RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

DOMENICO BOCCIONI

Condizioni di autodistributività

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 31 (1961), p. 171-197
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1961__31__171_0>

CONDIZIONI DI AUTODISTRIBUTIVITÀ

Nota (*) *di* DOMENICO BOCCIONI (*a Padova*)

Si considerino le seguenti quattro eguaglianze:

$$x(y + z) = (xy) + (xz)\ , \qquad (x + y)z = (xz) + (yz)\ ;$$
$$x(yz) = (xy)(xz)\ , \qquad (xy)z = (xz)(yz)\ ,$$

dove x, y, z sono elementi di un prefissato insieme G, avente numero cardinale (non necessariamente finito) $\nu \geqslant 2$. Esse si chiamano: condizioni di distributività di G le prime due (precisamente, nell'ordine, condizione di s-distributività e di d-distributività), condizioni di autodistributività di G le seconde due (precisamente, nell'ordine, condizione di s-autodistributività e di d-autodistributività).

Al variare di x, y, z in G, ciascuna di queste quattro eguaglianze descrive un insieme (costituito da ν^3 condizioni); questi quattro insiemi di condizioni vengono nell'ordine denotati con

$$\Delta_1,\ \Delta_2\ ; \quad A_1,\ A_2\ ,$$

e inoltre si pone:

$$\Delta_3 = \Delta_1 \cup \Delta_2\ , \quad A_3 = A_1 \cup A_2\ .$$

Nel presente lavoro viene risolto il problema di determinare

(*) Pervenuta in Redazione il 31 Marzo 1961.
Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, Padova.

(per ogni valore di ν) tutti i sottinsiemi indipendenti ed equivalenti (v. n.° 2) a ciascuno dei tre insiemi di condizioni (di distributività) Δ_1, Δ_2, Δ_3 con referenza a quei particolari bisistemi, di sostegno G, (si veda, ad es., l'introduzione di [2] [1])) nei quali risulta sempre

$$x + y = yx .$$

L'interesse di questo problema sta anche nel fatto che esso è equivalente (teor. 1) al problema di determinare tutti i sottinsiemi indipendenti ed equivalenti (v. n.° 1) rispettivam. a ciascuno dei tre insiemi di condizioni (di autodistributività) A_1, A_2, A_3, con referenza ai gruppoidi di sostegno G; (diciamo gruppoide un insieme non vuoto, il sostegno, nel quale sia ovunque definita una operazione univoca binaria). È appunto questo secondo problema che viene direttamente risolto in questa nota (per ogni valore di ν), mediante i teoremi 2, ..., 6, i cui enunciati espongono dettagliatamente i risultati raggiunti. In particolare si è trovato che ciascuno dei due insiemi A_1, A_2 è indipendente se, e soltanto se, $\nu \geqslant 3$, mentre l'insieme A_3 è indipendente se, e soltanto se, $\nu \geqslant 5$.

Le condizioni di autodistributività sono state di recente considerate da vari Autori, anche in connessione alla teoria dei quasigruppi (si vedano, ad es., [3], [4], e le referenze ivi citate).

§ 1

1. - Sia dato un insieme G avente numero cardinale (non necessariamente finito) $\nu \geqslant 2$. Le ν^3 eguaglianze:

$$(1) \qquad x(yz) = (xy)(xz) \qquad (x, y, z \in G)$$

si diranno *condizioni di s-autodistributività* di G, e il loro insieme

---

[1]) I numeri fra parentesi quadre rimandano alla bibliografia alla fine della nota.

verrà denotato con A_1. Le ν^3 eguaglianze:

$$(2) \qquad (xy)z = (xz)(yz) \qquad (x, y, z \in G)$$

si diranno invece *condizioni di d-autodistributività* di G, e il loro insieme verrà denotato con A_2. Le $2\nu^3$ condizioni (1) e (2) si diranno *condizioni di autodistributività* di G, e il loro insieme ($= A_1 \cup A_2$) verrà denotato con A_3.

