^{+\infty} \varphi_i^* dt = \pi - \arg \alpha_k, \quad \int_{-\infty}^0 \psi_j^* dt = \arg \alpha_k,$$

per quelle fra le φ_i^*, ψ_j^* che sono date da una $\Im m g_k$, mentre è

$$\int_0^{+\infty} \varphi_i^* dt = \int_{-\infty}^0 \psi_j^* dt = 0,$$

per le φ_i^*, ψ_j^* che sono del tipo $\Re e g_k - \Re e g_{k_0}$.

Osserviamo che, ripetendo i ragionamenti fatti sopra, si vede subito che se $\omega(0) = 0$ è

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\chi(0),0)} D_x^{2n} u = \int_0^1 D_x^{2n} U(\chi(0), 0; \chi(\eta), \eta) \omega(\eta) d\eta$$

e così pure se $\omega(1) = 0$ è

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\chi(1),1)} D_x^{2n} u = \int_0^1 D_x^{2n} U(\chi(1), 1; \chi(\eta), \eta) \omega(\eta) d\eta,$$

analoghe relazioni valendo per le v_i e w_i . Se $\omega(0) = \omega(1) = 0$ le relazioni di discontinuità su γ scritte sopra valgono quindi per ogni $z \in \bar{I}$.

Passiamo ad esaminare il comportamento delle derivate

$$D_x^{2n+k} u(x, y) = \int_0^1 D_x^{2n+k} U(P; \eta) \omega(\eta) d\eta, \quad k = 1, \dots, 2n,$$

per $(x, y) \rightarrow (\chi(z), z)$, $z \in I$. Osserviamo anzitutto che per $x \neq \chi(y)$ si ha

$$I_k = \int_0^1 D_x^{2n+k} U(P; \chi(\eta), \eta) d\eta = -(-1)^n \left\{ \int_0^1 D_x^{k-1} D_\eta^2 U(P; \chi(y), \eta) d\eta + \int_0^1 [D_x^{k-1} D_\eta^2 U(P; \chi(\eta), \eta) - D_x^{k-1} D_\eta^2 U(P; \chi(y), \eta)] d\eta \right\}.$$

Di questi il primo integrale è continuo su γ ¹⁸⁾, come si vede con una integrazione, mentre il modulo del secondo è maggio-

¹⁸⁾ Più precisamente si tratta qui, come più oltre, del fatto che esistono e sono eguali i due limiti

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (\chi(z),z) \\ x > \chi(y)}} \quad \text{e} \quad \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (\chi(z),z) \\ x < \chi(y)}} \quad \text{per} \quad z \in I.$$

rato da

$$\int_0^1 |\chi(\eta) - \chi(y)| |D_x^k D_\eta^2 U(P; \chi(y) + \vartheta[\chi(\eta) - \chi(y)], \eta)| d\eta < \\ < K \int_0^1 \frac{|\chi(y) - \chi(\eta)|}{|y - \eta|^{(2n+2k+3)/(2n+1)}} d\eta^{19)}$$

e quindi se $\chi \in C^{2k}$ con $(2k + 2)/(2n + 1) < \alpha_k \leq 1$, anch'esso sarà continuo su γ per $k = 1, \dots, n - 1$. Sia ora $\chi \in C_2$. Risulta

$$\frac{d}{d\eta} D_x^{k-1} D_\eta U(P; \eta) = - D_x^k D_\eta U(P; \eta) \cdot \chi'(\eta) + D_x^{k-1} D_\eta^2 U(P; \eta), \\ \frac{d}{d\eta} D_x^k U(P; \eta) \chi'(\eta) = - D_x^{k+1} U(P; \eta) \chi'^2(\eta) + \\ + D_x^k D_\eta U(P; \eta) \chi'(\eta) + D_x^k U(P; \eta) \chi''(\eta)$$

e quindi

$$(-1)^{n+1} I_k = [D_x^{k-1} D_\eta U(P; \eta) + D_x^k U(P; \eta) \chi'(\eta)]_0^1 + \\ + \int_0^1 D_x^{k+1} U(P; \eta) \chi'^2(\eta) d\eta - \int_0^1 D_x^k U(P; \eta) \chi''(\eta) d\eta.$$

Di questi termini il primo   continuo su γ e cos  dicasi del secondo e del terzo se $k < 2n - 1$ e $k < 2n$ rispettivamente. Per $k = 2n - 1$ del secondo termine esistono, diversi fra loro, i limiti per P tendente ad un qualunque punto di γ da destra e da sinistra di γ . Nelle stesse condizioni   il terzo se $k = 2n$, mentre il secondo in tal caso si scompone in

$$\int_0^1 D_x^{2n+1} U(P; \eta) [\chi'^2(\eta) - \chi'^2(y)] d\eta + \chi'^2(y) \cdot I_1$$

¹⁹⁾ Con $K, K_1, K_2, K', K'', \dots$ intenderemo sempre delle costanti positive, il cui valore, variabile da espressione a espressione, non ci interessa di precisare ulteriormente.

