

RENDICONTI  
*del*  
SEMINARIO MATEMATICO  
*della*  
UNIVERSITÀ DI PADOVA

JINDŘICH NEČAS

**Sur le problème de Dirichlet pour l'équation  
aux dérivées partielles du quatrième ordre  
du type elliptique**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,*  
tome 31 (1961), p. 198-231

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1961\\_\\_31\\_\\_198\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1961__31__198_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

SUR LE PROBLEME DE DIRICHLET  
POUR L'EQUATION AUX DERIVEES PARTIELLES  
DU QUATRIEME ORDRE DU TYPE ELLIPTIQUE

*Nota (\*) di JINDŘICH NEČAS (a Prague)*

La méthode variationnelle ne posant guère de restrictions aux domaines considérés et aux coefficients de l'opérateur, résout le problème de Dirichlet seulement pour les conditions aux limites qui sont les traces d'une fonction avec l'intégrale de l'énergie finie. Il y a beaucoup de travaux partant de ce point de vue, nous en citons celui de J. L. Lions [8].

D'autres méthodes, par exemple celle s'appuyant sur la théorie du potentiel ou la méthode de G. Cimmino, exigent beaucoup de la frontière du domaine -d'ordinaire deux dérivées continues au moins, en se contentant pour les premières dérivées de la solution à la frontière de l'intégrabilité seule. Il y a beaucoup de résultats dans ce sens dus à G. Cimmino (cfr. [2], [3]) et B. Pini (cfr. [14], [15]).

De nos jours, l'intérêt des mathématiciens se dirige vers les estimations à priori (cfr. par exemple A. I. Koshelev [7], L. Nirenberg [13], S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg [1]), dont on peut se servir pour démontrer l'existence de la solution du problème de Dirichlet. Les conditions aux limites ainsi considérée sont beaucoup plus générales que les traces (cfr. G. Fichera [4], J. L. Lions [9], S. L. Sobolev-M. I. Vishik [17]). Il est à remarquer

---

(\*) Pervenuta in redazione il 23 dicembre 1960.

Indirizzo dell'A.: Československá Akademie věd, Matematický ústav, Praha.

que les estimations à priori «près de la frontière» dont on doit se servir ne valent que pour les frontières assez régulières.

En considérant l'opérateur elliptique du deuxième ordre, il est résolu dans le travail [11] de l'auteur le problème de Dirichlet pour l'opérateur elliptique autoadjoint

$$Du = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a^{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} u \right) + cu.$$

Les conditions aux limites sont de carré sommable. Les domaines en question ont la frontière localement représentée par une fonction jouissant de la propriété de Lipschitz. On s'appuie sur les inégalités dues à Rellich (cfr. [16]), dont la validité y a été démontrée. Ces inégalités remplacent les estimations à priori.

Ayant en vue l'opérateur elliptique du quatrième ordre, et considérant les domaines, dont la frontière n'est pas lisse et abandonnant en même temps la condition sur l'intégrale de Dirichlet finie, le problème devient presque inabordable jusqu'à présent, quoi qu'il soit assez important pour les applications. On y connaît seulement des résultats assez particuliers. Le problème biharmonique pour les domaines plans à points anguleux est résolu dans le travail [10] de l'auteur.

Suivant les idées pareilles à celles du travail [11], il est résolu dans le présent travail, le problème de Dirichlet pour les opérateurs elliptiques du quatrième ordre. Ces opérateurs ont la forme

$$Du = \sum_{i,j,k,l=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left( a^{ijkl} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l} \right) - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + cu.$$

On suppose de plus, qu'il existe deux opérateurs du deuxième ordre

$$D_1 u = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (A^{ij} u), \quad D_2 u = - \sum_{i,j=1}^n B^{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j},$$

et l'opérateur  $D_3 u$  du troisième ordre d'ailleurs quelconque, tels qu'on ait:  $Du = D_1 D_2 u + D_3 u$ . Il est à remarquer qu'en laissant de côté quelques détails, cette condition pour l'espace  $E_2$  est toujours satisfaite. En ce qui concerne les conditions aux limites,

on a sur la frontière  $u(P) = f(P)$ ,  $\frac{\partial u}{\partial n}(P) = g(P)$ . Ici  $\frac{\partial u}{\partial n}$  est la dérivée selon la normale extérieure,  $g$  est de carré sommable,  $f$  a

les premières dérivées de carré sommable. On suppose de la frontière du domaine qu'elle soit localement représentée par une fonction jouissant de la propriété de Lipschitz. Nous allons nous appuyer beaucoup sur les résultats du travail [11], en les mentionnant explicitement à chaque tour.

### 1. Lemmes

On désigne par  $E_n$ ,  $n \geq 2$ , l'espace euclidien avec les coordonnées  $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ .

On dit d'un domaine borné  $\Omega$  dans  $E_n$  qu'il est du type  $\mathfrak{R}$  (et on l'écrit  $\Omega \in \mathfrak{R}$ ) si:

1) Il existe  $m$  systèmes de coordonnées dans  $E_n$  et  $m$  fonctions  $a_r$  de sorte qu'on peut représenter tout point de la frontière sous la forme:  $[x_{r1}, x_{r2}, \dots, x_{rn-1}, a_r(x_{r1}, \dots, x_{rn-1})]$ , en bréviété  $[X_r, a_r(X_r)]$ . Les fonctions  $a_r$  satisfont à la condition de Lipschitz dans la boule  $\Delta_r \equiv |X_r| < \alpha$ , c. à d.  $|a_r(X_r) - a_r(Y_r)| \leq c |X_r - Y_r|$  pour  $X_r, Y_r \in \Delta_r$  ( $|X_r| = (\sum_{i=1}^{n-1} x_{ri}^2)^{1/2}$ )<sup>1)</sup>.

2) Il existe un nombre  $\beta \leq 1$  tel que les points  $[X_r, x_{rn}]$ ,  $|X_r| < \alpha$ ,  $a_r(X_r) - \beta < x_{rn} < a_r(X_r)$  sont à l'intérieur de  $\Omega$ , tandis que les points  $[X_r, x_{rn}]$ ,  $|X_r| < \alpha$ ,  $a_r(X_r) < x_{rn} < a_r(X_r) + \beta$  sont à l'extérieur de  $\Omega$ .

Désormais, on ne considère que les domaines du type  $\mathfrak{R}$ .

Il est démontré, au travail [12] de l'auteur le lemme suivant:

**LEMME 1.1:** *Soit  $\Omega$  du type  $\mathfrak{R}$ . Soit  $p \geq 1$ . Alors il existe un ensemble des sousdomaines  $\Omega_h$ ,  $0 < h < 1$  et l'on a:  $h_1 < h_2 \rightarrow \bar{\Omega}_{h_2} \subset \Omega_{h_1}$ , ( $\bar{\Omega}$  est la fermeture de  $\Omega$ )  $\lim_{h \rightarrow 0} \Omega_h = \Omega$ ,  $\Omega_h$  sont du type  $\mathfrak{R}$ . En designant par  $a_{rh}$  les fonctions représentant la frontière de  $\Omega_h$ , on a:  $a_{rh}$  sont indéfiniment continûment différentiables sur  $\Delta_r$ ,  $|a_{rh}(X_r) - a_{rh}(Y_r)| \leq c |X_r - Y_r|$  pour  $X_r, Y_r \in \Delta_r$ .*

<sup>1)</sup> On va désigner dans la suite la plupart des constantes par le même symbole  $c$ . Au danger d'ambiguïté on se sert des indices.

où  $c$  est indépendant de  $h$ .  $\lim_{h \rightarrow 0} (\sup_{X_r \in J_r} |a_{r,h}(X_r) - a_r(X_r)|) = 0$ ,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{J_r} \frac{\partial a_r}{\partial x_{ri}} - \frac{\partial a_{r,h}}{\partial x'_{ri}} \, dX_r = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, r = 1, 2, \dots, m.$$

Nous parlerons dans la suite aussi des domaines du type  $\mathfrak{M}$ .  $\Omega \in \mathfrak{M}$  si les fonctions  $a_r$  sont indéfiniment continûment différentiables.

On désigne par  $W_2^{(k)}(\Omega)$  l'espace des fonctions réelles de carré sommable sur  $\Omega$ , dont les dérivées au sens des distributions sont de carré sommable jusqu' à l'ordre  $k$ . On introduit dans  $W_2^{(k)}(\Omega)$  le produit scalaire sous la forme

$$(1.1) \quad (u, v) = \int_{\Omega} \left( \sum_{j=0}^k \sum_{i_1+i_2+\dots+i_n=j} \frac{\partial^j u}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} \frac{\partial^j v}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} \right) d\Omega.$$

Il est bien connu que  $W_2^{(k)}(\Omega)$  muni de la topologie induite par (1.1) est un espace de Hilbert.

Les espaces  $W_p^{(k)}(\Omega)$  sont le cas particulier des espaces  $W_p^{(k)}(\Omega)$ ,  $p > 1$ , c. à d. des espaces se composant de fonctions de puissance  $p$ ième intégrable sur  $\Omega$  avec ses dérivées jusqu'au  $k$ ième ordre. La norme est introduite dans  $W_p^{(k)}(\Omega)$  par

$$\|u\|_{W_p^{(k)}(\Omega)} = \left( \sum_{j=0}^k \sum_{i_1+i_2+\dots+i_n=j} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial^j u}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} \right|^p d\Omega \right)^{1/p}.$$

On désigne par  $\mathfrak{G}(\Omega)$  l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur  $\Omega$ , continues avec toutes ses dérivées dans  $\bar{\Omega}$ .

Il s'ensuit du théorème [2.1.] de E. Gagliardo (cfr. [5]) le lemme suivant:

**LEMME 1.2:** Soit  $\Omega \in \mathfrak{M}$ . Alors  $\overline{\mathfrak{G}(\Omega)} = W_2^{(k)}(\Omega)$ . (La fermeture est définie moyennant la norme de  $W_2^{(k)}(\Omega)$ ).

On désigne par  $\mathfrak{D}(\Omega)$  l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans  $\Omega$ .

---

<sup>2)</sup> Remarquons qu'une fonction avec la propriété de Lipschitz a presque partout les premières dérivées, égales à celles au sens des distributions.

Soit  $f$  une fonction définie seulement sur la frontière  $\hat{\Omega}$  de  $\Omega$ . On dit  $f \in L_2(\hat{\Omega})$  si  $\sum_{r=1}^m \int_{\Delta_r} f^2(X_r, a_r(X_r)) dX_r < \infty$ . On introduit dans  $L_2(\hat{\Omega})$  la norme par  $\|f\|_{L_2(\hat{\Omega})} = \left( \sum_{r=1}^m \int_{\Delta_r} f^2(X_r, a_r(X_r)) dX_r \right)^{1/2}$ .

Posons  $f_r(X_r) = f(X_r, a_r(X_r))$ . Si  $f_r \in W_{\frac{1}{2}}^{(1)}(\Delta_r)$  pour chaque  $r$ , on dit  $f \in W_{\frac{1}{2}}^{(1)}(\hat{\Omega})$ . On introduit dans  $W_{\frac{1}{2}}^{(1)}(\hat{\Omega})$  la norme par  $\|f\|_{W_{\frac{1}{2}}^{(1)}(\hat{\Omega})} = \left( \sum_{r=1}^m \|f_r\|_{W_{\frac{1}{2}}^{(1)}(\Delta_r)}^2 \right)^{1/2}$ .

Désignons par  $L_2^2(\hat{\Omega})$  l'espace des éléments  $K$  qui sont des paires de fonctions  $[f, g]$  définies sur  $\hat{\Omega}$  dont  $f \in W_{\frac{1}{2}}^{(1)}(\hat{\Omega})$ ,  $g \in L_2(\hat{\Omega})$ . Introduisons dans  $L_2^2(\hat{\Omega})$  la norme de la manière suivante:  $\|K\|_{L_2^2(\hat{\Omega})} = \left( \|f\|_{W_{\frac{1}{2}}^{(1)}(\hat{\Omega})}^2 + \|g\|_{L_2(\hat{\Omega})}^2 \right)^{1/2}$ .

On voit que les espaces  $L_2(\hat{\Omega})$ ,  $W_{\frac{1}{2}}^{(1)}(\hat{\Omega})$ ,  $L_2^2(\hat{\Omega})$  sont des espaces de Hilbert.