Una terna (ordinata) (x, y, z) di elementi di G si dirà *s-autodistributiva* (risp. *d-autodistributiva*) in un gruppoide (moltiplicativo) G^0 di sostegno G ([1], p. 3), se in G^0 è soddisfatta la *relativa* eguaglianza (1) (risp. (2)).

Una terna (x, y, z) di elementi di G si dirà *s-isolata* (risp. *d-isolata*) in un gruppoide G^0 di sostegno G, se essa non è s-autodistributiva (risp. d-autodistributiva) in G^0 mentre tutte le rimanenti terne di elementi di G vi sono invece s-autodistributive (risp. d-autodistributive).

Un gruppoide G^0, di sostegno G, si dirà *s-autodistributivo* (risp. *d-autodistributivo*) se in esso sono soddisfatte tutte le condizioni (1) (risp. (2)).

Se il sostegno F di un gruppoide F^0 contiene il sostegno E di un gruppoide E^0, e se la moltiplicazione di F^0 subordina in E quella di E^0, allora F^0 dicesi un *sopra-gruppoide* di E^0 (ed E^0 un *sotto-gruppoide* di F^0). Se inoltre l'insieme $F - E$ (degli elementi di F che non appartengono ad E) non è vuoto, F^0 dicesi un sopra-gruppoide *proprio* di E^0. Evidentemente:

I) *Se F^0 è un sopra-gruppoide proprio di E^0, e se esiste un $w \in F - E$ tale che (in F^0) si abbia*

$$(3) \qquad vx = xv = w,$$

per ogni $v \in F - E$ e per ogni $x \in F$, allora ogni terna di elementi di F fra i quali vi sia almeno un elemento di $F - E$ è s-autodistributiva e d-autodistributiva (in F^0).

È pure evidente che:

II) *Se due gruppoidi sono opposti* ([1], n.° 3), *e se la terna (x, y, z) è s-autodistributiva (risp. d-autodistributiva) in uno di* *essi, allora la terna « opposta » (z, y, x) è d-autodistributiva (risp. s-autodistributiva) nell'altro.*

Per un sottinsieme *indipendente* (o costituito da condizioni *indipendenti*) di un certo insieme non vuoto di condizioni (quali ad es. le (1), (2)) relative agli elementi di G e interpretabili in un gruppoide di sostegno G, intenderemo un sottinsieme tale che, fissata una sua condizione qualsiasi, esiste sempre un gruppoide di sostegno G nel quale la condizione fissata non è soddisfatta mentre tutte le rimanenti condizioni del sottinsieme stesso vi sono invece soddisfatte.

Diremo che due sottinsiemi dell'insieme di condizioni considerato nel preced. capoverso sono *equivalenti* (o che sono costituiti da condizioni *equivalenti*), e che ognuno è *equivalente* all'altro, se il verificarsi delle condizioni di uno qualsiasi di essi in un gruppoide G^0 di sostegno G implica sempre (qualunque sia G^0) il verificarsi in G^0 delle condizioni dell'altro.

Studieremo nel seguito n.i 3 e successivi) ciascuno, A_i, dei tre insiemi di condizioni A_1, A_2, A_3, determinando (per ogni valore di ν) tutti i suoi sottinsiemi, A_i, indipendenti e ad esso equivalenti.

2. - È chiaro che un gruppoide è commutativo (cioè in esso risulta sempre $xy = yx$) se, e soltanto se, esso coincide col suo opposto ([1], n.° 3).

Le definizioni di sottinsieme *n-indipendente* (o costituito da condizioni *n-indipendenti*) e di sottinsiemi *n-equivalenti* si deducano risp. dal terzult. e penult. capoverso del n.° preced. leggendovi « n-indipendente(i) » invece di « indipendente(i) », « gruppoide non commutativo » invece di « gruppoide », « n-equivalenti(e) » invece di « equivalenti(e) ».