entrambi continui su γ per $n \neq 1$.²⁰⁾ Si conclude che se $\chi \in C_2$, I_k è continuo su γ per $k = 1, \dots, 2n - 1$, mentre per $k = 2n - 1$ e $k = 2n$ ne esistono i limiti da destra e da sinistra di γ , e sono diversi fra loro. Scriviamo ora

$$D_x^{2n+k}u(P) = \int_0^1 D_x^{2n+k}U(P; \eta)\omega(\eta)d\eta = \omega(y)I_k + \\ + \int_0^1 D_x^{2n+k}U(P; \eta)[\omega(y) - \omega(\eta)]d\eta,$$

da cui è subito visto che, se $\chi \in C_2$ ed $\omega \in C^{1k}$, $2k/(2n+1) < \lambda_k \leq 1$, $k = 1, \dots, n$, $D_x^{2n+k}u$ è continua su γ . Per $k > n$ supponiamo che $\omega \in C_1$. Tenuto conto che

$$\frac{d}{d\eta} D_x^{k-1}D_\eta U(P; \eta)\omega(\eta) = -D_x^k D_\eta U(P; \eta)\chi'(\eta)\omega(\eta) + \\ + D_x^{k-1}D_\eta^2 U(P; \eta)\omega(\eta) + D_x^{k-1}D_\eta U(P; \eta)\omega'(\eta),$$

$$\frac{d}{d\eta} D_x^k U(P; \eta)\chi'(\eta)\omega(\eta) = -D_x^{k-1}U(P; \eta)\chi'^2(\eta)\omega(\eta) + \\ + D_x^k D_\eta U(P; \eta)\chi'(\eta)\omega(\eta) + D_x^k U(P; \eta)[\chi''(\eta)\omega(\eta) + \chi'(\eta)\omega'(\eta)],$$

avremo per $x \neq \chi(y)$

$$(-1)^{n+1} \int_0^1 D_x^{2n+k}U(P; \eta)\omega(\eta)d\eta = \int_0^1 D_x^{k-1}D_\eta^2 U(P; \eta)\omega(\eta)d\eta = \\ = [D_x^{k-1}D_\eta U(P; \eta)\omega(\eta) + D_x^k U(P; \eta)\chi'(\eta)\omega(\eta)]_0^1 - \\ - \omega'(y) \int_0^1 D_x^{k-1}D_\eta U(P; \eta)d\eta + \\ + \int_0^1 D_x^{k+1}U(P; \eta)\chi'^2(\eta)\omega(\eta)d\eta -$$

²⁰⁾ Per $n = 1$ è $I_1 = I_{2n-1}$ e non è quindi continuo su γ .

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^1 D_x^k U(P; \eta) [\chi''(\eta)\omega(\eta) + \chi'(\eta)\omega'(\eta)] d\eta - \\
 & - \int_0^1 D_x^{k-1} D_\eta U(P; \eta) [\omega'(\eta) - \omega'(y)] d\eta.
 \end{aligned}$$

Il secondo termine dopo un'integrazione risulta eguale a

$$\omega'(y) [D_x^{k-1} U(P; \eta)]_0^1 + \omega'(y) \int_0^1 D_x^k U(P; \eta) \chi'(\eta) d\eta,$$

mentre l'ultimo se $\omega \in C_1^{\beta_k}$, $(2k - 2n - 1)/(2n + 1) < \beta_k \leq 1$ è continuo su γ per $k = n + 1, \dots, 2n$. Nelle ipotesi fatte la $D_x^{2n+k}u$ è dunque continua su γ per $k < 2n - 1$, mentre per $k = 2n - 1, 2n$ saranno ivi diversi i due limiti da destra e da sinistra di γ .

Avremo infine

$$\begin{aligned}
 D_x^k D_\eta u &= \int_0^1 D_x^k D_\eta U(P; \eta) \omega(\eta) d\eta = - [D_x^k U(P; \eta) \omega(\eta)]_0^1 - \\
 & - \int_0^1 D_x^{k+1} U(P; \eta) \chi'(\eta) \omega(\eta) d\eta + \int_0^1 D_x^k U(P; \eta) \omega'(\eta) d\eta
 \end{aligned}$$

onde se $\omega \in C_1$ la $D_x^k D_\eta u$ è continua su γ per $k < 2n - 1$, mentre per $k = 2n - 1, 2n$ saranno ivi diversi i due limiti da destra e da sinistra di γ .

Posto

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x(z),z) \\ x > x(y)}} D_x^i D_y^j u = (D_x^i D_y^j u)_y^+, \quad \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x(z),z) \\ x < x(y)}} D_x^i D_y^j u = (D_x^i D_y^j u)_y^+, \quad z \in I$$

e ricordando i risultati di III. possiamo concludere con

IV. - Sia $\chi \in C_2$. Se $\omega \in C^{\lambda_k}$, $2k/(2n + 1) < \lambda_k \leq 1$, $k = 1, \dots, n$,

per la funzione

$$u(P) = \int_0^1 U(P; \eta) \omega(\eta) d\eta$$

risulta

$$(D_x^{2n+k} u)_y^+ = (D_x^{2n+k} u)_y^-, \quad k = 1, \dots, n,$$

se di più $\omega \in C_1^{\beta k}$, $(2k - 2n - 1)/(2n + 1) < \beta_k \leq 1$, $k = n + 1, \dots, 2n$, si avrà

$$(D_x^{2n+k} u)_y^+ = (D_x^{2n+k} u)_y^-, \quad k = n + 1, \dots, 2n - 2,$$

$$(D_x^{4n-1} u)_y^+ - (D_x^{4n-1} u)_y^- = -2\pi \chi'^2(z) \omega(z),$$

$$(D_x^{4n} u)_y^+ - (D_x^{4n} u)_y^- = 2\pi [\omega(z) \chi''(z) + 2\omega'(z) \chi'(z)] \quad \text{per } n > 1$$

e

$$(D_x^4 u)_y^+ - (D_x^4 u)_y^- = 2\pi [-\omega(z) \chi'^4(z) + \omega(z) \chi''(z) + 2\omega'(z) \chi'(z)]$$

per $n = 1$.