Soit maintenant  $u \in \mathfrak{E}(\Omega)$ . On pose

$$(1.2) \quad f(X_r, a_r(X_r)) = u(X_r, a_r(X_r)),$$

$$(1.3) \quad g(X_r, a_r(X_r)) = \frac{\partial u}{\partial n}(X_r, a_r(X_r)) = \left( 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{\partial a_r}{\partial x_{ri}}(X_r) \right)^2 \right)^{-1/2} \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial x_{rn}}(X_r, a_r(X_r)) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial a_r}{\partial x_{ri}}(X_r) \frac{\partial u}{\partial x_{ri}}(X_r, a_r(X_r)) \right).$$

$\left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)$  est la dérivée selon la normale extérieure qui existe presque partout dans  $\Delta_r$ . On a  $K = [f, g] \in L_2^2(\hat{\Omega})$ . Par (1.2) et (1.3) l'on a défini une transformation linéaire  $Z$  de l'espace  $\mathfrak{E}(\Omega)$  dans  $L_2^2(\hat{\Omega})$ . Par le procédé de la démonstration du théorème 2.4 du [11], on parvient sans difficulté au lemme suivant:

**LEMME 1.3:** *Il existe une et une seule transformation  $Z$  linéaire et continue de l'espace  $W_{\frac{1}{2}}^{(2)}(\Omega)$  dans  $L_2^2(\hat{\Omega})$ , telle que pour  $u \in \mathfrak{E}(\Omega)$ ,  $Z(u)$  soit défini par (1.2) et (1.3).*

On appelle l'élément  $Z(u)$  trace de la fonction  $u$  sur  $\dot{\Omega}$  <sup>3)</sup>.  
 On a  $Z(W_2^{(2)}(\Omega)) \neq L_2^2(\dot{\Omega})$ , tandis qu'il est valable

LEMME 1.4:  $\overline{Z(W_2^{(2)}(\Omega))} = L_2^2(\dot{\Omega})$ .

DÉMONSTRATION Soit  $K = [f, g] \in L_2^2(\dot{\Omega})$ . On désigne par  $C_r$ ,  $r = 1, 2, \dots, m$ , les « cylindres »  $|X_r| < \alpha$ ,  $a_r(X_r) - \beta < x_{rn} < a_r(X_r) + \beta$ . Il existe des fonctions  $\varphi_r$ , indéfiniment différentiables,  $0 \leq \varphi_r \leq 1$ , leurs supports étant dans  $C_r$ , avec  $\sum_{r=1}^m \varphi_r = 1$  sur  $\dot{\Omega}$ . (Remarquons qu'on va utiliser souvent ces fonctions dans la suite sans répéter leur définition). Posons:  $f_r(X_r, a_r(X_r)) = f(X_r, a_r(X_r))\varphi_r(X_r, a_r(X_r))$ ,  $g_r(X_r, a_r(X_r)) = g(X_r, a_r(X_r)) \cdot \varphi_r(X_r, a_r(X_r)) + f_r(X_r, a_r(X_r)) \frac{\partial \varphi_r}{\partial n}(X_r, a_r(X_r))$ .  $K_r = [f_r, g_r] \in$

$$\in L_2^2(\dot{\Omega}). \text{ On écrit } p_r = \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial a_r}{\partial x_{ri}}\right)^2\right)^{1/2} \text{ et}$$

$h_r = \frac{1}{p_r} \left(g_r + \frac{1}{p_r} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial a_r}{\partial x_{ri}} \frac{\partial f_r}{\partial x_{ri}}\right)$ . On a  $h_r \in L_2(\Delta_r)$ . On peut maintenant trouver une fonction, soit  $\tilde{f}_r \in \mathfrak{D}(\Delta_r)$ , de la manière que  $|f_r - \tilde{f}_r|_{H^{(1)}(\Delta_r)}$  soit arbitrairement petit et une fonction, soit  $\tilde{h}_r \in \mathfrak{D}(\Delta_r)$ , de la sorte que  $|h_r - \tilde{h}_r|_{L_2(\Delta_r)}$  soit si petit qu'on veut. Posons  $u_r(X_r, x_{rn}) = \tilde{f}_r(X_r) + \tilde{h}_r(X_r)(x_{rn} - a_{rn}(X_r))$  (cfr. Lemme 1.1). Evidemment  $u_r \in \mathfrak{G}(C_r)$ . Soit  $\tilde{f}_r(X_r) = u_r(X_r, a_r(X_r))$ ,  $\tilde{g}_r(X_r) = \frac{\partial u_r}{\partial n}(X_r, a_r(X_r))$ . On a

$$(1.4) \quad \tilde{f}_r - f_r = \tilde{f}_r - f_r + \tilde{h}_r(a_r - a_{rn}),$$

$$(1.5) \quad \frac{\partial \tilde{f}_r}{\partial x_{ri}} - \frac{\partial f_r}{\partial x_{ri}} = \frac{\partial \tilde{f}_r}{\partial x_{ri}} - \frac{\partial f_r}{\partial x_{ri}} + \frac{\partial \tilde{h}_r}{\partial x_{ri}}(a_r - a_{rn}) + \tilde{h}_r \left( \frac{\partial a_r}{\partial x_{ri}} - \frac{\partial a_{rn}}{\partial x_{ri}} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

<sup>3)</sup> La trace est alors une généralisation de la notion de valeur frontière d'une fonction continue.

$$(1.6) \quad \begin{aligned} \tilde{g}_r - g_r = & \frac{1}{p_r} \left[ \tilde{h}_r - h_r - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial a_r}{\partial x_{ri}} \left( \frac{\partial \tilde{f}_r}{\partial x_{ri}} - \frac{\partial f_r}{\partial x_{ri}} \right) - \right. \\ & - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial a_r}{\partial x_{ri}} \frac{\partial \tilde{h}_r}{\partial x_{ri}} (a_r - a_{rh}) + (\tilde{h}_r - h_r) \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{\partial a_r}{\partial x_{ri}} \right)^2 + \\ & \left. + \tilde{h}_r \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial a_r}{\partial x_{ri}} \left( \frac{\partial a_{rh}}{\partial x_{ri}} - \frac{\partial a_r}{\partial x_{ri}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Les premières dérivées  $\frac{\partial a_r}{\partial x_{ri}}$  étant bornées par une constante  $c_1 \geq 1$ ,  $\varepsilon > 0$  étant donné, on peut trouver  $\tilde{f}_r$  et  $\tilde{h}_r$  de la manière qu'on ait:

$$(1.7) \quad \begin{aligned} |\tilde{f}_r - f_r|_{L_2(\mathcal{A}_r)} &< \frac{\varepsilon}{2n}, \quad \left| \frac{\partial \tilde{f}_r}{\partial x_{ri}} - \frac{\partial f_r}{\partial x_{ri}} \right|_{L_2(\mathcal{A}_r)} < \frac{\varepsilon}{4c_1 n}, \\ |\tilde{h}_r - h_r|_{L_2(\mathcal{A}_r)} &< \frac{\varepsilon}{4(1 + nc_1^2)^{1/2}}. \end{aligned}$$

Les fonctions  $\tilde{f}_r$ ,  $\tilde{h}_r$  fixées, soit  $c_2 > 0$  une constante pour laquelle vaut:

$$(1.8) \quad \text{Max}_{X_r \in \mathcal{A}_r} \left( |\tilde{h}_r| + \sum_{i=1}^{n-1} \left| \frac{\partial \tilde{h}_r}{\partial x_{ri}} \right| \right) \leq c_2.$$

Ayant en vue le lemme 1.1, on peut fixer le nombre  $h$  qu'on ait:

$$(1.9) \quad |a_r - a_{rh}|_{L_2(\mathcal{A}_r)} < \frac{\varepsilon}{4nc_1c_2}, \quad \left| \frac{\partial a_r}{\partial x_{ri}} - \frac{\partial a_{rh}}{\partial x_{ri}} \right|_{L_2(\mathcal{A}_r)} < \frac{\varepsilon}{4nc_1c_2}.$$

Il est facile à voir qu'en vue de (1.4)-(1.9)  $|\tilde{f}_r - f_r|_{W_{\frac{1}{2}}^{(1)}(\mathcal{A}_r)} < \varepsilon$ ,  $|\tilde{g}_r - g_r|_{L_2(\mathcal{A}_r)} < \varepsilon$ . Soit maintenant  $\tilde{\varphi}_r$  une fonction de  $\mathfrak{D}(C_r)$  choisie de telle sorte que la fonction  $\tilde{u}_r(X_r, x_{rn}) = u_r(X_r, x_{rn})\tilde{\varphi}_r(X_r, x_{rn})$  ne change pas avec ses premières dérivées sur l'ensemble de  $[X_r, x_{rn}]$  où  $|X_r| < \alpha$ ,  $x_{rn} = a_r(X_r)$ . L'existence d'une telle fonction est évidente. On a  $\tilde{u}_r \in \mathfrak{G}(\Omega)$ . Posons  $u = \sum_{r=1}^m \tilde{u}_r$ . On a  $u \in \mathfrak{G}(\Omega) \subset W_{\frac{1}{2}}^{(2)}(\Omega)$  et évidemment l'élément  $Z(u)$  est aussi près de l'élément  $K$  qu'on veut.



La démonstration du lemme 1.3 est par là achevée.

On désigne par  $\dot{W}_2^{(1)}(\Omega) = \overline{\mathfrak{D}(\Omega)}$ , la fermeture par rapport à la norme  $W_2^{(1)}(\Omega)$ .

Soit  $\Gamma(\Omega)$  l'ensemble des éléments de  $W_2^{(1)}(\Omega)$  s'annulant sur la frontière au sens des traces (cfr. lemme 3.1).

On a démontré dans [11] (théorème 2.5) le lemme suivant:

LEMME 1.5:  $\dot{W}_2^{(1)}(\Omega) = \Gamma(\Omega)$ .

On désigne par  $\dot{W}_2^{(2)}(\Omega) = \overline{\mathfrak{D}(\Omega)}$ , la fermeture par rapport à la norme de  $W_2^{(2)}(\Omega)$ .

Soit  $V^{(2)}(\Omega)$  le sousespace des éléments de  $W_2^{(2)}(\Omega)$ , dont les traces sont égales à zéro. On a

LEMME 1.6:  $V^{(2)}(\Omega) = \dot{W}_2^{(2)}(\Omega)$ .

DÉMONSTRATION est presque égale à la démonstration du lemme 1.5 et devient en outre très simple par application du lemme 1.5.

En effet, évidemment  $\dot{W}_2^{(2)}(\Omega) \subset V^{(2)}(\Omega)$ .

Considérons un élément de  $V^{(2)}(\Omega)$ , soit  $u$ . Soient  $\varphi_r$ , les fonctions utilisées dans la démonstration précédente, et soit  $\varphi = 1 - \sum_{r=1}^m \varphi_r$  dans  $\Omega$ ,  $\varphi = 0$  ailleurs. Les fonctions  $u_r = u\varphi_r$ ,  $v = u\varphi$  sont dans  $V^{(2)}(\Omega)$ . Considérons par exemple la fonction  $u_1$ . Il s'ensuit du lemme 1.4 l'appartenance de  $u_1$  à  $W_2^{(1)}(K)$  où  $K$  est une boule de rayon assez grand pour contenir  $\overline{\Omega}$ ,  $u_1$  est à l'extérieur de  $\Omega$  prolongé par zéro. Il en va de même pour toutes les premières dérivées de  $u_1$ . Alors  $u_1 \in W_2^{(2)}(K)$ , en la définissant comme nulle à l'extérieur de  $\Omega$ .

La fin de la démonstration est déjà identique à celle du théorème 2.5 de [11]: on approche  $u_1(X_1, x_{1n})$  par  $u_1(X_1, x_{1n} + h)$ ,  $h > 0$  étant une constante assez petite, dans  $W_2^{(2)}(\Omega)$ , on lisse la fonction  $u_1(X_1, x_{1n} + h)$  par l'opérateur régularisant défini dans [11] et obtient par là une fonction  $\tilde{u}_1$  de  $\mathfrak{D}(\Omega)$  qui approche  $u_1$  aussi bien qu'on veut.  $u$  est alors approché dans  $W_2^{(2)}(\Omega)$  par une fonction de  $\mathfrak{D}(\Omega)$  de la forme  $\tilde{u} = \sum_{r=1}^m \tilde{u}_r + \sim$ .

La démonstration est par là achevée.

## 2. L'intégrale de Dirichlet finie

On envisage ici l'opérateur elliptique du quatrième ordre de la forme:

$$(2.1) \quad Du = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left( a^{ijkl} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + cu.$$

(La convention ordinaire de la sommation est utilisée). On suppose  $a^{ijkl}$  deux fois continûment différentiables dans  $\bar{\Omega}$ ,  $a^{ij}$  une fois,  $c$  continue dans  $\bar{\Omega}$ ,  $a^{ijkl} = a^{jikl} = a^{klij}$ ,  $a^{ij} = a^{ji}$ . L'ellipticité de (2.1) s'exprime comme suit: soit  $\{\xi_{ij}\}$  une matrice réelle symétrique  $n \cdot n$ , alors pour une constante positive  $c$ , on a  $a^{ijkl} \xi_{ij} \xi_{kl} \geq c \sum_{i,j=1}^n \xi_{ij}^2$ . En ce qui concerne le reste de l'opérateur (2.1), pour chaque vecteur réel  $\{\xi_i\}$  de  $n$  composantes on a:  $a^{ij} \xi_i \xi_j \geq 0$ . La fonction  $c$  est supposée nonnégative.