Nel seguito dimostreremo (si vedano le fini delle dimostrazioni dei teoremi successivi al teorema 1) che, per ogni valore di ν:

III) *I sottinsiemi, A_i', dell'insieme A_i* (n.° 1) *che sono indipendenti e ad esso equivalenti sono pure gli unici sottinsiemi di A_i n-indipendenti e ad esso n-equivalenti.* ($i = 1, 2, 3.$)

Per un *o-bisistema* intenderemo un bisistema ([1], n.° 1) i cui gruppoidi additivo e moltiplicativo ([1], n.° 3) sono opposti (quindi, necessariamente, non commutativi), di modo che in esso risulta sempre

$$x + y = yx . \tag{4}$$

Facendo corrispondere ad ogni o-bisistema di sostegno G (n.° 1) il gruppoide moltiplicativo dell'o-bisistema stesso, si ottiene una corrispondenza biunivoca fra l'insieme degli o-bisistemi e quello dei gruppoidi non commutativi di sostegno G. Un o-bisistema di sostegno G e il corrispondente gruppoide non commutativo si diranno *associati* (l'uno all'altro).

Denotiamo con

$$\Delta_1 , \quad \Delta_2 , \quad \Delta_3$$

rispettivamente l'insieme delle ν^3 condizioni di s-distributività di G ([1], p. 3), l'insieme delle ν^3 condizioni di d-distributività di G ([1], p. 22), l'insieme $(= \Delta_1 \cup \Delta_2)$ delle $2\nu^3$ condizioni di distributività di G ([1], p. 26).

Le definizioni di sottinsieme *o-indipendente* (o costituito da condizioni *o-indipendenti*) e di sottinsiemi *o-equivalenti* si deducano risp. dal terzult. e penult. capoverso del n.° preced. leggendovi « o-indipendente(i) » invece di « indipendente(i) », « o-bisistema » invece di « gruppoide », « o-equivalenti(e) » invece di « equivalenti(e) ».

Diremo *associate* (l'una all'altra) le due seguenti condizioni, risp. di s-autodistributività e di s-distributività di G:

$$x(yz) = (xy)(xz) , \qquad x(z + y) = (xz) + (xy) , \tag{5}$$

relative risp. alle due terne ((2, 3)-*opposte*) (x, y, z) e (x, z, y) di elementi di G.

Diremo pure *associate* (l'una all'altra) le due seguenti altre condizioni, risp. di d-autodistributività e di d-distributività di G:

$$(xy)z = (xz)(yz) , \qquad (y + x)z = (yz) + (xz) , \tag{6}$$

relative risp. alle due terne ((1, 2)-*opposte*) (x, y, z) e (y, x, z) di elementi di G. Evidentemente (v. (4)):

IV) *Una condizione di distributività di G è soddisfatta in un o-bisistema di sostegno G se, e soltanto se, la condizione di autodistributività ad essa associata è soddisfatta nel gruppoide non commutativo associato all'o-bisistema.*

Dalla IV) segue facilmente che, se Δ'_i è un sottinsieme o-indipendente di Δ_i a questo o-equivalente, le condizioni di autodistributività associate alle condizioni di distributività costituenti Δ'_i formano un sottinsieme n-indipendente, A'_i, di A_i (n.° 1) a questo n-equivalente: e viceversa ($i = 1, 2, 3$). Quindi, per la III), vale il seguente

TEOREMA 1: *Sia G un insieme avente numero cardinale $\nu \geqslant 2$, ed i simboli Δ_1, Δ_2, Δ_3 e A_1, A_2, A_3 abbiano il significato chiarito risp. in questo n.°* (7° capov.) *e nel precedente* (1° capov.). *Allora tutti i sottinsiemi Δ'_i dell'insieme Δ_i che sono o-indipendenti ed o-equivalenti a Δ_i si ottengono nel modo seguente: Si consideri uno qualsiasi, A'_i, dei sottinsiemi dell'insieme A_i che sono indipendenti ed equivalenti ad A_i* (n.° 1). *Le condizioni di distributività associate* (v. (5), (6)) *alle condizioni di autodistributività costituenti A'_i formano appunto un sottinsieme o-indipendente, Δ'_i, di Δ_i a questo o-equivalente.* ($i = 1, 2, 3$.)