Se infine $\omega \in C_1^{\beta k}$, $(2k - 2n + 1)/(2n + 1) < \beta_k \leq 1$, $k = n, \dots, 2n - 1$, è

$$(D_x^k D_y u)_y^+ = (D_x^k D_y u)_y^-, \quad k = n, \dots, 2n - 2,$$

$$(D_x^{2n-1} D_y u)_y^+ - (D_x^{2n-1} D_y u)_y^- = -2\pi (-1)^n \omega(z) \chi'(z),$$

mentre se $\omega \in C_1$ avremo

$$(D_x^{2n} D_y u)_y^+ - (D_x^{2n} D_y u)_y^- = (-1)^n 2\pi \omega'(z) \quad \text{per } n > 1,$$

e

$$(D_x^2 D_y u)_y^+ - (D_x^2 D_y u)_y^- = 2\pi [\omega(z) \chi'^3(z) - \omega'(z)] \quad \text{per } n = 1.$$

Se supponiamo che ω ed ω' verifichino in \bar{I} le condizioni di Hölder richieste da IV. in I e che sia inoltre $\omega(0) = \omega(1) = 0$ e, ove ω sia derivabile in \bar{I} , anche $\omega'(0) = \omega'(1) = 0$, prolungata la ω negli intervalli $(a_0, 0)$ e $(1, a_1)$ con lo zero e la χ in modo

che abbia in (a_0, a_1) la stessa regolarità che ha in \bar{I} , potremo ripetere i ragionamenti precedenti sulle funzioni

$$D_x^{2n+k}u = \int_{a_0}^{a_1} D_x^{2n+k}U(P; \eta)\omega(\eta)d\eta,$$

$$D_x^k D_y u = \int_{a_0}^{a_1} D_x^k D_y U(P; \eta)\omega(\eta)d\eta,$$

ed ottenere i risultati di IV. per ogni $x \in \bar{I}$.

Si possono costruire potenziali di linea analoghi ad u, v_i, w_j , sostituendo nelle espressioni di queste alle U, V_i, W_j , le Z, H_i, K_j , rispettivamente. Le funzioni che così si ottengono sono soluzioni di $\mathfrak{D}_0[u] = 0$, ordinatamente in entrambe le semistriscie $\mathfrak{D}^+ \{x > \chi(y), 0 < y < 1\}$ e $\mathfrak{D}^- \{x < \chi(y), 0 < y < 1\}$, solo nella prima, solo nella seconda di esse, e sono nulle, con le loro derivate rispetto ad x nei punti frontiera di queste, che non stanno su $\bar{\gamma}$. Il loro comportamento è in tutto lo stesso di quello delle funzioni u, v_i, w_j ; in particolare varranno ancora le III. e IV. con le sole sostituzioni di Z, H_i, K_j alle U, V_i, W_j . Vi è da notare in più che se $\omega(0) = 0$ le derivate rispetto ad x di ordine $2n$ di tali funzioni tenderanno a zero per $(x, y) \rightarrow (\chi(0), 0)$, la stessa cosa verificandosi se $\omega(1) = 0$ per $(x, y) \rightarrow (\chi(1), 1)$.

Terminiamo questo n. con due risultati la cui dimostrazione, conducendosi in modo noto ²¹⁾, omettiamo per brevità.

V. - Se $\varphi \in C(a, b)$ la funzione

$$u_0(P) = \int_a^b U^*(P; \xi, 0)\varphi(\xi)d\xi$$

²¹⁾ Sono gli stessi tipi di ragionamento che si usano per l'analogo integrale relativo alla equazione del calore. Per VI. cfr. B. PINI, *Su una equazione parabolica non lineare del quarto ordine*, Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari, 27, 1957.

è soluzione di $\mathfrak{L}_0[u] = 0$ in tutto il piano, esclusi i punti della retta $y = 0$ e risulta

$$\lim_{P \rightarrow (x_0, 0)} u_0(P) = \begin{cases} \pi\varphi(x_0) & \text{se } a < x_0 < b, \\ 0 & \text{se } x_0 < a \text{ od } x_0 > b. \end{cases}$$

VI. - Se $\chi \in C_1$, $\chi(y) < b$ per $y \in \bar{I}$, $\varphi \in C_k^{\lambda}(\chi(0) \leq x < b)$, $0 < \lambda \leq 1$, $k \leq n$, $\varphi^{(i)}(\chi(0)) = 0$, $i = 0, \dots, k$, $a = \chi(0)$, risulta

$$D_x^{\lambda} u_0(\chi(y), y) \in C^{\lambda_i}, \quad \lambda_i = 2(\lambda + k - i)/(2n + 1), \quad i = 0, \dots, k.$$

Lo stesso risultato si ha se anzichè in \bar{I} ci poniamo in $-1 \leq y \leq 0$.

3. *Teoremi di unicità per due problemi al contorno relativi alla equazione $\mathfrak{L}_0[u] = g(x, y)$.*

I teoremi di unicità di questo n., semplici conseguenze della formula di Green, sono enunciati in ipotesi di regolarità sul dominio considerato e sulla eventuale soluzione, che sono largamente sovrabbondanti ²³). Essi hanno prevalentemente lo scopo di individuare due problemi al contorno tipici per l'equazione $\mathfrak{L}_0[u] = g$.

Dato l'insieme aperto piano $\mathfrak{D} \{ \chi_1(y) < x < \chi_2(y), 0 < y < 1 \}$, con $\chi_j(y)$, $j = 1, 2$ continue e tali che $\chi_1(y) < \chi_2(y)$ in \bar{I} , e indicate con γ_i le curve di equazione $x = \chi_i(y)$, $y \in I$, e con c_i i segmenti $\chi_1(i) \leq x \leq \chi_2(i)$, $y = i$, $i = 0, 1$, i problemi in questione sono i seguenti

²³) Nel caso $n = 1$ un teorema di unicità per il problema (D) in un rettangolo, ma in una classe più ampia di soluzioni, è stato provato da A. A. DEZIN, in *Teoremi di esistenza ed unicità per le soluzioni di problemi al contorno per equazioni alle derivate parziali in spazi funzionali*, *Uspechi Mat. Nauk*, 14, 3, 1959. Le soluzioni del problema sono intese da questo A. in senso generalizzato.