Il nous sera dans la suite très utile la formule de Green:

LEMME 2.1: Soit  $\Omega \in \mathfrak{R}$ ,  $u, v \in \mathcal{G}(\Omega)$ . Alors on a:

$$(2.2) \quad \int_{\Omega} Dvud\Omega = \int_{\hat{\Omega}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( a^{ijkl} \frac{\partial^2 v}{\partial x_k \partial x_l} \right) v_i u dS - \\ - \int_{\hat{\Omega}} a^{ijkl} \frac{\partial^2 v}{\partial x_k \partial x_l} v_j \frac{\partial u}{\partial x_i} dS - \int_{\hat{\Omega}} a^{ij} \frac{\partial v}{\partial x_j} v_i u dS + \\ + \int_{\Omega} a^{ijkl} \frac{\partial^2 v}{\partial x_k \partial x_l} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} d\Omega + \int_{\Omega} a^{ij} \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} d\Omega + \int_{\Omega} cvud\Omega.$$

( $\{v_i\}$  est le vecteur de la normale extérieure, existant presque partout sur la frontière  $\hat{\Omega}$ ).

Cette formule est bien connue pour un  $\Omega$ , dont la frontière est lisse. On parvient à la démonstration du lemme 2.1 à partir du lemme 1.1. sur les domaines du type  $\mathfrak{R}$ .

Pour  $u, r \in \dot{W}_2^{(2)}(\Omega)$ , on introduit le produit scalaire, donné par l'opérateur  $D$ , par la formule:

$$(2.3) \quad (u, r)_D = \int_{\Omega} a^{ijkl} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 r}{\partial x_k \partial x_l} d\Omega + \int_{\Omega} a^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} d\Omega + \int_{\Omega} curv d\Omega.$$

On peut y introduire un autre sous la forme:

$$(2.4) \quad (u, v) = \int_{\Omega} \left( \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \right) d\Omega,$$

tandis que dans  $\dot{W}_2^{(2)}(\Omega)$  nous avons introduit auparavant le produit scalaire sous la forme (1.1) (on y pose  $k = 2$ ).

Il est bien connu que les topologies données par (2.4) et (1.1) sont équivalentes et on conclut à la validité de la même chose pour (2.4) et (2.3) en vertu de l'ellipticité de l'opérateur  $D$ .

Pour brévit , désignons  $Z(W_2^{(2)}(\Omega))$  par  $W(\dot{\Omega})$ . Soit  $K \in W(\dot{\Omega})$ .

On appelle *problème de Dirichlet* le problème suivant: trouver une fonction  $u \in W_2^{(2)}(\Omega)$ , solution faible de l'équation  $Du = 0$ , c. à d.  $(u, \varphi)_D = 0$  pour chaque  $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$ , telle que  $Z(u) = K$ .

**THÉORÈME 1:** *Il existe précisément une solution du problème de Dirichlet.*

**DÉMONSTRATION:** Soit  $u_0 \in W_2^{(2)}(\Omega)$  telle qu'on ait  $Z(u_0) = K$ . Pour chaque  $r$  de  $\dot{W}_2^{(2)}(\Omega)$  on doit avoir  $(u, r)_D = 0$ . On désigne  $w = u - u_0$ . En vertu du théorème de Riesz, il existe précisément un élément  $w \in \dot{W}_2^{(2)}(\Omega)$  pour lequel on ait  $(w, r)_D = - (u_0, r)$ . On le voit en tenant compte de ce que  $- (u_0, r)$  est une fonctionnelle linéaire et continue dans  $\dot{W}_2^{(2)}(\Omega)$ . Posant  $u = u_0 + w$ , on en obtient la solution.

Soient maintenant  $u_1$  et  $u_2$  deux solutions.  $Z(u_1 - u_2) = 0$  et à cause du lemme 1.5, on a  $u_1 - u_2 \in \dot{W}_2^{(2)}(\Omega)$  d'où on tire  $(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0$  ce qui équivaut à  $u_1 - u_2 \equiv 0$ .

Le théorème 1 est par là démontré.

Soit  $f \in L_2(\Omega)$ . On appelle *problème de Poisson* le problème suivant: trouver une fonction  $v \in W_{\frac{1}{2}}^{(2)}(\Omega)$ , solution faible de l'équation  $Dv = f$ , c. à d.  $(v, \varphi)_D = (f, \varphi)_{L_2(\Omega)}$  pour chaque  $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$ , telle qu'on ait  $Z(v) = \theta$ .

**THÉORÈME 2:** *Il existe précisément une solution du problème de Poisson.*

Nous chargeons le Lecteur de la démonstration de ce théorème en remarquant que la fonctionnelle cette fois-ci est  $(f, v)_{L_2(\Omega)}$ .

Comme nous avons déjà mentionné dans l'introduction beaucoup d'auteurs ont démontré presque en même temps les limitations à priori se rattachant au problème de Poisson. Dans beaucoup de cas, ces limitations sont valables pour les solutions faibles. Nous nous appuyons sur ce résultat. Pour fixer les idées, nous y citons un cas particulier du théorème 24 du travail [7].

**LEMME 2.2:** *Soit  $\Omega \in \mathfrak{M}$ . Soit  $p \geq 2$  et  $f \in L_p(\Omega)$ . Alors  $v$ , la solution du problème de Poisson  $Dv = f$ ,  $Zv = \theta$  ( $D$  est l'opérateur (2.1)) appartient à  $W_p^{(2)}(\Omega)$  et l'on a  $\|v\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} \leq c \|f\|_{L_p(\Omega)}$ , où  $c$  est une constante dépendant de  $p$  et  $\Omega$ .*

Il est facile à démontrer:

**LEMME 2.3:** *Soient  $v_h$  les solutions du problème de Poisson:  $Dv_h = f$  sur  $\Omega_h$ ,  $Z_h(v_h) = \theta$  sur  $\dot{\Omega}_h$ . Alors  $\|v_h\|_{W_{\frac{1}{2}}^{(2)}(\Omega_h)} \leq c \|f\|_{L_2(\Omega_h)}$  où  $c$  ne dépend pas de  $f$  et  $h$ .*

En effet,  $(v_h, r_h)_D = (f, r_h)_{L_2(\Omega)}$  d'où on tire  $|(r_h, v_h)_D| \leq \|f\|_{L_2(\Omega_h)} \|v_h\|_{W_{\frac{1}{2}}^{(2)}(\Omega_h)}$ . En vertu de l'ellipticité de  $D$  suit le résultat.

**LEMME 2.4:** *Soient  $v_h$  définies comme dans le lemme précédent. Posons  $v_h \equiv 0$  à l'extérieur de  $\Omega_h$ . Soit  $v$  la solution du problème de Poisson  $Dv = f$  sur  $\Omega$ ,  $Z(v) = \theta$  sur  $\dot{\Omega}$ . Alors on a  $\lim_{h \rightarrow 0} v_h = v$  dans  $L_2(\Omega)$  <sup>4)</sup>.*

<sup>4)</sup> Remarquons qu'on peut démontrer  $v_h \rightarrow v$  dans  $W_{\frac{1}{2}}^{(2)}(\Omega)$ . Pour notre besoin le lemme 2.4 paraît suffisant.

DÉMONSTRATION: Pour  $f$  de  $L_2(\Omega)$  on définit par  $A_h f = r_h$  une transformation linéaire de  $L_2(\Omega)$  dans  $L_2(\Omega)$ . En vertu du lemme 2.3 cette transformation est bornée. Cette transformation est aussi symétrique. Soit  $h_1 < h_2$ . Il est bien connu (et facile à démontrer) que la fonctionnelle quadratique  $(w, u)_D - 2(u, f)_{L_2(\Omega_h)}$  atteint son minimum parmi les fonctions de  $\dot{W}_2^{(2)}(\Omega_h)$  pour  $v_h$ . Alors  $(v_{h_1}, r_{h_1})_D - 2(r_{h_1}, f)_{L_2(\Omega_{h_1})} \leq (r_{h_2}, v_{h_2})_D - 2(v_{h_2}, f)_{L_2(\Omega_{h_2})}$ . Ayant  $(v_h, f)_{L_2(\Omega_h)} = (r_h, r_h)_D$  on en tire:  $A_{h_2} \leq A_{h_1}$ . La suite des  $A_h$  étant bornée, cela entraîne l'existence de  $\lim_{h \rightarrow 0} A_h = A$ . On a  $\lim_{h \rightarrow 0} r_h = w \in \dot{W}_2^{(2)}(\Omega)$ . Mais évidemment  $(w, \varphi)_D = (f, \varphi)_{L_2(\Omega)}$  pour chaque  $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$ , alors  $w = u$ , d'où le lemme.

**3. Quelques inégalités se rapportant aux equations du deuxième ordre.**

On désigne par

$$(3.1) \quad Eu = - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( b^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right)$$

l'opérateur elliptique du deuxième ordre. Les suppositions faites au travail [11] ont lieu;  $b^{ij}$  sont continues avec ses premières dérivées dans  $\bar{\Omega}$ ,  $b^{ij} = b^{ji}$ , pour chaque vecteur réel de  $n$  composantes  $\xi_i$  on a  $b^{ij} \xi_i \xi_j \geq c \sum_{i=1}^n \xi_i^2$  où  $c > 0$ . On a démontré dans [11] le lemme suivant:

LEMME 3.1: Soit  $\Omega \in \mathfrak{R}$ . Etant  $\overline{\mathfrak{E}(\Omega)} = W_2^{(1)}(\Omega)$  (la fermeture est définie moyennant la norme de  $W_2^{(1)}(\Omega)$ ) il existe une et une seule transformation linéaire et continue  $T$  de l'espace  $W_2^{(1)}(\Omega)$  dans  $L_2(\bar{\Omega})$  qu'on ait pour chaque  $u$  de  $\mathfrak{E}(\Omega)$ :  $T(u) = u$ .

Il est facile à démontrer:

LEMME 3.2: Soit  $g \in W_2^{(1)}(\bar{\Omega})$ . Alors il existe une fonction  $h \in W_2^{(1)}(\Omega)$  dont la trace  $T(h) = g$ ,  $|h|_{W_2^{(1)}(\Omega)} \leq c |g|_{W_2^{(1)}(\bar{\Omega})}$ .

DÉMONSTRATION: Soit  $h_r(X_r, x_{rn}) = g_r(X_r, a_r(X_r))\varphi_r(X_r, x_{rn})$ .

On a  $h_r \in W_2^{(1)}(\Omega)$ . D'autre par  $T(\sum_{r=1}^m h_r) = g$  d'où le résultat.

Remarquons: Soit  $g \in L_2(\dot{\Omega})$ ,  $g$  trace d'une fonction de  $W_2^{(1)}(\Omega)$ . Alors  $u \in W_2^{(1)}(\Omega)$  est la solution du problème de Dirichlet pour l'opérateur (3.1) si  $\int_{\Omega} b^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} d\Omega = 0$  pour chaque  $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$

et si  $T(u) = g$ .

Soit  $f \in L_2(\Omega)$ . Alors  $u \in W_2^{(1)}(\Omega)$  est la solution du problème de Poisson pour l'opérateur (3.1) si  $\int_{\Omega} b^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Omega} \varphi f d\Omega$

pour chaque  $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$  et si  $T(u) = 0$ .

Nous allons démontrer un lemme sur la stabilité:

LEMME 3.3: Soit  $g \in W_2^{(1)}(\Omega)$  et  $u_h$  la solution du problème de Dirichlet  $Eu_h = 0$  sur  $\Omega_h$ ,  $T_h(u_h) = T_h(g)$  sur  $\dot{\Omega}_h$ . En définissant  $u_h(P) = g(P)$  pour  $P$  à l'extérieur de  $\Omega_h$  on a  $\lim_{h \rightarrow 0} u_h = u$  dans  $W_2^{(1)}(\Omega)$ , où  $u$  est la solution du problème de Dirichlet  $Eu = 0$  sur  $\Omega$ ,  $T(u) = T(g)$  sur  $\dot{\Omega}$ .