I sottinsiemi A'_i di cui si parla in questo teorema 1 verranno determinati tutti, per ogni valore di ν, mediante i teoremi, 2, ..., 6, dei numeri successivi. Quindi i teoremi 1, 2, ..., 6 risolvono completamente il problema della determinazione di tutti i sottinsiemi Δ'_i.

3. - Fissiamo tre elementi distinti, a, b, c, dell'insieme G (n.° 1), l'ultimo dei quali, c, presentandosi soltanto se $\nu > 2$. Con G^3 denotiamo l'insieme delle ν^3 terne (ordinate) di elementi di G.

Pensiamo G^3 suddiviso nelle classi, a due a due disgiunte, delle quali si parla nel n.° 2 di [1] (ove si legga G invece di B). Ognuna di queste classi verrà chiamata un *tipo* (di G^3), ed il simbolo

$$[x, y, z]$$

denoterà il tipo contenente la terna (x, y, z). I tipi sono cinque se $\nu > 2$, quattro se $\nu = 2$.

L'insieme costituito dagli elementi distinti p, q, r, ... verrà denotato con $\{p, q, r, ...\}$.

V) *Ciascuna delle tre terne* (a, a, b), (b, a, a), (a, b, c) *è s-isolata* (n.º 1) *in un gruppoide d-autodistributivo e non commutativo di sostegno* $\{a, b, c\}$.

Infatti (cfr. [1], p. 8, ult. capov.), si riconosce facilmente che (a, a, b) è s-isolata nel 1º, (b, a, a) nel 2º, e (a, b, c) nel 3º dei tre gruppoidi definiti risp. delle seguenti tabelle:

$$(7)\qquad \begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & c & b & c \\ b & c & c & c \\ c & c & c & c \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & a & c & c \\ b & b & c & c \\ c & c & c & c \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & a & a & c \\ b & b & b & b \\ c & c & c & c \end{array}$$

e che questi tre gruppoidi sono appunto d-autodistributivi.

VI) *La terna* (a, b, a) *è contemporaneamente s-isolata e d-isolata* (n.º 1) *in un gruppoide non commutativo di sostegno* $\{a, b, c\}$.

Infatti (a, b, a) è s-isolata e d-isolata nel gruppoide definito dalla seguente tabella:

$$(8)\qquad \begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & a & c & c \\ b & a & b & c \\ c & c & c & c \end{array}$$

come agevolmente si verifica (cfr. [1], p. 8, ult. capov.).

VII) *La terna* (a, a, a) *è s-isolata* (n.º 1) *in un gruppoide non commutativo di sostegno* $\{a, b, c\}$.

Infatti (cfr. [1], p. 8, ult. capov.), si riconosce facilmente che (a, a, a) è s-isolata nel gruppoide definito dalla seguente tabella:

(9)
$$\begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & b & c & c \\ b & a & b & c \\ c & a & b & c \end{array}$$

VIII) *Se il numero cardinale ν dell'insieme G è $\geqslant 3$, ogni terna di elementi di G è s-isolata* (n.° 1) *in un gruppoide non commutativo di sostegno G.*

Infatti, ciò risulta agevolmente dalle tre precedenti proposizioni V), VI), VII) e dalla I) (n.° 1), con un ragionamento analogo a quello fatto nel n.° 7 di [1].

VIII') *Se il numero cardinale ν dell'insieme G è $\geqslant 3$, ogni terna di elementi di G è d-isolata* (n.° 1) *in un gruppoide non commutativo di sostegno G.*

Infatti, ciò segue subito dalla VIII), per mezzo della II) del n.° 1.

4. - Esaminiamo adesso il caso $\nu = 2$, dimostrando che:

IX) *In un gruppoide G^0 di sostegno $\{a, b\}$ la terna (a, a, a) è s-autodistributiva se, e soltanto se, vi è s-autodistributiva la terna (a, b, b).*

Infatti, supponiamo dapprima che (a, a, a) non sia s-autodistributiva in G^0. Allora da $a(aa) \neq (aa)(aa)$ segue $aa \neq a$, cioè $aa = b$, e segue inoltre $ab \neq bb$, ossia $(ab, bb) = (a, b)$, (b, a) (v. [1], p. 10, 2ª parte del penult. capov.), quindi si trova appunto, in ciascuno di questi due casi, che (a, b, b) non è s-autodistributiva.