Problema (D): determinare una funzione $u(x, y)$ continua in $\overline{\mathfrak{D}}$, tale che

$$\mathfrak{L}_0[u] = g \quad \text{in } \mathfrak{D},$$

$$D_x^r u|_{\gamma_1} = g_{1,r}(y), \quad D_x^s u|_{\gamma_2} = g_{2,s}(y), \quad y \in I,$$

$$r = 0, \dots, n-1, \quad s = 0, \dots, n,$$

$$u|_{c_i} = f_i(x), \quad x \in c_i, \quad i = 0, 1,$$

ove è $g_{1,0}(0) = f_0(\chi_1(0))$, $g_{1,0}(1) = f_1(\chi_1(1))$, $g_{2,0}(0) = f_0(\chi_2(0))$, $g_{2,0}(1) = f_1(\chi_2(1))$;

Problema (N): determinare una funzione $u(x, y)$ tale che

$$\mathfrak{L}_0[u] = g \quad \text{in } \mathfrak{D},$$

$$D_x^r u|_{\gamma_1} = h_{1,r}(y), \quad D_x^s u|_{\gamma_2} = h_{2,s}(y), \quad y \in I,$$

$$r = n+1, \dots, 2n-1, \quad s = n, \dots, 2n-1,$$

$$D_x^{2n} u - (-1)^n \chi_j'(y) D_y u|_{\gamma_j} = h_{j,2n}, \quad y \in I, \quad j = 1, 2$$

$$u|_{c_i} = f_i(x), \quad x \in c_i, \quad i = 0, 1.$$

Il secondo membro della equazione ed i dati al contorno si suppongono almeno continui nei rispettivi insiemi di definizione. *Le soluzioni si intendono in senso ordinario*, cioè si considerano funzioni $u(x, y)$ che assumano, con le derivate indicate, i dati ad esse assegnati su la frontiera $\mathfrak{F}\mathfrak{D}$ in senso classico e che abbiano derivate rispetto ad x fino a quella di ordine $2n+1$ e le prime due derivate rispetto ad y continue in \mathfrak{D} e tali che ivi sia $\mathfrak{L}_0[u] = g$.

Riguardo al problema (D) si prova subito che

VII. - Se $\chi_j \in C_1$ e $u(x, y)$ ha derivate rispetto ad x fino all'ordine $2n$ e derivata prima rispetto ad y limitate in \mathfrak{D} ed è soluzione del

problema

$$(D_0) \quad \begin{aligned} \mathfrak{L}_0[u] &= 0 && \text{in } \mathfrak{D}, \\ u|_{\tilde{\mathfrak{D}}} &= 0 \\ D_r^* u|_{\gamma_1} &= 0 && r = 1, \dots, n-1, \\ D_s^* u|_{\gamma_2} &= 0 && s = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

essa è identicamente nulla in $\overline{\mathfrak{D}}$.

Sia infatti $\mathfrak{D}' \subset \mathfrak{D}$ e con frontiera parallela a quella di \mathfrak{D} .
Si ha

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_{\mathfrak{D}'} u \mathfrak{L}_0[u] dx dy = \sum_0^{n-1} (-1)^h \iint_{\tilde{\mathfrak{D}}'} D_r^* u D_r^{2n-h} u dy + \\ &+ \frac{(-1)^n}{2} \iint_{\tilde{\mathfrak{D}}'} (D_x^* u)^2 dy - (-1)^n \int_{\tilde{\mathfrak{D}}'} u D_y u dx - (-1)^n \iint_{\mathfrak{D}'} (D_y u)^2 dx dy, \end{aligned}$$

e facendo tendere $\tilde{\mathfrak{D}}'$ ad $\tilde{\mathfrak{D}}$ dovrà essere

$$\lim_{\gamma_1' \rightarrow \gamma_1} \frac{1}{2} \int_{\gamma_1'} (D_x^* u)^2 dy + \iint_{\mathfrak{D}} (D_y u)^2 dx dy = 0,$$

e quindi $D_y u \equiv 0$ in \mathfrak{D} , d'onde essendo $u \equiv 0$ su $c_0 + c_1$,
 $u \equiv 0$ in $\overline{\mathfrak{D}}$.

Allo stesso modo si prova che

VIII. - Nelle stesse ipotesi di VII., se u è soluzione del problema

$$(N_0) \quad \begin{aligned} \mathfrak{L}_0[u] &= 0 && \text{in } \mathfrak{D}, \\ D_r^* u|_{\gamma_1} &= 0, && r = n+1, \dots, 2n-1, \quad u|_{c_0+c_1} = 0^{23}), \\ D_s^* u|_{\gamma_2} &= 0, && s = \tilde{n}, \dots, 2n-1, \\ D_x^{2n} u - (-1)^n \chi_j' \cdot D_y u|_{\gamma_j} &= 0, && j = 1, 2 \end{aligned}$$

è $u \equiv 0$ in $\overline{\mathfrak{D}}$.

²³⁾ Se alla condizione $u|_{c_0+c_1} = 0$ sostituiamo la $D_y u|_{c_0+c_1} = 0$,
la u si riduce necessariamente ad un polinomio di grado $n-1$ in x .

Per provare i risultati corrispondenti per le semistriscie $\mathfrak{D}^-(\mathfrak{D}^-)$, scegliamo come \mathfrak{D}' l'insieme $\chi(y) + \varepsilon < x < a$ ($-a < x < \chi(y) - \varepsilon$), $\varepsilon < y < 1 - \varepsilon$ e facciamo tendere prima ε a zero poi a a $+\infty$. Si vede così che

VII'. - Se $\chi \in U_1$ e se u , soluzione del problema (D_0) per $\mathfrak{D}^+(\mathfrak{D}^-)$ ²⁴, ha derivate rispetto ad x fino all'ordine $2n$ e derivata rispetto ad y limitate in $\chi(y) < x < a$ ($-a < x < \chi(y)$), $0 < y < 1$ per ogni a abbastanza grande e

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^1 (D_x^h u D_x^{2n-h} u)_{x=-a} dy = 0, \quad h = 0, \dots, n$$

$$\left(\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^1 (D_x^h u D_x^{2n-h} u)_{x=-a} dy = 0, \quad h = 0, \dots, n-1 \right),$$

è $u \equiv 0$ in $\overline{\mathfrak{D}^+(\mathfrak{D}^-)}$.