DÉMONSTRATION: Pour le but de la démonstration, on désigne par  $H$  l'espace  $W_2^{(1)}(\Omega)_{/C}$  où  $C$  est l'espace des constantes. On introduit dans  $H$  le produit scalaire sous la forme  $(\tilde{u}, \tilde{v})_H = \int_{\Omega} b^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} d\Omega$ ,  $u$  resp.  $v$  étant les représentants de  $\tilde{u}$  resp.  $\tilde{v}$ .

En vertu de l'ellipticité de l'opérateur  $E$ ,  $H$  avec cette topologie est un espace de Hilbert.

Soit  $\tilde{f} \in H$ . On définit  $A_h$ , transformation de  $H$  dans  $H$  de la manière suivante:  $A_h \tilde{f} = \tilde{u}_h$ , où  $u_h$  est mentionné cidessus. De cette manière on obtient la décomposition de chaque  $\tilde{f}$  dans la forme  $\tilde{f} = \tilde{u}_h + \tilde{v}_h$  où  $v_h \in \dot{W}_2^{(1)}(\Omega)$ , nulle à l'extérieur de  $\Omega_h$  et  $(\tilde{u}_h, \tilde{v}_h) = 0$ . Cette décomposition est unique.  $A_h$  est évidemment linéaire, bornée et symétrique. Pour  $h_1 < h_2$  on a  $\theta \leq A_{h_2} \leq A_{h_1}$ , alors il existe  $\lim_{h \rightarrow 0} A_h = A$ . Il est manifeste que  $A\tilde{f} = \tilde{u}$  où  $u$  est mentionné ci-dessus, d'où le lemme.

En utilisant la notation introduite dans le lemme 1.1 on a

LEMME 3.4: Soit  $u_h$  la solution du problème de Dirichlet  $Eu_h = 0$  sur le domaine  $\Omega_h$ ,  $T_h(u_h) = T_h(g)$  sur  $\dot{\Omega}_h$ , où  $g \in W_2^{(2)}(\Omega)$ . Alors on a:  $u_h \in W_2^{(2)}(\Omega_h)$  et en posant  $\frac{\partial u_h}{\partial \nu} = b^{ij} \frac{\partial u_h}{\partial x_i} \nu_j$ , sur  $\dot{\Omega}_h$ , l'inégalité suivante a lieu:  $\left| \frac{\partial u_h}{\partial \nu} \right|_{L_2(\dot{\Omega}_h)} \leq c |T_h(g)|_{H_2^{(1)}(\dot{\Omega}_h)}$  où  $c$  ne dépend pas de  $u$ ,  $g$  et  $h$ .

DÉMONSTRATION: Posons  $Eg = f$  et soit  $v$  la solution du problème de Poisson sur le domaine  $\Omega_h$ :  $Ev = f$ ,  $T_h(v) = 0$ . La frontière de  $\Omega_h$  étant indéfiniment différentiable, les coefficients  $b^{ij}$  ayant les premières dérivées continues sur  $\dot{\Omega}_h$ , on tire des résultats de A. I. Koshelev [7] (cfr. aussi théorème 3.5 de [11]) que  $v \in W_2^{(2)}(\Omega_h)$ . D'autre part,  $g - v$  est évidemment la solution faible du problème de Dirichlet et telle qu'on a  $T_h(g - v) = T_h(g)$ . En vertu de l'unicité on a  $u_h \in W_2^{(2)}(\Omega_h)$ . Pour  $u_h$  est valable l'égalité de Rellich:

$$(3.2) \quad \int_{\dot{\Omega}_h} \frac{1}{\sigma} \left[ -h^i \nu_i \left( \frac{\partial u_h}{\partial \nu} \right)^2 + h^i \nu_i \frac{\partial u_h}{\partial x_j} z^j - 2 \frac{\partial u_h}{\partial x_j} y^j \frac{\partial u_h}{\partial \nu} \right] dS = \\ = \int_{\Omega_h} c^{ij} \frac{\partial u_h}{\partial x_i} \frac{\partial u_h}{\partial x_j} d\Omega$$

(cfr. formule 4.3 de [11]).

Ici  $\sigma = b^{ij} \nu_i \nu_j$ ,  $h^i$  sont les composantes du vecteur  $H$ ,  $h^i \in \mathfrak{C}(\Omega)$ ,  $\nu_i$  les composantes de la normale extérieure. On peut choisir  $H$  de sorte qu'il vaut: (3.3)  $h^i \nu_i \geq c > 0$ , où  $c$  ne dépend pas de  $h$  (L'existence d'un tel vecteur est démontré (dans [11]). On a

$$(3.4) \quad z^i = b^{ji} \frac{\partial u_h}{\partial x_i} b^{kl} \nu_k \nu_l - b^{jk} b^{ji} \frac{\partial u_h}{\partial x_i} \nu_k \nu_l = s^{ji} \frac{\partial u_h}{\partial x_i},$$

$$(3.5) \quad y^j = h^i b^{ik} \nu_i \nu_k - h^i \nu_i b^{jk} \nu_k;$$

$c^{ij}$  sont continues sur  $\bar{\Omega}$ . Evidemment  $s^{ji} \nu_i = y^j \nu_j = 0$ . On peut

déterminer  $t_j^i$ ,  $c_j$  de telle manière qu'on ait  $\frac{\partial u_h}{\partial x_j} = t_j^i \frac{\partial u_h}{\partial x_i} + c_j \frac{\partial u_h}{\partial \nu}$ ,  $t_j^i v_i = 0$ . Les fonctions  $t_j^i$ ,  $c_j$  ainsi obtenues étant bornées dans  $\bar{\Omega}$ , on parvient à

$$(3.6) \quad \int_{\hat{\Omega}_h} \frac{1}{\sigma} h^i v_i \left( \frac{\partial u_h}{\partial \nu} \right)^2 dS = \int_{\hat{\Omega}_h} \frac{h^i v_i}{\sigma} s^{jk} \frac{\partial u_h}{\partial x_k} \left( t_j^i \frac{\partial u_h}{\partial x_i} + c_j \frac{\partial u_h}{\partial \nu} \right) dS - \\ - 2 \int_{\hat{\Omega}_h} \frac{1}{\sigma} y^j \frac{\partial u_h}{\partial x_j} \frac{\partial u_h}{\partial \nu} dS - \int_{\hat{\Omega}_h} c^{ij} \frac{\partial u_h}{\partial x_i} \frac{\partial u_h}{\partial x_j} d\Omega.$$

En ce qui concerne la dernière intégrale de (3.6), on a

$$(3.7) \quad \left| \int_{\hat{\Omega}_h} c^{ij} \frac{\partial u_h}{\partial x_i} \frac{\partial u_h}{\partial x_j} d\Omega \right| \leq c \int_{\hat{\Omega}_h} b^{ij} \frac{\partial u_h}{\partial x_i} \frac{\partial u_h}{\partial x_j} d\Omega = c \int_{\hat{\Omega}_h} \frac{\partial u_h}{\partial \nu} u_h dS,$$

où  $c > 0$ . A partir de (3.6) et (3.7), tenant compte de 3.3 et de l'ellipticité de (3.1) on obtient:

$$(3.8) \quad \left\| \frac{\partial u_h}{\partial \nu} \right\|_{L_2(\hat{\Omega}_h)}^2 \leq \\ \leq c \left( \| T_h(u_h) \|_{W_{\frac{1}{2}}^{(1)}(\hat{\Omega}_h)}^2 + 2 \left\| \frac{\partial u_h}{\partial \nu} \right\|_{L_2(\hat{\Omega}_h)} \| T_h(u_h) \|_{W_{\frac{1}{2}}^{(1)}(\hat{\Omega}_h)} \right)$$

où  $c > 0$  ne dépend pas de  $u_h$  et  $h$ . De (3.8) il découle

$$\left\| \frac{\partial u_h}{\partial \nu} \right\|_{L_2(\hat{\Omega}_h)}^2 (1 + c_1) \leq c_1 \left( \| T_h(u_h) \|_{W_{\frac{1}{2}}^{(1)}(\hat{\Omega}_h)} + \left\| \frac{\partial u_h}{\partial \nu} \right\|_{L_2(\hat{\Omega}_h)} \right)^2,$$

d'où on tire

$$(3.9) \quad \left\| \frac{\partial u_h}{\partial \nu} \right\|_{L_2(\hat{\Omega}_h)} \leq c_2 \| T_h(u) \|_{W_{\frac{1}{2}}^{(1)}(\hat{\Omega}_h)}$$

en désignant  $c_2 = \frac{\sqrt{c_1}}{\sqrt{1 + c_1} - \sqrt{c_1}}$ .



La démonstration du lemme est par là finie.

On désigne par  $L_{2,r}$  l'espace des fonctions de carré sommable sur  $\Delta_r$  avec le produit scalaire

$$(3.10) \quad (u, v)_{L_{2,r}} = \int_{\Delta_r} uv \left( 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{\partial a_r}{\partial x_{ri}} \right)^2 \right)^{1/2} dX_r .$$

On peut maintenant démontrer le lemme suivant :

LEMME 3.5: Pour  $\frac{\partial u_h}{\partial \nu} (X_r, a_{r,h}(X_r))$ , considérés comme éléments de  $L_{2,r}$  on a  $\frac{\partial u_h}{\partial \nu} \rightarrow w_r$  dans  $L_{2,r}$  lorsque  $h \rightarrow 0$ ,  $\rightarrow$  désignant la convergence faible,  $u_h$  ayant la même signification comme dans le lemme précédent.

DÉMONSTRATION: On a démontré au travail [11] (la démonstration est très facile) la continuité des traces:  $r \in W_2^{(1)}(\Omega)$ :  $T_h(r) \rightarrow T(r)$  dans  $L_{2,r}$ . On obtient aisément le résultat analogue pour les traces  $Z_h(r)$  où  $r \in W_2^{(2)}(\Omega)$ . On a  $|T_h(u_h)|_{W_2^{(1)}(\hat{\Omega}_h)} = |T_h(g)|_{W_2^{(1)}(\hat{\Omega}_h)} < c$  d'où à l'aide de (3.9) on a

$$(3.11) \quad \left| \frac{\partial u_h}{\partial \nu} \right|_{L_{2,r}} < c .$$

Soit  $\psi \in \mathfrak{D}(\Delta_r)$ . Il existe  $\varphi \in \mathfrak{D}(C_r)$  (cfr. la démonstration du lemme 1.4) que  $\psi(X_r)\varphi(X_r, a_{r,h}(X_r)) = \psi(X_r)$ . Posons  $f(X_r, x_{rn}) = \psi(X_r)\varphi(X_r, x_{rn})$ . On a en vertu de l'égalité de Green

$$\int_{\Delta_r} \frac{\partial u_h}{\partial \nu} \psi \left( 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{\partial a_{r,h}}{\partial x_{ri}} \right)^2 \right)^{1/2} dX_r = \int_{\Omega_h} b^{ij} \frac{\partial u_h}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} d\Omega .$$

Du lemme 3.3 s'ensuit  $\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\Omega_h} b^{ij} \frac{\partial u_h}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Omega} b^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} d\Omega$

où  $u$  est la solution du problème de Dirichlet  $Eu = 0$  sur  $\Omega$ ,

$T(u) = T(g)$  sur  $\dot{\Omega}$ . D'autre part,

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \int_{A_r} \frac{\partial u_h}{\partial \nu} \psi \left( 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{\partial a_r}{\partial x_{ri}} \right)^2 \right)^{1/2} dX_r = \\ & = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{A_r} \frac{\partial u_h}{\partial \nu} \psi \left( 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{\partial a_{rh}}{\partial x_{ri}} \right)^2 \right)^{1/2} dX_r + \\ & + \lim_{h \rightarrow 0} \int_{A_r} \frac{\partial u_h}{\partial \nu} \psi \left[ \left( 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{\partial a_r}{\partial x_{ri}} \right)^2 \right)^{1/2} - \left( 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{\partial a_{rh}}{\partial x_{ri}} \right)^2 \right)^{1/2} \right] dX_r. \end{aligned}$$

La dernière limite étant égale à zéro, il existe  $\lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{\partial u_h}{\partial \nu}, \psi \right)_{L_{2,r}}$  sur un ensemble dense dans  $L_{2,r}$  et tenant compte de (3.11) on en déduit la validité du lemme.