Viceversa, supponiamo ora che (a, b, b) non sia s-autodistributiva in G^0. Allora $a(bb) \neq (ab)(ab)$ implica $(ab, bb) = (a, b)$, (b, a) ed implica inoltre, in ciascuno di questi due casi, $aa = b$, quindi si trova appunto, in entrambi i casi, che (a, a, a) non è s-autodistributiva.

X) *In un gruppoide G^0 di sostegno $\{a, b\}$ la terna (a, a, b) è s-autodistributiva se, e soltanto se, vi è s-autodistributiva la terna (a, b, a).*

Infatti, se (a, a, b) non è s-autodistributiva in G^0, da $a(ab) \neq \neq (aa)(ab)$ segue $(aa, ab) = (b, a)$, (b, b) e segue inoltre, nel 1° di questi due casi (cioè se $aa = b$, $ab = a$), $ba = a$, e nel 2° (cioè se $aa = b$, $ab = b$), $bb = a$, quindi si trova appunto, in entrambi i casi, che (a, b, a) non è s-autodistributiva.

Viceversa, se (a, b, a) non è s-autodistributiva in G^0, allora, se $ba = b$, da $a(ba) \neq (ab)(aa)$ segue $aa = b$, $ab = b$, $bb = a$, quindi si trova appunto che (a, a, b) non è s-autodistributiva; se, invece, $ba = a$, da $a(ba) \neq (ab)(aa)$ segue $(aa, ab) = (b, a)$, (b, b) e segue inoltre, nel 2° di questi due casi (cioè se $aa = b$, $ab = b$), $bb = a$, quindi si trova appunto, in ciascuno di questi due casi, che (a, a, b) non è s-autodistributiva.

XI) *In un gruppoide G^0 di sostegno $\{a, b\}$ la terna (b, b, b) è s-autodistributiva se, e soltanto se, vi è s-autodistributiva la terna (b, a, a).*

XII) *In un gruppoide G^0 di sostegno $\{a, b\}$ la terna (b, b, a) è s-autodistributiva se, e soltanto se, vi è s-autodistributiva la terna (b, a, b).*

Infatti, queste due proposizioni XI) e XII) sono un'immediata conseguenza risp. delle IX) e X) applicate al gruppoide, di sostegno $\{a, b\}$, immagine isomorfa di G^0 (cfr. [1], n.° 2) mediante la corrispondenza $a \to b$, $b \to a$.

XIII) *Se in un gruppoide di sostegno $\{a, b\}$ sono s-autodistributive entrambe le terne (a, a, a) e (b, b, b), allora vi sono s-autodistributive entrambe le terne (a, a, b) e (b, b, a).*

Infatti, supponiamo dapprima che, in un gruppoide G^0 di sostegno $\{a, b\}$, la terna (a, a, b) non sia s-autodistributiva. Allora si presenta necessariamente (v. dimostraz. della X)) uno dei due casi seguenti: $aa = b$, $ab = a$, $ba = a$, oppure $aa = b$, $ab = b$, $bb = a$. Ebbene, in ciascuno di questi due casi (distinguendo i due sottocasi $bb = a, b$ nel 1° caso, $ba = a, b$ nel 2°), si trova appunto che almeno una delle due terne (a, a, a), (b, b, b) non è s-autodistributiva in G^0.

Inoltre, se in un gruppoide di sostegno $\{a, b\}$ non è s-autodistributiva la terna (b, b, a), allora non vi è appunto s-autodistributiva almeno una delle due terne (a, a, a), (b, b, b). E invero, ciò risulta immediatamente (cfr. dimostraz. della XII)) dal risultato del preced. capoverso.