VIII'. - Nelle stesse ipotesi di VII', se u è soluzione del problema (N_0) per $\mathfrak{D}^+(\mathfrak{D}^-)$ è $u \equiv 0$ in $\overline{\mathfrak{D}^+(\mathfrak{D}^-)}$.

4. Risoluzione di problemi al contorno in striscie e semistriscie.

Un primo risultato, conseguenza immediata di quanto esposto al n. 2, è

IX. - Se $f_0(x)$, $f_1(x)$ sono continue in $-\infty < x < +\infty$ ed è

$$f_i(x) = 0(|x|^\alpha), \quad i = 0, 1$$

con $\alpha < n + 1/2$, per $x \rightarrow +\infty$ se n è pari e per $x \rightarrow -\infty$ se n è dispari, e

$$|f_i(x)| < C \exp(c' |x|^{(2n-1)/(2n+1)}), \quad i = 0, 1$$

²⁴ I problemi per $\mathfrak{D}^+(\mathfrak{D}^-)$ si enunziano come i corrispondenti per \mathfrak{D} , considerando fra le condizioni al contorno di questi ultimi solo quelle relative a c_0 , c_1 e $\gamma_1(\gamma_2)$. A queste penseremo, aggiunte d'ora innanzi le condizioni all'infinito scritte più sotto.

con $0 < c' < c$, ove c è la costante che figura nelle (10₁) e (10₄), per $x < 0$ se n è pari ed $x > 0$ se n è dispari, la funzione

$$(21) \quad u_0(P) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} D_\eta Z(P; \xi, 0) f_0(\xi) d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} D_\eta Z(P; \xi, 1) f_1(\xi) d\xi$$

è soluzione di $\mathfrak{L}_0[u] = 0$ in Γ ed assume i valori di f_0 ed f_1 per $y = 0$ ed $y = 1$ rispettivamente ²⁵).

Oltre a V. basterà tenere presente che in queste ipotesi, per $a < x_0 < b$, si ha per esempio

$$\begin{aligned} & \left| \left(\int_{-\infty}^a + \int_b^{+\infty} \right) U^*(P; \xi, 0) f_0(\xi) d\xi \right| = \\ & = \left| \left(\int_{-\infty}^{\frac{x-b}{y^{2/(2n+1)}}} + \int_{\frac{x-a}{y^{2/(2n+1)}}}^{+\infty} \right) f^*(t) f_0(x - ty^{2/(2n+1)}) dt \right| < \\ & < K \left(\int_{-\infty}^{\frac{x-b}{y^{2/(2n+1)}}} + \int_{\frac{x-a}{y^{2/(2n+1)}}}^{+\infty} \right) |t|^{-(2n+3)/2} (|x|^\alpha + |t|^\alpha y^{2\alpha/(2n+1)}) \rightarrow 0 \\ & \text{per } (x, y) \rightarrow (x_0, 0). \end{aligned}$$

Per costruire la soluzione dei problemi al contorno considerati per l'equazione omogenea, nelle semistriscie $\Gamma^+ \{x > 0, 0 < y < 1\}$ e $\Gamma^- \{x < 0, 0 < y < 1\}$, ci serviremo di opportune combinazioni lineari dei potenziali di linea u, v_i, W , studiati al n. 2.

²⁵) Questo risultato si trova parzialmente già nell'op. cit. in ¹) di BLOCK, Nota II.

Per i problemi in Γ^+ poniamo

$$\beta_h(t) = c_{0h}f(t) + \sum_1^{n-1} c_{ih}\varphi_i(t),$$

$$\beta_h^*(t) = c_{0h}f^*(t) + \sum_1^{n-1} c_{ih}\varphi_i^*(t), \quad h = 1, \dots, n$$

ovve le c_{0h} , c_{ih} sono costanti determinate in modo che

$$(22) \quad \beta_h^{(\nu)}(0) = 0 \quad \text{per} \quad \nu = n + h, \dots, 2n + h - 1.$$

Questa è senz'altro verificata per $\nu = 2n$, come si trae da (12'), onde restano $n - 1$ equazioni lineari omogenee nelle n incognite c_{0h} , c_{ih} , che è sempre possibile soddisfare con valori non tutti nulli di tali coefficienti. Osserviamo che per le funzioni $z(t)$ e $z^*(t)$, che soddisfano alle (13) e (12'), risulta

$$(23) \quad z^{(2n+1+l)}(0) = (-1)^{n2(l+1)}z^{*(l)}(0)/(2n+1) = (-1)^{n2(l+1)} \cdot (2n-2l-1)z^{(l)}(0)/(2n+1)^2, \quad l = 0, 1, \dots$$

onde le stesse relazioni varranno per le β_h , β_h^* . Poniamo

$$B_h(P, Q) = |y - \eta|^{(2n-1)/(2n+1)}\beta_h\left(\frac{x - \xi}{|y - \eta|^{2/(2n+1)}}\right), \quad h = 1, \dots, n$$

e consideriamo le funzioni

$$b_h(P) = \int_0^1 D_\xi^{n+h} B_h(P; 0, \eta)\omega(\eta)d\eta, \quad x > 0$$

con $\omega \in C^{\lambda_h}$, $(2h - 2)/(2n + 1) < \lambda_h \leq 1$. Risulta

$$\lim_{\substack{P \rightarrow (0, z) \\ x > 0}} D_x^k b_h(P) = 0 \quad \text{per} \quad k = 0, \dots, n - 1, k \neq n - h, \quad 0 < z < 1.$$