Posons  $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sum_{r=1}^m w_r \varphi_r$ . Lorsque  $\lim_{h \rightarrow 0} |T_h(g)|_{W_2^{(1)}(\dot{\Omega}_h)} = |T(g)|_{W_2^{(1)}(\dot{\Omega})}$  à partir de (3.9) on obtient

$$(3.12) \quad \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{L_2(\dot{\Omega})} \leq c |T(g)|_{W_2^{(1)}(\dot{\Omega})}.$$

Il s'ensuit du lemme 1.4  $\overline{T(W_2^{(1)}(\dot{\Omega}))} = W_2^{(1)}(\dot{\Omega})$ , alors par le prolongement continu, on définit de cette manière sur la frontière «la dérivée selon la conormale extérieure» de la solution du problème de Dirichlet  $Eu = 0$ ,  $T(u) = g$ ,  $g \in W_2^{(1)}(\dot{\Omega})$ . Cette fonction est contenue dans  $L_2(\dot{\Omega})$  et l'inégalité

$$(3.13) \quad \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{L_2(\dot{\Omega})} \leq c |g|_{W_2^{(1)}(\dot{\Omega})}$$

a lieu.

**4. Quelques inégalités se rapportant au problème de Poisson pour l'équation du quatrième ordre.**

Soit  $v \in \mathcal{C}(\Omega)$ ,  $\Omega \in \mathfrak{M}$ . Soit  $H$  le vecteur mentionné dans la démonstration du lemme 3.4. On a une identité

$$\begin{aligned}
 (4.1) \quad & \frac{\partial}{\partial x_m} \left[ (h^i a^{mjkl} + h^l a^{mkji} - h^m a^{lkji}) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 v}{\partial x_k \partial x_l} \right] = \\
 & = 2h^i a^{mjkl} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^3 v}{\partial x_m \partial x_k \partial x_l} + \\
 & + \frac{\partial}{\partial x_m} (h^i a^{mjkl} + h^l a^{mkji} - h^m a^{lkji}) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 v}{\partial x_k \partial x_l}.
 \end{aligned}$$

A partir de (4.1) on obtient en utilisant le théorème de Green

$$\begin{aligned}
 (4.2) \quad & \int_{\dot{\Omega}} (h^i a^{mjkl} + h^l a^{mkji} - h^m a^{lkji}) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 v}{\partial x_k \partial x_l} v_m dS = \\
 & = 2 \int_{\dot{\Omega}} h^i \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_m} \left( a^{mjkl} \frac{\partial^2 v}{\partial x_k \partial x_l} \right) v_j dS - \\
 & - 2 \int_{\dot{\Omega}} \frac{\partial h^i}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} a^{mjkl} \frac{\partial^2 v}{\partial x_k \partial x_l} v_m dS - \\
 & - 2 \int_{\Omega} h^i \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_j} \left( a^{mjkl} \frac{\partial^2 v}{\partial x_k \partial x_l} \right) d\Omega + \\
 & + \int_{\Omega} c^{ijkl} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 v}{\partial x_k \partial x_l} d\Omega + 2 \int_{\Omega} a^{mjkl} \frac{\partial^2 h^i}{\partial x_j \partial x_m} \frac{\partial^2 v}{\partial x_k \partial x_l} \frac{\partial v}{\partial x_i} d\Omega.
 \end{aligned}$$

Ici

$$c^{ijkl} = \frac{\partial}{\partial x_m} (h^i a^{mjkl} + h^l a^{mkji} - h^m a^{lkji}) - 2h^i \frac{\partial a^{mjkl}}{\partial x_m} + 2 \frac{\partial h^i}{\partial x_m} a^{mjkl}.$$

Nous sommes en état de démontrer le lemme suivant:

LEMME 4.1: Soient  $v_h$  les solutions du problème de Poisson, c. à d.  $Dv_h = f$  sur  $\Omega_h$ ,  $Z_h(v_h) = \theta$  sur  $\dot{\Omega}_h$ . Alors on a  $v_h \in W_2^{(4)}(\Omega_h)$  et

$$(4.3) \quad \left| \frac{\partial^2 v_h}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{L_2(\dot{\Omega}_h)} \leq c |f|_{L_2(\Omega_h)}$$

où  $i, j = 1, 2, \dots, n$  et  $c$  ne dépend pas de  $f$  et  $h$ .

DÉMONSTRATION: D'abord, il existe une suite de fonctions, soit  $f_\tau, f_\tau \in \mathfrak{C}(\Omega)$ ,  $f_\tau \rightarrow f$  dans  $L_2(\Omega)$ . Soit  $v_{h\tau}$  la solution du problème de Poisson  $Dv_{h\tau} = f_\tau$  sur  $\Omega_h$ ,  $Z(v_{h\tau}) = \theta$  sur  $\dot{\Omega}_h$ . D'après le lemme 2.2 on a  $v_{h\tau} \in W_p^{(4)}(\Omega_h)$  où  $p$  est quelconque  $\geq 1$ . Après avoir choisi  $p$  assez grand, on voit, en utilisant le théorème de l'immersion de S. L. Sobolev (cfr. p. exemple [7]), que les dérivées du deuxième ordre sont continues dans  $\bar{\Omega}_h$ . D'autre part on a

$$\begin{aligned} (h^i a^{mjkl} - h^m a^{ijkl}) \frac{\partial^2 v_{h\tau}}{\partial x_k \partial x_l} v_m v_i &= 0, \\ (h^l a^{mkji} - h^m a^{lkji}) \frac{\partial^2 v_{h\tau}}{\partial x_i \partial x_j} v_m v_l &= 0, \end{aligned}$$

ce qui veut dire que les vecteurs  $Z^j$  avec composantes  $z^{ji} = (h^i a^{mjkl} - h^m a^{ijkl}) \frac{\partial^2 v_{h\tau}}{\partial x_k \partial x_l} v_m$  et les vecteurs  $Y^k$  avec composantes  $y^{kl} = (h^l a^{mkji} - h^m a^{lkji}) \frac{\partial^2 v_{h\tau}}{\partial x_i \partial x_j} v_m$  sont perpendiculaires à la normale. On en tire  $z^{ji} \frac{\partial^2 v_{h\tau}}{\partial x_i \partial x_j} = 0$ ,  $y^{kl} \frac{\partial^2 v_{h\tau}}{\partial x_k \partial x_l} = 0$ , parceque pour  $j$  resp.  $k$  fixe  $\sum_{i=1}^n z^{ji} \frac{\partial^2 v_{h\tau}}{\partial x_i \partial x_j}$  resp.  $\sum_{l=1}^n y^{kl} \frac{\partial^2 v_{h\tau}}{\partial x_k \partial x_l}$  sont les dérivées de la fonction  $\frac{\partial v_{h\tau}}{\partial x_j}$  resp.  $\frac{\partial v_{h\tau}}{\partial x_k}$  au plan tangent à  $\dot{\Omega}_h$ . Cela permet de mettre l'intégrale du premier membre de l'égalité (4.2) sous la forme:  $\int_{\dot{\Omega}_h} h^m v_m a^{ijkl} \frac{\partial^2 v_{h\tau}}{\partial x_k \partial x_l} \frac{\partial^2 v_{h\tau}}{\partial x_i \partial x_j} dS$ . On a  $\frac{\partial v_{h\tau}}{\partial x_i} = 0$  sur  $\dot{\Omega}_h$ ,

alors le second membre de (4.2) prend la forme

$$\begin{aligned}
 -2 \int_{\Omega_h} \frac{\partial r_{h\tau}}{\partial x_i} \left( h^{ij} f_{\tau} + h^i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a^{ij} \frac{\partial v_{h\tau}}{\partial x_j} \right) - h^i c r_{h\tau} - a^{mjkl} \frac{\partial^2 h^i}{\partial x_j \partial x_m} \frac{\partial^2 r}{\partial x_k \partial x_l} \right) d\Omega + \\
 - \int_{\Omega_h} c^{ijkl} \frac{\partial^2 v_{h\tau}}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 r_{h\tau}}{\partial x_k \partial x_l} d\Omega .
 \end{aligned}$$

D'après le lemme 2.2 pour  $\tau \rightarrow \infty$  ( $p = 2$ ) on a

$$\begin{aligned}
 (4.4) \quad & \int_{\Omega_h} h^m v_m a^{ijkl} \frac{\partial^2 r_h}{\partial x_k \partial x_l} \frac{\partial^2 r_h}{\partial x_i \partial x_j} dS = \\
 & = \int_{\Omega_h} c^{ijkl} \frac{\partial^2 r_h}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 r_h}{\partial x_k \partial x_l} d\Omega - \\
 & - 2 \int_{\Omega_h} \frac{\partial r}{\partial x_i} \left( h^{ij} f + h^i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a^{ij} \frac{\partial r_h}{\partial x_j} \right) - h^i c r_h - a^{mjkl} \frac{\partial^2 h^i}{\partial x_j \partial x_m} \frac{\partial^2 r_h}{\partial x_k \partial x_l} \right) d\Omega .
 \end{aligned}$$

En vertu des lemmes 2.3 et 3.3 on parvient à partir de (4.4) à l'inégalité

$$\int_{\Omega_h} \sum_{i,j=1}^n \left( \frac{\partial^2 r_h}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 dS \leq c \int_{\Omega_h} f^2 d\Omega$$

d'où l'inégalité (4.3).

### 5. Lemmes sur la convergence faible.

Il est propre à notre méthode de s'intéresser dans les paragraphes suivants seulement de ces opérateurs (2.1) qui sont représentables dans la forme

$$\begin{aligned}
 (5.1) \quad \tilde{D}u = & \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left( b^{ij} c^{kl} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( a^{jkl} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l} \right) + \\
 & + d^{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + e^i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu .
 \end{aligned}$$

Cela veut dire: pour  $u \in \mathfrak{E}(\Omega)$  on a  $\tilde{D}u = Du$ . Le coefficient  $c$  a le même sens que dans (2.1), tandis que  $b^{ij}$ ,  $c^{kl}$  sont deux fois continûment différentiables dans  $\bar{\Omega}$ ,  $b^{ij} = b^{ji}$ ,  $c^{kl} = c^{lk}$  et pour chaque vecteur  $\{\xi_i\}$  réel dans  $E_n$  on a  $b^{ij}\xi_i\xi_j \geq c \sum_{i=1}^n \xi_i^2$ ,  $c^{ij}\xi_i\xi_j \geq c \sum_{i=1}^n \xi_i^2$ , où  $c > 0$ . Les fonctions  $a^{ijkl}$  sont une fois continûment différentiables dans  $\bar{\Omega}$ ,  $d^{ij}$ ,  $e^i$  continues dans  $\bar{\Omega}$ .

Il peut arriver que  $a^{ijkl} \neq b^{ij}c^{kl}$ , ce qui ne surprend pas, parceque la représentation d'un opérateur du quatrième ordre n'est pas déterminée d'une manière unique. On écrit  $D_1u = b^{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ ,  $D_2u = c^{kl} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l}$ . La formule de Green prend la forme suivante (cfr. lemme 2.1):

$$(5.2) \quad \int_{\Omega} Dru d\Omega = \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} (b^{ij} D_2 r) v_i + a^{ijkl} \frac{\partial^2 r}{\partial x_k \partial x_l} v_j \right] u dS - \\ - \int_{\Omega} D_2 v b^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} v_j dS + \int_{\Omega} D_2 r D_1 u d\Omega - \int_{\Omega} a^{ijkl} \frac{\partial^2 v}{\partial x_k \partial x_l} \frac{\partial u}{\partial x_j} d\Omega + \\ + \int_{\Omega} \left( d^{ij} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + e^k \frac{\partial v}{\partial x_k} + cv \right) u d\Omega.$$

On désigne par  $\dot{W}_2^{(-1)}(\Delta_r)$  l'ensemble des fonctionnelles sur l'espace  $\dot{W}_2^{(1)}(\Delta_r)$ . On a

**LEMME 5.1:** Soient  $v_k$  les solutions du problème de Poisson  $Dv_k = f$  sur  $\Omega_k$ ,  $Z_k(v_k) = \theta$  sur  $\hat{\Omega}_k$ . Soit

$$F_k(z) = \int_{\Delta_r} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} (b^{ij} D_2 v_k) v_i + a^{ijkl} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_k \partial x_l} v_j \right] \cdot \\ \cdot \left( 1 + \sum_{\mu=1}^{n-1} \left( \frac{\partial a_{r\mu}}{\partial x_{r\mu}} \right)^2 \right)^{1/2} z dX_r$$

la fonctionnelle sur l'espace  $\dot{W}_2^{(1)}(\Delta_r)$  où l'on pose  $x_{rn} = a_{rn}(X_r)$ . Alors on a  $F_h \rightarrow F$  où  $F \in \dot{W}_2^{(-1)}(\Delta_r)$ , le symbole  $\rightarrow$  désignant la convergence faible, et

$$(5.3) \quad |F_h|_{H_2^{(-1)}(\Delta_r)} \leq c_1 |f|_{L_2(\Omega_h)},$$

$$(5.4) \quad |F|_{H_2^{(-1)}(\Delta_r)} \leq c_1 |f|_{L_2(\Omega)}$$

où  $c_1$  ne dépend pas de  $h$ .