Diremo che un sottinsieme di G^3 (n.° 3) è *s-isolato* (risp. *d-isolato*) in un gruppoide G^0 di sostegno G, se le terne costituenti il sottinsieme stesso non sono s-autodistributive (risp. d-autodistributive) in G^0, mentre tutte le rimanenti terne di elementi di G vi sono invece s-autodistributive (risp. d-autodistributive).

XIV) *Ciascuna delle due classi C_1 e C_3, considerate nel n.° 8 di* [1], *è s-isolata in un gruppoide d-autodistributivo e non commutativo di sostegno $\{a, b\}$.*

Infatti C_1 è s-isolata nel gruppoide d-autodistributivo e non commutativo 14 (v. [1], n.° 10), C_3 è s-isolata nell'immagine isomorfa del gruppoide 14 mediante la corrispondenza $a \to b$, $b \to a$.

XV) *Ognuna delle due terne costituenti la classe C'_i, considerata nel n.° 12 di* [1], *è d-autodistributiva in un gruppoide di sostegno $\{a, b\}$ se, e soltanto se, vi è d-autodistributiva l'altra* $(i = 1, 2, 3, 4)$.

XIII') *Se in un gruppoide di sostegno $\{a, b\}$ sono d-autodistributive entrambe le terne (a, a, a) e (b, b, b), allora vi sono d-autodistributive entrambe le terne (b, a, a) e (a, b, b).*

XIV') *Ciascuna delle due classi C'_1 e C'_3, considerate nel n.°* 12 *di* [1], *è d-isolata in un gruppoide s-autodistributivo e non commutativo di sostegno $\{a, b\}$.*

Infatti, per mezzo della II) del n.° 1, la XV) si ottiene subito dalle quattro proposiz. IX), ..., XII), la XIII') dalla XIII), e la XIV') dalla XIV), (cfr. [1], p. 22, ult. capov.).

5. - Ormai siamo in grado di concludere intanto lo studio dei due insiemi di condizioni A_1 ed A_2 (n.° 1) mediante i due teoremi seguenti.

TEOREMA 2: *L'insieme A_1, delle ν^3 condizioni di s-autodistributività* (1) *di un insieme G avente numero cardinale ν, è indipendente se, e soltanto se, $\nu \geqslant 3$. Se $\nu = 2$, e $G = \{a, b\}$, tutti i sottinsiemi A'_1 di A_1 che sono indipendenti ed equivalenti ad A_1 si ottengono nel modo seguente: si scelga in ciascuna delle due classi*

$$(10) \quad C_1 = \{(a, a, a),\ (a, b, b)\}, \qquad C_3 = \{(b, b, b),\ (b, a, a)\}$$

una qualunque delle due terne che la costituiscono; le due condizioni di s-autodistributività relative alle terne così scelte costituiscono appunto un sottinsieme A'_1 (di A_1) indipendente ed equivalente ad A_1.

TEOREMA 2′: *L'insieme A_2, delle ν^3 condizioni di d-autodistributività* (2) *di un insieme G avente numero cardinale ν, è indipendente se, e soltanto se, $\nu \geqslant 3$. Se $\nu = 2$, e $G = \{a, b\}$, tutti i sottinsiemi A'_2 di A_2 che sono indipendenti ed equivalenti ad A_2 si ottengono nel modo seguente: si scelga in ciascuna delle due classi*

$$(11) \quad C'_1 = \{(a, a, a),\ (b, b, a)\}, \qquad C'_3 = \{(b, b, b),\ (a, a, b)\}$$

una qualunque delle due terne che la costituiscono; le due condizioni di d-autodistributività relative alle terne così scelte costituiscono appunto un sottinsieme A'_2 (di A_2) indipendente ed equivalente ad A_2.

Dimostrazione: Si ottiene facilmente, in base alle due ultime proposizioni (VIII) e VIII′)) del n.° 3 e a quelle del n.° 4. Anzi, da queste stesse proposizioni si ottiene anche la dimostrazione della prima parte ($i = 1, 2$) della III) del n.° 2.