Ciò è immediata conseguenza delle (22) per $k < n - h$; per

$n - h < k \leq n - 1$ scriviamo

$$D_x^k b_h = (-1)^{n+h} \omega(y) \int_0^1 D_x^{n+h+k} B_h(P; 0, \eta) d\eta + \\ + (-1)^{n+h} \int_0^1 [\omega(\eta) - \omega(y)] D_x^{n+h+k} B_h(P; 0, \eta) d\eta.$$

Di questi integrali, il secondo tende a zero per $P \rightarrow (0, z)$, $z \in I$, per la hölderianità della ω e le (22), mentre il primo, posto $n + h + k = 2n + 1 + l$, $l = 0, \dots, h - 2$, è, a meno del segno, eguale a

$$\int_0^1 D_x^l D_\eta^2 |y - \eta|^{(2n-1)/(2n+1)} \beta_h \left(\frac{x}{|y - \eta|^{2/(2n+1)}} \right) d\eta = \\ = - \left[D_x^l |y - \eta|^{-2/(2n+1)} \beta_h^* \left(\frac{x}{|y - \eta|^{2/(2n+1)}} \right) \operatorname{sgn}(y - \eta) \right]_0^1 = \\ = - \left[|y - \eta|^{-(2+l)/(2n+1)} \beta_h^{*(l)} \left(\frac{x}{|y - \eta|^{2/(2n+1)}} \right) \operatorname{sgn}(y - \eta) \right]_0^1,$$

che ancora tende a zero per $P \rightarrow (0, z)$, $z \in I$, come segue da (22) e (23). Per $k = n - h$ è poi

$$\lim_{\substack{P \rightarrow (0, z) \\ x > 0}} D_x^{n-h} b_h(P) = (-1)^h 2\omega(z) \int_0^{+\infty} \beta_h^* dt = (-1)^{n+h} \delta_h^+ \omega(z), \quad z \in I.$$

Osserviamo che non potrà risultare $\int_0^{+\infty} \beta_h^* dt = 0$ per alcun h ,

altrimenti per ogni $\omega \in C_1^{\alpha_h}$, $(2h - 1)/(2n + 1) < \alpha_h \leq 1$, $\omega(0) = \omega'(0) = \omega(1) = \omega'(1) = 0$ la funzione

$$\int_0^1 D_x^{n+h} [c_{0h} Z(P; 0, \eta) + \sum_1^{n-1} c_{ih} H_i(P; 0, \eta)] \omega(\eta) d\eta,$$

verificherebbe le ipotesi di VII'. e sarebbe quindi identicamente nulla in Γ^+ . Ne seguirebbe $c_{0h}Z(P; 0, \eta) + \sum_1^{n-1} c_{ih}H_i(P; 0, \eta) \equiv 0$, ciò che non può verificarsi in corrispondenza a c_{0h}, c_{ih} non tutte nulle ²⁶⁾. Posto

$$\bar{H}_h(P, Q) = [c_{0h}Z(P, Q) + \sum_1^{n-1} c_{ih}H_i(P, Q)]/\delta_h^+, \quad h = 1, \dots, n,$$

si avrà dunque

X. - Se $g_i \in C^{\lambda_i}$, $2(n - i - 1)/(2n + 1) < \lambda_i \leq 1$, $i = 0, \dots, n - 2$, $\lambda_{n-1} = 0$, $g_0(0) = g_0(1) = 0$, la

$$u(P) = \sum_1^n (-1)^{n+j} \int_0^1 D_{\xi}^{n+j} \bar{H}_j(P; 0, \eta) g_{n-j}(\eta) d\eta$$

è soluzione del problema (D) in Γ^+ , con $g \equiv f_0 \equiv f_1 \equiv 0$.

Al caso $f_0 \equiv f_1 \equiv 0$ possiamo d'altra parte sempre ricondurci, utilizzando la (21). Supposto infatti che in $(0, +\infty)$, oltre alle condizioni richieste da IX., sia $f_j \in C_{n-1}^{\lambda_j}(x \geq 0)$, $0 < \lambda_j \leq 1$, $j = 0, 1$, prolungate le f_j con la stessa regolarità in $(-\infty, 0)$ in modo che risultino identicamente nulle in un intervallo $(-\infty, -a)$, la (21) è per VI. tale che

$$D_{\xi}^i u_0(0, y) \in C^{\lambda_i}, \quad \lambda_i = 2(\lambda + n - i - 1)/(2n + 1),$$

in accordo con le condizioni richieste da X. È anche subito visto che

XI. - Se $h_i \in C^{\lambda_i}$, $2(2n - i)/(2n + 1) < \lambda_i \leq 1$, $i = n + 1, \dots, 2n - 1$, $\lambda_{2n} = 0$, la

$$u(P) = \sum_0^{n-1} (-1)^j \int_0^1 D_{\xi}^j \bar{H}_{j+1}(P; 0, \eta) h_{2n-j}(\eta) d\eta,$$

²⁶⁾ Gli stessi risultati valgono se anzichè l'intervallo I si considerano intervalli illimitati, purchè ω soddisfi ad opportune condizioni all'infinito.

è soluzione del problema (N) in Γ^+ , con $g \equiv f_0 \equiv f_1 \equiv 0$.

Anche per questo problema potremo ricondurci al caso $f_0 \equiv f_1 \equiv 0$ tramite la (21), quando sia $f_j \in C_{2n}^{\lambda_j}(x \geq 0)$, $0 < \lambda_j \leq 1$, $j = 0, 1$.