DÉMONSTRATION: Soit  $z \in \dot{W}_2^{(1)}(\Delta_r)$ . Soit  $\varphi$  une fonction indéfiniment différentiable, égale à 1 dans  $C_r$  (cfr. la démonstration du lemme 1.4) mais dont le support est si petit que la fonction  $w(X_r, x_{rn}) = z(X_r)\varphi(X_r, x_{rn})$  s'annule sur  $\dot{\Omega}_h$  sauf les parties contenues dans  $C_r$ . On a  $w \in W_2^{(1)}(\Omega)$ . Soient  $w_\tau \in \mathcal{E}(\Omega)$  telles qu'on ait  $Tw_\tau \rightarrow Tw$  dans  $W_2^{(1)}(\dot{\Omega})$  pour  $\tau \rightarrow \infty$ . Soit  $u_{h\tau}$  la solution du problème de Dirichlet  $-\frac{\partial}{\partial x_i} \left( b^{ij} \frac{\partial u_{h\tau}}{\partial x_j} \right) = 0$  sur  $\Omega_h$ ,  $T(u_{h\tau}) = w_\tau$  sur  $\dot{\Omega}_h$ . En vertu du lemme 3.4 on a  $u_{h\tau} \in W_2^{(2)}(\Omega_h)$  et à partir de (5.2) on parvient à

$$(5.5) \quad \int_{\dot{\Omega}_h} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} (b^{ij} D_2 v_h) v_i + a^{ikl} \frac{\partial^2 v_h}{\partial x_k \partial x_l} v_j \right] u_{h\tau} dS =$$

$$= \int_{\dot{\Omega}_h} D_2 v_h b^{ij} \frac{\partial u_{h\tau}}{\partial x_i} v_j dS + \int_{\dot{\Omega}_h} D_2 v_h \frac{\partial b^{ij}}{\partial x_i} \frac{\partial u_{h\tau}}{\partial x_j} d\Omega +$$

$$+ \int_{\dot{\Omega}_h} a^{ikl} \frac{\partial^2 v_h}{\partial x_k \partial x_l} \frac{\partial u_{h\tau}}{\partial x_j} d\Omega + \int_{\dot{\Omega}_h} f u_{h\tau} d\Omega -$$

$$- \int_{\dot{\Omega}_h} \left( d^{ij} \frac{\partial^2 v_h}{\partial x_i \partial x_j} + e^k \frac{\partial v_h}{\partial x_k} + c v_h \right) u_{h\tau} d\Omega.$$

En vertu du lemme 3.4, on peut laisser tendre  $\tau$  vers l'infini, définissant  $b^{ij} \frac{\partial u_h}{\partial x_i} v_j$  par le prolongement continu. On obtient

de cette manière

$$\begin{aligned}
 F_h(z) &= \int_{\Omega_h} D_2 r_h b^{ij} \frac{\partial u_h}{\partial x_i} \nu_j dS + \int_{\Omega_h} D_2 r_h \frac{\partial b^{ij}}{\partial x_i} \frac{\partial u_h}{\partial x_j} d\Omega + \\
 &+ \int_{\Omega_h} a^{jkl} \frac{\partial^2 r_h}{\partial x_k \partial x_l} \frac{\partial u_h}{\partial x_j} d\Omega + \int_{\Omega_h} f u_h d\Omega - \\
 &- \int_{\Omega_h} \left( d^{ij} \frac{\partial^2 r_h}{\partial x_i \partial x_j} + e^k \frac{\partial r_h}{\partial x_k} + c r_h \right) u_h d\Omega.
 \end{aligned}$$

Les lemmes 3.4 et 4.1 entraînent  $|F_h(z)| \leq c |f|_{L_2(\Omega_h)} |z|_{H^1_{1/2}(\Delta_r)}$  d'où

$$(5.6) \quad |F_h|_{H^1_{1/2}(\Delta_r)} \leq c |f|_{L_2(\Omega_h)}$$

où  $c$  ne dépend pas de  $f$  et  $h$ . Soit maintenant  $z \in \mathfrak{D}(\Delta_r)$ , on définit par là une fonction, soit  $w$ , sur la frontière  $\dot{\Omega}$ , telle qu'on ait  $w(X_r, a_r(X_r)) = z(X_r)$  et  $w \equiv 0$  au delà de la partie de la frontière  $|X_r| < \alpha$ ,  $x_{rn} = a_r(X_r)$ . Soit  $g \in L_2(\dot{\Omega})$ ,  $g \equiv 0$  au delà de la partie de la frontière mentionnée ci-dessus. Soit  $\varepsilon > 0$ . On peut donc trouver  $\omega$ , élément de  $\mathfrak{G}(\dot{\Omega})$  de la manière que

$$|K - Z(\omega)|_{L^2_2(\dot{\Omega})} < \varepsilon,$$

où  $K = [w, g]$ . En posant  $\nu_i = \nu^i$  on a sur la frontière  $\dot{\Omega}$  (au sens des traces)  $b^{ij} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \nu_j = (b^{ij} \nu_j - \sigma \nu^i) \frac{\partial \omega}{\partial x_i} + \sigma \frac{\partial \omega}{\partial \nu}$ ,  $\frac{\partial \omega}{\partial \nu} = \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \nu^i$ ,  $\sigma = b^{ij} \nu_i \nu_j$ . On a  $(b^{ij} \nu_j - \sigma \nu^i) \nu_i = 0$ , alors  $(b^{ij} \nu_j - \sigma \nu^i) \frac{\partial \omega}{\partial x_i} = c_k^i \frac{\partial z^*}{\partial x_{ki}}$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ , en désignant  $Z(\omega) = [\omega, g^*]$ ,  $Z^*(X_k) = \omega(X_k, a_k(X_k))$ .  $c_k^i$  sont les fonctions bornées, bien connues. On définit  $g$  introduite ci-dessus de la manière suivante:  $c_k^i \frac{\partial z}{\partial x_{ki}} + \sigma g = 0$  ( $c_k^i \frac{\partial z}{\partial x_{ki}}$  ne dépend pas en réalité de  $k$ ). Soit maintenant  $\varphi \in \mathfrak{D}(C_r)$  avec la propriété suivante:  $0 \leq \varphi \leq 1$ ,  $\varphi = 1$  sur la partie de la frontière  $|X_r| < \alpha$ ,  $x_{rn} = a_r(X_r)$ ,  $z(X_r) \neq 0$ . Posons  $\tilde{\omega} = \omega \varphi$ . Il existe une constante  $c$  dépendant



seulement de  $\varphi$  pour laquelle  $|Z(\tilde{\omega}) - Z(\omega)|_{L^2_2(\tilde{\Omega})} \leq \epsilon \varepsilon$ . On a à partir de (5.2) en posant  $z_h(X_r) = \tilde{\omega}(X_r, a_{rh}(X_r))$ :

$$(5.7) \quad F_h(z) = F_h(z) - F_h(z_h) - \int_{\tilde{\Omega}_h} D_2 r_h b^{ij} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x_i} v_j dS + \int_{\tilde{\Omega}_h} f \tilde{\omega} d\Omega - \int_{\tilde{\Omega}_h} D_2 r_h D_1 \tilde{\omega} d\Omega - \int_{\tilde{\Omega}_h} a^{ikl} \frac{\partial^2 r_h}{\partial x_l \partial x_l} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x_j} d\Omega - \int_{\tilde{\Omega}_h} \left( d^{ij} \frac{\partial^2 r_h}{\partial x_i \partial x_j} + e^k \frac{\partial r_h}{\partial x_k} + cr_h \right) \tilde{\omega} d\Omega.$$

On a

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \overline{|F_h(z) - F_h(z_h)|} &\leq c |f|_{L_2(\Omega)} \varepsilon, \\ \lim_{h \rightarrow 0} \overline{\left| \int_{\tilde{\Omega}_h} D_2 r_h b^{ij} \frac{\partial \tilde{\omega}_h}{\partial x_i} v_j dS \right|} &\leq c |f|_{L_2(\Omega)} \varepsilon. \end{aligned}$$

En vertu du lemme 2.4 il existe

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \left( \int_{\tilde{\Omega}_h} f \tilde{\omega} d\Omega - \int_{\tilde{\Omega}_h} D_2 v_h D_1 \tilde{\omega} d\Omega + \right. \\ \left. + \int_{\tilde{\Omega}_h} a^{ikl} \frac{\partial^2 v_h}{\partial x_k \partial x_l} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x_j} d\Omega - \int_{\tilde{\Omega}_h} \left( d^{ij} \frac{\partial^2 v_h}{\partial x_i \partial x_j} + e^k \frac{\partial v_h}{\partial x_k} + cr_h \right) \tilde{\omega} d\Omega \right). \end{aligned}$$

En effet, soit  $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$ . On a à partir de (5.2) et en utilisant le lemme 2.1

$$(5.8) \quad \begin{aligned} \int_{\tilde{\Omega}} D_2 \varphi D_1 \tilde{\omega} d\Omega - \int_{\tilde{\Omega}} a^{ikl} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_l} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x_j} d\Omega + \int_{\tilde{\Omega}} \left( d^{ij} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} + \right. \\ \left. + e^k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} + c\varphi \right) \tilde{\omega} d\Omega = \int_{\tilde{\Omega}} D\varphi \tilde{\omega} d\Omega = \\ = \int_{\tilde{\Omega}} a^{ijk} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_l} \frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial x_i \partial x_j} d\Omega + \int_{\tilde{\Omega}} a^{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x_i} d\Omega + \int_{\tilde{\Omega}} c\varphi \tilde{\omega} d\Omega = \\ = \int_{\tilde{\Omega}} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} \left( a^{ijk} \frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial x_i \partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( a^{ij} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x_i} \right) + c\tilde{\omega} \right] \varphi d\Omega. \end{aligned}$$

Ayant  $v_h \in \dot{W}_2^{(2)}(\Omega)$  on déduit de (5.8)

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} D_2 v D_1 \tilde{\omega} d\Omega - \int_{\Omega} a^{jkl} \frac{\partial^2 v_h}{\partial x_k \partial x_l} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x_j} d\Omega + \int_{\Omega} \left( d^{ij} \frac{\partial^2 v_h}{\partial x_i \partial x_j} + \right. \\ & \quad \left. + e^k \frac{\partial v_h}{\partial x_k} + c v_h \right) \tilde{\omega} d\Omega = \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} \left( a^{ijkl} \frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial x_i \partial x_j} \right) - \right. \\ & \quad \left. - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( a^{ij} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x_i} \right) + c \tilde{\omega} \right] v_h d\Omega, \end{aligned}$$

d'où le résultat. La conséquence immédiate en est l'existence de  $\lim_{h \rightarrow 0} F_h(z)$ .  $\mathfrak{D}(\Delta_r)$  étant dense dans  $\dot{W}_2^{(1)}(\Delta_r)$  on obtient le lemme 5.1 en tenant compte de l'inégalité (5.6).

Soit

$$G_h(z) = \int_{\Delta_r} D_2 v_h \left( 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{\partial a_{r,h}}{\partial x_{r,i}} \right)^2 \right)^{1/2} z dX_r$$

une fonctionnelle linéaire dans  $L_2(\Delta_r)$ . On a

LEMME 5.2:  $|G_h|_{L_2(\Delta_r)} \leq c |f|_{L_2(\Omega_h)}$  et pour  $h \rightarrow 0 : G_h \rightarrow G$ , faiblement,  $|G|_{L_2(\Delta_r)} \leq c |f|_{L_2(\Omega)}$ .

DÉMONSTRATION. Soit  $z \in \mathfrak{D}(\Delta_r)$ , on désigne par  $K$  l'élément  $[0, w]$ , posant  $w(X_r, a_r(X_r)) = z(X_r)$ ,  $w \equiv 0$  au delà de la partie de la frontière  $|X_r| < \alpha$ ,  $x_{rn} = a_r(X_r)$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Ayant  $K \in L_2^2(\dot{\Omega})$ , on peut trouver  $\tilde{\omega} \in \mathfrak{F}(\Omega)$ ,  $\tilde{\omega} \equiv 0$  à l'extérieur de  $C_r$  (cfr. la démonstration du lemme précédent) de la manière qu'on ait  $|Z(\tilde{\omega}) - K|_{L_2^2(\dot{\Omega})} < \varepsilon$ .