§ 2

6. - Studieremo adesso l'insieme A_3 delle $2\nu^3$ condizioni di autodistributività di G (n.° 1).

XVI) *La terna* (a, a, a) *è s-isolata* (n.° 1) *in un gruppoide d-autodistributivo e non commutativo di sostegno $\{a, b, c, d\}$.*

Infatti (cfr. [1], p. 8, ult. capov.), un tale gruppoide è ad es. quello così definito: $aa = b$, $ab = c$, ogni altro prodotto è $= d$.

XVII) *La terna* (a, b, a) *è s-isolata* (n.° 1) *in un gruppoide d-autodistributivo e non commutativo di sostegno* $\{a, b, c, d, e\}$.

Infatti (cfr. [1], p. 8, ult. capov.), un tale gruppoide è ad es. quello così definito: $ac = d$, $ba = c$, ogni altro prodotto è $= e$.

XVIII) *Se il numero cardinale* ν *dell'insieme* G *è* $\geqslant 5$, *ogni terna di elementi di* G *è s-isolata* (n.° 1) *in un gruppoide d-autodistributivo e non commutativo di sostegno* G.

Infatti, ciò risulta facilmente dalla V) (n.° 3), dalle precedenti XVI), XVII) e dalla I) (n.° 1), con un ragionamento analogo a quello fatto nel n.° 7 di [1].

XVIII') *Se il numero cardinale* ν *dell'insieme* G *è* $\geqslant 5$, *ogni terna di elementi di* G *è d-isolata* (n.° 1) *in un gruppoide s-autodistributivo e non commutativo di sostegno* G.

Infatti, ciò segue subito dalla XVIII), per mezzo della II) del n.° 1 (cfr. [1], p. 28, 3° capov.).

TEOREMA 3: *L'insieme* A_3, *delle* $2\nu^3$ *condizioni di autodistributività* (1) *e* (2) *di un insieme* G *avente numero cardinale* ν, *è indipendente* (n.° 1) *se, e soltanto se,* $\nu \geqslant 5$.

Dimostrazione: La prima parte di questo teorema è contenuta nelle XVIII) e XVIII'); la seconda parte (« soltanto se ») sarà implicita nei teoremi, 4, 5, 6, dei numeri successivi. Le XVIII) e XVIII') dimostrano anche la seconda parte ($i = 3$) della III) del n.° 2, per $\nu \geqslant 5$.

7. - Dimostreremo in questo numero che:

XIX) *Non esiste alcun gruppoide di sostegno* $G = \{a, b, c, d\}$ *nel quale tutte le terne* (di elementi di G) *non appartenenti al tipo* $[a, b, a]$ (n.° 3) *siano s-autodistributive e d-autodistributive, cioè nel quale si abbia:*

$$(12) \quad (x, y, z) \notin [a, b, a] \to x(yz) = (xy)(xz)\,, \quad (xy)z = (xz)(yz)\,,$$

e nel quale contemporaneamente risulti:

(13) $$a(ba) \neq (ab)(aa)\,,$$

(14) $$(ab)a = (aa)(ba)\,, \quad (ac)a = (aa)(ca)\,, \quad (ad)a = (aa)(da)\,.$$

Supponiamo perciò che G^0 sia un gruppoide di sostegno $G = \{a, b, c, d\}$ nel quale valgano le (12), (13), (14), e dimostriamo, in ciascuno dei sette casi seguenti:

(15) $$(aa, ab) = (b, a),\ (b, b),\ (b, c),\ (c, a),\ (c, b),\ (c, c),\ (c, d)$$

(distinguendo eventualmente alcuni sottocasi), l'assurdità di questa ipotesi.