Analoghe considerazioni valgono per i problemi (D) ed (N) in Γ^- . Porremo ora

$$\begin{aligned}\gamma_h(t) &= d_{0h}f(t) + \sum_{j=1}^n d_{jh}\psi_j(t), \\ \gamma_h^*(t) &= \bar{d}_{0h}f^*(t) + \sum_{j=1}^n \bar{d}_{jh}\psi_j^*(t), \quad h = 0, \dots, n,\end{aligned}$$

e richiederemo che

$$\gamma_h^{(\nu)}(0) = 0 \quad \text{per } \nu = n + h, \dots, 2n + h.$$

Posto

$$\begin{aligned}C_h(P, Q) &= |y - \eta|^{\frac{(2n-1)/(2n+1)}{2}} \gamma_h \left(\frac{x - \xi}{|y - \eta|^{\frac{2}{2n+1}}} \right), \\ (-1)^{n+1} 2 \int_{-\infty}^0 \gamma_h^* dt &= \delta_h^- \neq 0,\end{aligned}$$

$$\bar{K}_h(P, Q) = [d_{0h}Z(P, Q) + \sum_{j=1}^n d_{jh}K_j(P, Q)]/\delta_h^-, \quad h = 0, \dots, n,$$

si proverà come più sopra che

X'. - Se $g_i \in C^{\lambda_i}$, $2(n-i)/(2n+1) < \lambda_i \leq 1$, $i = 0, \dots, n-1$, $\lambda_n = 0$, $g_0(0) = g_0(1) = 0$, la

$$u(P) = \sum_{j=0}^n (-1)^{n+j} \int_0^1 D_{\xi}^{n+j} \bar{K}_j(P; 0, \eta) g_{n-j}(\eta) d\eta$$

è soluzione del problema (D) in Γ^- , con $g \equiv f_0 \equiv f_1 \equiv 0$.

XI'. - Se $h_i \in C^{\lambda_i}$, $2(2n-i)/(2n+1) < \lambda_i \leq 1$, $i = n, \dots$,

$2n - 1, \lambda_{2n} = 0, la$

$$u(P) = \sum_0^n (-1)^j \int_0^1 D_i^j \bar{K}_j(P; 0, \eta) h_{2n-j}(\eta) d\eta$$

è soluzione del problema (N) in Γ^- , con $g \equiv f_0 \equiv f_1 \equiv 0$.

Anche ora, ricorrendo alla (21), è possibile costruire una soluzione dei problemi (D) ed (N) quando non sia $f_0 \equiv f_1 \equiv 0$, se è $f_j \in C_x^1(x \leq 0)$ od $f_j \in C_{2n}^1(x \leq 0)$, $0 < \lambda \leq 1, j = 0, 1$ rispettivamente.

5. Un potenziale di dominio.

Sia \mathfrak{D} l'insieme del n. 3 con $\chi_j \in C, j = 1, 2$ e proviamo che

XII. - Se $g(P)$ è una funzione continua in \mathfrak{D} , per la funzione

$$u(P) = \iint_{\mathfrak{D}} U(P, Q)g(Q)dQ$$

si ha

$$(24) \quad D_x^i u(P) = \iint_{\mathfrak{D}} D_x^i U(P, Q)g(Q)dQ \quad i = 1, \dots, 2n$$

$$(25) \quad D_x^i D_y u(P) = \iint_{\mathfrak{D}} D_x^i D_y U(P, Q)g(Q)dQ \quad i = 0, \dots, n'$$

tali derivate riuscendo continue in \mathfrak{D} ; se di più la g soddisfa in ogni punto $P \in \mathfrak{D}$ ad una condizione di Hölder, risulta pure

$$(26) \quad D_y^2 u(P) = 2\pi g(P) + \iint_{\mathfrak{D}} D_y^2 U(P, Q)[g(Q) - g(P)]dQ + \\ + g(P) \int_0^1 d\eta \int_{z_x(\eta)}^{z_y(\eta)} D_y^2 U(P, Q)d\xi$$

$$D_x^{2n+1}u(P) = \iint_{\mathfrak{D}} D_x^{2n+1}U(P, Q)[g(Q) - g(P)]dQ + \\ + g(P) \int_0^1 d\eta \int_{z_1(\eta)}^{z_2(\eta)} D_x^{2n+1}U(P, Q)d\xi,$$

gli ultimi integrali a secondo membro in queste due ultime relazioni dovendosi intendere come integrali ripetuti ²⁷⁾.

Per $i = 1, \dots, 2n$ la (24) è immediata conseguenza delle (17₁), (17₂). Si ha infatti

$$|D_x^i U(P, Q)| < K \quad \text{per } i = 1, \dots, n-1, \\ |D_x^i U(P, Q)| < K |y - \eta|^{-(2i-2n+1)/(2n+1)} \quad \text{per } i = n, \dots, 2n-1$$

mentre per $i = 2n$, posto $t = (x - \xi) |y - \eta|^{-2(2n+1)}$ è

$$|D_x^{2n} U(P, Q)| = |y - \eta|^{-1} |f^{(2n)}(t)|,$$

la funzione a secondo membro riuscendo integrabile in \mathfrak{D} . Analogamente dalle

$$|D_x^i D_y U(P, Q)| < K |y - \eta|^{-(2+2i)/(2n+1)}, \\ |D_x^{2n} D_y U(P, Q)| = |y - \eta|^{-(2n+2)/(2n+1)} |f^{*(n)}(t)|,$$

si trae (25). Supposto poi $\Delta y > 0$, scriviamo

$$\frac{1}{\Delta y} [D_y u(P + \Delta y) - D_y u(P)] = \\ = \int_0^1 \int_{z_1(\eta)}^{z_2(\eta)} D_y U^*(P + \vartheta_1 \Delta y, Q)[g(Q) - g(P)] dQ -$$