Soit

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_h(X_r) &= \tilde{\omega}(X_r, a_{r,h}(X_r)), \quad \tilde{\omega}_0(X_r) = \tilde{\omega}(X_r, a_r(X_r)), \quad z_h^*(X_r) = \\ &= b^{ij} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x_i} v_j(X_r, a_{r,h}(X_r)), \quad z^*(X_r) = b^{ij} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x_i} v_j(X_r, a_r(X_r)). \end{aligned}$$

On a  $\tilde{\omega}_h \rightarrow \tilde{\omega}_0$  dans  $\dot{W}_2^{(1)}(\Delta_r)$ ,  $z_h^* \rightarrow z^*$  dans  $L_2(\Delta_r)$ . En vertu de

l'inégalité (4.3) et en utilisant (5.2) on obtient :

$$(5.9) \quad \lim_{h \rightarrow 0} G_h(z^*) = \lim_{h \rightarrow 0} F_h(\bar{\omega}_h) + \lim_{h \rightarrow 0} \left[ - \int_{\Omega_h} f \bar{\omega} d\Omega + \int_{\Omega_h} D_2 v_h D_1 \bar{\omega} d\Omega - \int_{\Omega_h} a^{jkl} \frac{\partial^2 v_h}{\partial x_k \partial x_l} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x_j} d\Omega + \int_{\Omega_h} \left( d^{ij} \frac{\partial^2 v_h}{\partial x_i \partial x_j} + e^k \frac{\partial v_h}{\partial x_k} + c v_h \right) \bar{\omega} d\Omega \right].$$

On a déjà démontré l'existence de tous les deux limites du second membre de (5.9), alors  $\lim_{h \rightarrow 0} G_h(z^*)$  existe. D'autre part, l'élément  $z^*$  est aussi proche de l'élément  $z\sigma$  dans  $L_2(\Delta_r)$  qu'on veut. Alors  $\lim_{h \rightarrow 0} G_h(z^*)$  existe sur un ensemble dense dans  $L_2(\Delta_r)$  et tenant compte de l'inégalité (4.3) on en conclut à la validité du lemme 5.2.

Soit maintenant  $f \in W_2^{(1)}(\hat{\Omega})$ ,  $g \in L_2(\hat{\Omega})$ . En désignant par  $F_r(v, z)$  notre fonctionnelle considérée dans le lemme 5.1 et par  $G_r(v, z)$  la fonctionnelle considérée dans le lemme 5.2, on définit par là  $F(v, z)$ , fonctionnelle sur l'espace  $W_2^{(1)}(\hat{\Omega})$  et  $G(v, z)$ , fonctionnelle sur l'espace  $L_2(\hat{\Omega})$  de la manière suivante: posant  $f_r = f\varphi_r$  (cfr. lemme 1.4),

$$F(v, f) = \sum_{r=1}^m F_r(v, f_r),$$

posant

$$g_r = g\varphi_r, \quad G(v, g) = \sum_{r=1}^m G_r(v, g_r).$$

La conséquence immédiate des lemmes 5.1 et 5.2 est le lemme 5.3, exprimant la généralisation de la formule de Green :

**LEMME 5.3:** *Soit  $v$  la solution du problème de Poisson  $Dv = f$  sur  $\Omega$ ,  $Z(v) = \theta$  sur  $\hat{\Omega}$ . Soit  $u$  la solution du problème de Dirichlet sur  $\Omega$ . Alors on a*

$$(5.10) \quad \int_{\Omega} f u d\Omega = F(v, u) - G\left(v, b^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} v_j\right)$$

(ici  $u$ , resp.  $b^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \nu_j$  sont éléments de  $W_2^{(1)}(\dot{\Omega})$  resp.  $L_2(\dot{\Omega})$  les valeurs frontières de  $u$  au sens des traces).

DÉMONSTRATION: Posons  $q = 1 - \sum_{r=1}^m q_r$  (cfr. lemme 1.4),  $u_r = uq_r$ ,  $\tilde{u} = uq$ , ayant en vue seulement les points du  $\Omega$ . Pour chaque  $r$  on a en vertu des lemmes précédents

$$(5.11) \quad \int_{\Omega} fu_r d\Omega = F_r(v, u_r) - G_r \left( r, b^{ij} \frac{\partial u_r}{\partial x_i} \nu_j \right) - \\ + \int_{\Omega} D_2 r D_1 u_r d\Omega - \int_{\Omega} a^{kl} \frac{\partial^2 r}{\partial x_k \partial x_l} \frac{\partial u_r}{\partial x_j} d\Omega - \\ + \int_{\Omega} \left( d^{ij} \frac{\partial^2 r}{\partial x_i \partial x_j} + e^k \frac{\partial r}{\partial x_k} + cr \right) u_r d\Omega.$$

Pour  $\tilde{u}$  on obtient

$$(5.12) \quad \int_{\Omega} f\tilde{u} d\Omega = \int_{\Omega} D_2 v D_1 \tilde{u} d\Omega - \int_{\Omega} a^{kl} \frac{\partial^2 v}{\partial x_k \partial x_l} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_j} d\Omega + \\ + \int_{\Omega} \left( d^{ij} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + e^k \frac{\partial v}{\partial x_k} + cv \right) \tilde{u} d\Omega.$$

L'addition des égalités (5.11), (5.12) et compte tenu de (5.8) donne le résultat.

## 6. Le problème de Dirichlet généralisé.

On remplace dans ce paragraphe la condition sur l'intégrale de Dirichlet finie par la condition sur l'intégrabilité du carré de la solution.

Soit  $K = [g_1, g_2] \in L_2^2(\dot{\Omega})$ , cela veut dire  $g_1 \in W_2^{(1)}(\dot{\Omega})$ ,  $g_2 \in L_2(\dot{\Omega})$ . On pose pour chaque  $r: z_r(X_r) = g_1(X_r, a_r(X_r))$ . Soit  $T$  le vecteur  $b^{ij} \nu_j - \sigma \nu^i$  (cfr. lemme 5.1), considéré sur la frontière  $\dot{\Omega}$ . En l'exprimant dans le système  $r$ -ième par des coordonnées  $c_r^i$ , posons  $g_2(X_r, a_r(X_r)) = c_r^i(X_r) \frac{\partial z_r}{\partial x_{ri}}(X_r)$ . Etant indépendante de

$r, g_3$  définit par là une fonction dans  $L_2(\hat{\Omega})$ . Posons  $g_4 = g_3 + \sigma g_2$ .

On dit que  $u$  de  $L_2(\Omega)$  est la solution du problème de Dirichlet généralisé, correspondant aux conditions aux limites

$$u = g_1, \frac{\partial u}{\partial n} = g_2 \text{ si pour chaque } f \in L_2(\Omega) \text{ on a}$$

$$(6.1) \quad \int_{\Omega} f u d\Omega = F(v, g_1) - G(v, g_2)$$

où  $v$  est la solution du problème de Poisson  $Dv = f, Z(v) = \theta$ .

**THÉORÈME 3.** Soit  $\Omega \in \mathfrak{R}$ ,  $K = [g_1, g_2] \in L_2^2(\hat{\Omega})$ . Alors il existe précisément une solution  $u$  du problème de Dirichlet généralisé correspondant aux conditions aux limites  $u = g_1, \frac{\partial u}{\partial n} = g_2$ . De plus, il existe précisément une transformation  $R$  linéaire et bornée de  $L_2^2(\hat{\Omega})$  dans  $L_2(\Omega)$  de sorte qu'on obtienne  $R(K) = u$ . Si  $K$  est une trace, alors  $u$  est la solution du problème de Dirichlet  $Du = 0, Z(u) = K$ . Ayant  $\overline{Z(W_2^2(\Omega))} = L_2^2(\hat{\Omega})$  on peut à chaque solution généralisée  $u$  trouver une suite de solutions du problème de Dirichlet (avec l'intégrale de Dirichlet finie), soit  $\{u_n\}$ , de sorte qu'on ait:  $u_n \rightarrow u$  dans  $L_2(\Omega), Z(u_n) \rightarrow K$  dans  $L_2^2(\hat{\Omega})$ .

**DÉMONSTRATION.** A partir des lemmes 5.1 et 5.2 et en désignant  $v = D^{-1}f$  ( $v$  est la solution du problème de Poisson), on voit que  $F(D^{-1}f, g_1), G(D^{-1}f, g_2)$  sont des fonctionnelles linéaires et bornées dans  $L_2(\Omega)$ . Alors il existe précisément une  $u$  telle qu'on ait (6.1), en s'appuyant sur le théorème de Riesz. Nous avons ainsi établi une transformation linéaire  $R$ . D'autre part, posons  $f = u$ . On en tire

$$(6.2) \quad |u|_{L_2(\Omega)} \leq c |K|_{L_2^2(\hat{\Omega})}.$$

Soit maintenant  $K$  une trace. Alors en vertu du lemme 5.3 on obtient l'assertion. Théorème 3 est par là démontré.

Il vaut la peine de remarquer que l'inégalité (6.2) exprime la justesse du problème, c. à d. la dépendance continue de la solution des conditions aux limites.

En ce qui concerne la régularité de la solution, nous pouvons

nous appuyer sur le théorème 1 du travail [13] par L. Nirenberg dont un cas particulier est formulé dans le

**LEMME 6.1:** *Soient les coefficients de l'opérateur (2.1) deux fois continûment différentiables. Soit  $u$  localement de carré sommable dans  $\Omega$ . Soit  $c$  une constante ne dépendant que du support  $\varphi$ . Si l'on a pour chaque  $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$ ,  $|(D\varphi, u)_{L_2(\Omega)}| \leq c |\varphi|_{W_{\frac{1}{2}}^{(4-j)}(\Omega)}$  où  $0 \leq j \leq 4$ , alors on a  $u \in W_{\frac{1}{2}}^{(j)}(\Omega')$  pour chaque sousdomaine  $\Omega' (\overline{\Omega'} \subset \Omega)$ .*

On en déduit sans difficulté le

**LEMME 6.2:** *La solution du problème de Dirichlet généralisé est dans  $W_{\frac{1}{2}}^{(4)}(\Omega')$  pour chaque sousdomaine  $\Omega'$ .*

**DÉMONSTRATION:** Si  $u$  est la solution du notre problème, alors  $u \in L_2(\Omega)$  et  $(D\varphi, u)_{L_2(\Omega)} = 0$  pour chaque  $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$ . En écrivant  $D\varphi$  sous la forme (2.1), on obtient pour l'opérateur

$A\varphi = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left( a^{ijkl} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_l} \right)$ , dont les coefficients sont déjà deux fois continûment différentiables:  $|(A\varphi, u)_{L_2(\Omega)}| \leq c |\varphi|_{H_{\frac{1}{2}}^{(2)}(\Omega)}$ , alors on en tire que  $u \in W_{\frac{1}{2}}^{(2)}(\Omega')$ . Mais cela entraîne  $|(A\varphi, u)_{L_2(\Omega)}| \leq c |\varphi|_{L_2(\Omega)}$  d'où le résultat.

La solution du problème de Dirichlet généralisé étant dans  $W_{\frac{1}{2}}^{(4)}(\Omega')$  pour chaque sousdomaine, on tire de là:

**LEMME 6.3:** *Soit  $u$  la solution du problème de Dirichlet généralisé. Alors on a  $Du = 0$  presque partout.*

D'autre part, il existe pour  $u$  mentionné ci-dessus  $Z_n(u)$  sur chaque  $\Omega_n$ . Alors que est qu'on peut dire de la convergence  $Z_n(u)$  vers  $K$ ? Nous ne résolvons pas cette question, ajoutons seulement que elle est, peut être, assez difficile à résoudre quoi qu'on s'attende pour chaque  $r$  à la convergence de  $u(X_r, a_{r,n}(X_r))$  vers  $u(X_r, a_r(X_r))$  dans  $W_{\frac{1}{2}}^{(1)}(\Delta_r)$  et à la convergence de  $\frac{\partial u}{\partial n}(X_r, a_{r,n}(X_r))$  vers  $\frac{\partial u}{\partial n}(X_r, a_r(X_r))$  dans  $L_2(\Delta_r)$ .

L'opérateur  $R$  nous donne une solution pour les conditions aux limites continues (cela veut dire: on suppose que toutes

les premières dérivées de la solution sont continues sur la frontière). Alors une question naturelle se pose: est qu'on obtient par là une solution classique? Comme on ne peut pas se servir dans le cas des opérateurs du 4<sup>ième</sup> ordre des théorèmes sur le maximum (on ne connaît pas si une solution classique existe), cette question paraît être encore plus délicate que celle mentionnée ci-dessus.

En ce qui concerne les méthodes numériques, on peut se servir de l'inégalité (6.2). On peut approcher la solution cherchée aussi bien qu'on veut, ayant à disposition un système de solutions de l'équation  $Du = 0$ , dont les conditions aux limites forment un ensemble fondamental dans  $L_2^2(\dot{\Omega})$ . Pour  $\Omega$  plan, unicohérent, un tel système par exemple pour l'opérateur biharmonique est celui des polynômes biharmoniques.