²⁷⁾ Per $n = 1$ ed in ipotesi assai più restrittive sulla g , questo risultato si trova in E. DEL VECCHIO, *Sulle equazioni* $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} + \varphi_1(x, y) = 0$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \varphi_2(x, y) = 0$, Memorie Reale Accad. Sci. Torino, 66, 1915.

$$\begin{aligned}
 & - \int_{y+2\Delta y}^1 \int_{z_1(\eta)}^{z_2(\eta)} D_\nu U^*(P + \partial_2 \Delta y, Q)[g(Q) - g(P)]dQ + \\
 & + g(P) \int_0^y \int_{z_1(\eta)}^{z_2(\eta)} D_\nu U^*(P + \partial_1 \Delta y, Q) dQ - \\
 & - g(P) \int_{y+2\Delta y}^1 \int_{z_1(\eta)}^{z_2(\eta)} D_\nu U^*(P + \partial_2 \Delta y, Q)dQ + \\
 & + \frac{1}{\Delta y} \int_y^{y+\Delta y} \int_{z_1(\eta)}^{z_2(\eta)} U^*(P + \Delta y, Q)g(Q)dQ + \\
 & + \frac{1}{\Delta y} \int_y^{y+2\Delta y} \int_{z_1(\eta)}^{z_2(\eta)} U^*(P, Q)g(Q)dQ - \\
 & - \frac{1}{\Delta y} \int_{y+\Delta y}^{y+2\Delta y} \int_{z_1(\eta)}^{z_2(\eta)} U^*(P + \Delta y, Q)g(Q)dQ = \\
 & = I_1 + I_2 + g(P)I_3 - g(P)I_4 + I_5 + I_6 + I_7 .
 \end{aligned}$$

Posto $I(\eta) = \int_{z_1(\eta)}^{z_2(\eta)} U^*(P, Q)g(Q)d\xi$ per $\forall \eta$ è $\lim_{\eta \rightarrow y} I(\eta) = \pi g(P)$

e quindi

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} I_6 = 2\pi g(P), \quad \lim_{\Delta y \rightarrow 0} I_5 = \pi g(P), \quad \lim_{\Delta y \rightarrow 0} I_7 = -\pi g(P) .$$

Supposto la g hölderiana in P di esponente α rispetto ad x e di esponente β rispetto ad y , per $0 < \eta \leq y$, si ha

$$\begin{aligned}
 \int_{x-\delta}^{x+\epsilon} D_\nu U^*(P + \partial_1 \Delta y, Q)[g(Q) - g(P)]d\xi < \\
 < K[(y - \eta)^{-1+\beta} + (y - \eta)^{-1+2\alpha/(2n+1)}] ,
 \end{aligned}$$

onde segue, posto $t = (x - \xi) | y - \eta |^{-2/(2n+1)}$

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} I_1 &= \frac{-2}{2n+1} \int_0^y \lim_{\Delta y \rightarrow 0} (y + \vartheta_1 \Delta y - \eta)^{-1} \int_{\frac{x-x_1(\eta)}{(y+\vartheta_1 \Delta y - \eta)^{2/(2n+1)}}}^{\frac{x-x_2(\eta)}{(y+\vartheta_1 \Delta y - \eta)^{2/(2n+1)}}} (f^*(t) + t f^{*'}(t)) \cdot \\ &\cdot [g(x - t(y + \vartheta_1 \Delta y - \eta)^{2/(2n+1)}, \eta) - g(x, y)] dt = \\ &= \int_0^y \int_{x_1(\eta)}^{x_2(\eta)} D_{\nu} U^*(P, Q) [g(Q) - g(P)] dQ . \end{aligned}$$

Analogamente, tenuto conto che in $(y + 2\Delta y, 1)$ è $|y + \vartheta_2 \Delta y - \eta| > > 1/2 |y - \eta|$, sarà

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} I_2 = - \int_y^1 \int_{x_1(\eta)}^{x_2(\eta)} D_{\nu} U^*(P, Q) [g(Q) - g(P)] dQ .$$

Infine è

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^{y-\varepsilon} \int_{x_1(\eta)}^{x_2(\eta)} D_{\nu} U^*(P + \vartheta_1 \Delta y, Q) dQ + \\ &+ \int_{y-\varepsilon}^y \left(\int_{x_1(\eta)}^{x-\delta} + \int_{x-\delta}^{x+\delta} + \int_{x+\delta}^{x_2(\eta)} \right) D_{\nu} U^*(P + \vartheta_1 \Delta y, Q) dQ = \\ &= I_{31} + I_{32} + I_{33} + I_{34} , \end{aligned}$$

con

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} I_{31} = \int_0^{y-\varepsilon} d\eta \int_{x_1(\eta)}^{x_2(\eta)} D_{\nu} U^*(P, Q) d\xi ,$$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} (I_{32} + I_{34}) = \int_{y-\varepsilon}^y d\eta \left(\int_{x_1(\eta)}^{x-\delta} + \int_{x+\delta}^{x_2(\eta)} \right) D_{\nu} U^*(P, Q) dQ \rightarrow 0 \text{ per } \varepsilon \rightarrow 0 ,$$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} I_{33} = - \left(\int_{-\infty}^{-\delta/\varepsilon^2/(2n+1)} + \int_{\delta/\varepsilon^2/(2n+1)}^{+\infty} \right) f^*(t) dt \rightarrow 0 \text{ per } \varepsilon \rightarrow 0,$$

onde

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} I_3 = \int_0^1 d\eta \int_{\chi_1(\eta)}^{\chi_2(\eta)} D_y^2 U(P, Q) d\xi,$$

l'integrale dovendosi intendere come integrale ripetuto. Allo stesso modo è

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} I_4 = \int_y^1 d\eta \int_{\chi_1(\eta)}^{\chi_2(\eta)} D_y^2 U(P, Q) d\xi.$$

Vale dunque la (26). Analogamente si prova l'ultima relazione di XII.