Il s'ensuit du travail [10] que les conditions aux limites  $L_2^2(\dot{\Omega})$  sont les plus générales si l'on ne pose pas de conditions supplémentaires sur la frontière du domaine.

### 7. Remarques sur la représentation de l'opérateur $Du$ .

On montre ici que pour les domaines plans, la représentation de l'opérateur  $Du$  sous la forme (5.1) ne donne pas dans beaucoup de cas une condition supplémentaire.

LEMME 7.1: *Soit*

$$Du = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left( a^{ijkl} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l} \right), \quad Au = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left( b^{ij} c^{kl} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l} \right).$$

*Soit  $\Omega \in E_2$ ,  $a^{ijkl}$  constantes. Alors il existe des constantes  $b^{ij}$ ,  $c^{kl}$ ,  $b^{ij} = b^{ji}$ ,  $c^{kl} = c^{lk}$ , telles que pour chaque  $u \in \mathfrak{C}(\Omega)$  on a  $Du = Au$ . En outre pour chaque vecteur réel  $\{ \xi_i \}$  on a*

$$b^{ij} \xi_i \xi_j \geq c \sum_{i=1}^2 \xi_i^2, \quad c^{ij} \xi_i \xi_j \geq c \sum_{i=1}^2 \xi_i^2.$$

DÉMONSTRATION. En remplaçant  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  par  $x_i$ , on obtient

$$(7.1) \quad P(X) = a^{ijkl} x_i x_j x_k x_l,$$

une forme biquadratique. Posons  $\frac{x_2}{x_1} = y$  et divisons (7.1) par  $x_1^4$ : on en tire

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_1^4} P(X) &= Ay^4 + By^3 + Cy^2 + Dy + E = Q(y) = \\ &= A(y - \alpha_1)(y - \alpha_2)(y - \alpha_3)(y - \alpha_4), \end{aligned}$$

$\alpha_i$  étant les racines de  $Q(y)$ . Ayant pour chaque  $y$  réel  $Q(y) > 0$ ,  $\alpha_i$  sont complexes et on peut écrire  $Q(y)$  sous la forme  $Q(y) = Q_1(y)Q_2(y)$  où  $Q_i(y)$  sont des polynômes du deuxième degré,  $Q_i(y) > 0$  pour chaque  $y$  réel. Ecrivons  $Q_1(y) = b^{22}y^2 + 2b^{12}y + b^{11}$ ,  $Q_2(y) = c^{22}y^2 + 2c^{12}y + c^{11}$ , posant  $b^{12} = b^{21}$ ,  $c^{12} = c^{21}$ . On en déduit  $a^{ijk}x_jx_kx_i = b^{ij}x_jc^{ki}x_kx_i$  d'où le lemme.

Les  $a^{ijk}$  étant des fonctions (on considère seulement les domaines plans), on peut pour chaque  $X$  de  $\Omega$  définir  $b^{ij}(X)$ ,  $c^{ki}(X)$  tel qu'on ait

$$(7.2) \quad a^{ijk}(X)\xi_j\xi_k\xi_i = b^{ij}(X)\xi_jc^{ki}(X)\xi_k\xi_i.$$

Mais on exige dans la définition de (5.1) la dérivabilité des  $b^{ij}$ ,  $c^{ki}$  ce qui est nécessaire pour la validité de (5.2). Nous démontrons l'existence de deux dérivées continues sur  $\bar{\Omega}$  dans deux cas particuliers:

**LEMME 7.2:** *En désignant par  $\alpha_i$  les racines de  $Q(y)$ , supposons  $\alpha_1(X) = \alpha_3(X)$ . Alors on peut choisir  $b^{ij}$ ,  $c^{ki}$  de telle manière qu'on a (7.2) et en même temps  $b^{ij}$ ,  $c^{ki}$  sont deux fois continûment différentiables dans  $\bar{\Omega}$ .*

**DÉMONSTRATION:** Posons  $b^{22} = c^{22} > 0$ . Alors on a  $b^{22} = \sqrt{A}$ ,  $b^{11} = c^{11}$ ,  $b^{11} = \sqrt{E}$ ,  $b^{12} = c^{12}$ ,  $b^{12} = \frac{D}{4b^{11}}$ , d'où le résultat.

**LEMME 7.3:** *Soit  $C$  un carré contenant  $\Omega$ . Soient  $a^{ijk}$  deux fois continûment différentiables dans  $\bar{C}$ ,*

$$a^{ijk}x_jx_kx_i \geq c(x_1^2 + x_2^2)^2, \quad c > 0, \quad \inf_{X \in \bar{C}} |\alpha_1(X) - \alpha_3(X)| > h > 0$$



en désignant par  $\alpha_1(X), \alpha_2(X), \alpha_3(X), \alpha_4(X)$  les racines du polynome

$$Q(y) = Ay^4 + By^3 + Cy^2 + Dy + E$$

où

$$\overline{\alpha_1(X)} = \alpha_2(X), \overline{\alpha_3(X)} = \alpha_4(X), \text{Im}\alpha_1(X) > 0, \text{Im}\alpha_3(X) > 0.$$

Alors on peut choisir  $b^{ij}, c^{kl}$  de telle manière qu'on a (7.2) et en même temps  $b^{ij}, c^{kl}$  sont deux fois continûment différentiables dans  $\bar{\Omega}$ .

DÉMONSTRATION: Ayant  $Q(y) \geq c > 0$  pour chaque  $y$  réel et chaque  $X$  de  $\bar{C}$ , on peut trouver une constante  $g > 0$  pour laquelle  $b(X) \geq g, d(X) \geq g$ , posant  $\alpha_1(X) = a(X) + ib(X), \alpha_3(X) = c(X) + id(X)$ . On obtient pour  $a, b, c, d$

$$\begin{aligned} (7.3) \quad \Phi_1(a, b, c, d, F, G, H, J) &= a + c - F = 0, \\ \Phi_2(a, b, c, d, F, G, H, J) &= \\ &= a^2 + b^2 + 4ac + c^2 + d^2 - G = 0, \\ \Phi_3(a, b, c, d, F, G, H, J) &= \\ &= (a^2 + b^2)c + (c^2 + d^2)a - H = 0, \\ \Phi_4(a, b, c, d, F, G, H, J) &= \\ &= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - J = 0 \end{aligned}$$

où  $F, G, H, J$  son certaines combinaisons des  $a^{ijkl}$ . Soit  $X_0 \in \bar{C}$ . On choisit d'une certaine manière  $\alpha_1(X_0), \alpha_3(X_0)$  (ce choix est déterminé uniquement à une permutation des indices 1 et 3 près). On a

$$(7.4) \quad \left[ \begin{array}{cccc} \frac{\partial \Phi_1}{\partial a}, & \frac{\partial \Phi_2}{\partial a}, & \frac{\partial \Phi_3}{\partial a}, & \frac{\partial \Phi_4}{\partial a} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial d}, & \frac{\partial \Phi_2}{\partial d}, & \frac{\partial \Phi_3}{\partial d}, & \frac{\partial \Phi_4}{\partial d} \end{array} \right] = 4bd[(a-c)^4 + (b^2-d^2)^2 + 2(d^2+b^2)(a-c)^2] \geq 4g^2h^4.$$

En vertu du théorème sur les fonctions implicites, il existe un

voisinage du point  $[F(X_0), G(X_0), H(X_0), J(X_0)]$  du  $E_4$  auquel (7.3) est résolu par

$$(7.5) \quad \begin{aligned} a &= \varphi_1(F, G, H, J), & b &= \varphi_2(F, G, H, J), \\ c &= \varphi_3(F, G, H, J), & d &= \varphi_4(F, G, H, J), \end{aligned}$$

en même temps  $\varphi_i$  sont indéfiniment continûment différentiables. Naturellement on a  $a(X_0) = \varphi_1(F(X_0), G(X_0), H(X_0), J(X_0))$ ,  $b(X_0) = \varphi_2(F(X_0), \dots) \dots$ . On tire de (7.5) l'existence d'un carré, soit  $K(X_0)$ , dans  $E_2$ , centré au point  $X_0$ , auquel  $a(X) = \varphi_1(F(X), G(X), H(X), J(X))$ ,  $b(X) = \varphi_2(F(X), G(X), H(X), J(X))$ ,  $c(X) = \varphi_3(F(X), G(X), H(X), J(X))$ ,  $d(X) = \varphi_4(F(X), G(X), H(X), J(X))$ , donne une représentation des racines de  $Q(y)$ ,  $a, b, c, d$  sont deux fois continûment différentiables dans  $\overline{K(X_0)C}$ . L'autre représentation des racines dans  $\overline{K(X_0)C}$  avec les mêmes qualités a la forme  $c(X) = \varphi_1, d(X) = \varphi_2, a(X) = \varphi_3, b(X) = \varphi_4$ . En utilisant le théorème de Borel, on peut construire un réseau dans  $\bar{C}$  se composant de rectangles fermés dans lesquels sont définies les deux représentations des racines construites ci-dessus. Il est manifeste qu'on peut choisir dans les rectangles de telles représentations des racines qu'elles coïncident sur les parties communes de deux rectangles. Evidemment  $a(X), b(X), c(X), d(X)$  sont deux fois continûment différentiables ce qui achève la démonstration du lemme 7.3.

Il est à remarquer que la réduction (7.2) n'est pas valable en général dans  $E_n$ ,  $n > 2$ , même pour  $a^{ijk}$  constantes.

#### LITTÉRATURE

- [1] AGMON S., DOUGLIS A., NIRENBERG L.: *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions I*. Communications on pure and applied mathematics, vol. XII, 1959, 623-727.
- [2] CIMMINO G.: *Nuovo tipo di condizione al contorno e nuovo metodo di trattazione per il problema generalizzato di Dirichlet*. Rendiconti del circolo matematico di Palermo, Tomo LXI, 1937, XVI.

- [3] CIMMINO G.: *Una nuova forma del teorema di unicità per la soluzione del problema generalizzato di Dirichlet*, Atti della Acc. delle Scienze dell'Ist. di Bologna, Rendiconti serie XI, t. IV, 1957, 83-88.
- [4] FICHERA G.: *Sulla teoria generale dei problemi al contorno*, Rendiconti Acc. Lincei, 21, 1956, 46-55, 166-172.
- [5] GAGLIARDO E.: *Proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili*. Ricerche di Matematica, vol. VII, 1958, 102-137.
- [6] GAGLIARDO E.: *Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in  $n$  variabili*. Rendiconti del seminario matematico della università di Padova, vol. XXVII, 1957, 284-305.
- [7] KOSHELEV A. I.: *Les estimations à priori dans  $L_p$  et les solutions généralisées des équations elliptiques et leurs systèmes*. Uspehi matem. nauk, vol. XIII, fasc. 4, 1958, 29-86 (russe).
- [8] LIONS J. L.: *Sur quelques problèmes aux limites relatifs à des opérateurs différentiels elliptiques*. Bulletin de la société mathématique de France, tome 83, 1955, 225-250.
- [9] LIONS J. L.: *Conditions aux limites de Visik-Soboleff et problèmes mixtes*. C. R. Acad. Sc. Paris, 244, 1957, 1126-1128.
- [10] NEČAS J.: *L'extension de l'espace des conditions aux limites du problème biharmonique pour les domaines à points anguleux*. Czechoslovak mathematical journal, vol. 9 (84), 1959, 339-371.
- [11] NEČAS J.: *Sur les solutions des équations elliptiques aux dérivées partielles du deuxième ordre avec l'intégrale de Dirichlet non bornée*. Czechoslovak mathematical journal, vol. 10 (85), 1960, 283-298 (russe).
- [12] NEČAS J.: *Sur les domaines du type  $\mathcal{R}$* . A paraître à Czechoslovak mathematical journal.
- [13] NIRENBERG L.: *Remarks on Strongly Elliptic Partial Differential Equations*. Communications on pure and applied mathematics, vol. VIII, 1955, 649-675.
- [14] PINI B.: *Sul problema di Dirichlet per le equazioni a derivate parziali lineari ellittiche in due variabili*. Rendiconti del Seminario matematico della università di Padova, vol. XXVI, 1956, 177-200.
- [15] PINI B.: *Una generalizzazione del problema biarmonico fondamentale*. Rendiconti del Seminario matematico della università di Padova, vol. XXV, 1956, 198-213.
- [16] RELICH F.: *Darstellung der Eigenwerte von  $\Delta u + \lambda u = 0$  durch ein Randintegral*. Math. Zeitschrift 46, 1940, 635-646.
- [17] SOBOLEFF S. L., VISHIK M. I.: *La position générale de quelques problèmes aux limites pour les équations partielles elliptiques*. DAN, 111, 1956, 521-523 (russe).