Una volta dimostrato ciò, avremo appunto dimostrato la XIX), in quanto: *i*) ciascuno degli ulteriori cinque casi possibili: $(aa, ab) = (b, d),\ (d, a),\ (d, b),\ (d, c),\ (d, d)$ è immediatamente riconducibile ad uno dei precedenti (15) per isomorfismo, mediante la corrispondenza $a \to a$, $b \to b$, $c \to d$, $d \to c$ (ad es. l'esistenza di un gruppoide di sostegno $G = \{a, b, c, d\}$ in cui valgano le (12), (13), (14) ed in cui ulteriormente risulti $aa = b$, $ab = d$ implicherebbe l'esistenza di un G^0, sua immagine isomorfa mediante la suddetta corrispondenza, in cui varrebbe il terzo dei casi (15)); *ii*) ciascuno dei residui quattro casi possibili: $(aa, ab) = (a, a)$, (a, b), (a, c), (a, d) si rivela assurdo a priori (se invero valessero le (12), (13), (14) e fosse inoltre $aa = a$, la (13) e la $(14)_1$ implicherebbero risp. $a(ba) \neq (ab)a$, $(ab)a = a(ba)$).

Per comodità espositiva, denoteremo coi simboli

(16) $$s(x, y, z)\,, \qquad d(x, y, z)$$

rispettivamente l'eguaglianza (1) e l'eguaglianza (2) (n.º 1), cioè la condizione di s-autodistributività e la condizione di d-autodistributività relative alla terna (x, y, z) (di elementi di G).

1) In G^0 risulti

$$aa = b\,, \qquad ab = a\,.$$

Allora $s(a, a, a)$ implica $bb = a$, e quindi $d(a, a, a)$ comporta $ba = a$. Se ne trae $(ab)a \neq (aa)(ba)$, il che (per la $(14)_1$) è assurdo.

2) In G^0 risulti

$$aa = b\,, \quad ab = b\,.$$

Allora $s(a, a, a)$ implica $bb = b$, e quindi $d(a, a, a)$ comporta $ba = b$. Se ne trae $a(ba) = (ab)(aa)$, il che (per la (13)) è assurdo.

3) In G^0 risulti

$$aa = b\,, \quad ab = c\,.$$

Allora $s(a, a, a)$ implica $bb = c$, quindi $d(a, a, a)$ comporta $ba = c$. Se ne trae, in virtù della (13) e della $d(a, b, b)$ risp.: $ac \neq cb$ $cb = cc$, donde

$$ac \neq cc\,.$$

Ma $s(a, b, b)$ implica invece $ac = cc$, quindi l'assurdo.

4) In G^0 risulti

$$aa = c\,, \quad ab = a\,.$$

Allora $s(a, b, b)$, $d(a, b, b)$ implicano $c = aa = (ab)(ab) = a(bb) = = (ab)(bb) = (ab)b = ab = a$, il che è assurdo.

5) In G^0 risulti

$$aa = c\,, \quad ab = b\,.$$

Allora $s(a, a, b)$ comporta $cb = b$, quindi $s(a, a, a)$, $d(a, a, b)$ implicano risp.

$$ac = cc\,, \quad bb = b\,.$$

Perciò dalla diseguaglianza $a(ba) \neq (ab)(aa) = b(aa) = (ba)(ba)$, conseguenza delle (13), $s(b, a, a)$, si trae successivamente

$$ba = d\,, \quad ad \neq dd\,,$$

quindi $s(b, a, a)$, $d(b, b, a)$ e la $(14)_1$ implicano risp.

$$bc = dd\,, \qquad dd = d\,, \qquad cd = d\,,$$

e da queste risulta

$$bc = d\,.$$

Poichè (per quanto sopra) $ad \neq d$, $d(a, a, d)$ comporta successivam.

$$ad = c\,, \qquad cc = d\,, \qquad ac = d\,,$$

(l'ultima risultando dalla $ac = cc$), mentre $s(b, c, c)$ implica

$$bd = d\,.$$

Ma allora $s(a, b, c)$ comporta $c = ad = a(bc) = (ab)(ac) = bd = d$, il che è assurdo.

6) In G^0 risulti

$$aa = c\,, \qquad ab = c\,.$$

Allora dalle $s(a, a, a)$, $d(a, a, a)$, $d(a, a, b)$ si trae

$$ac = ca = cc = cb\,,$$

e quindi $d(a, a, c)$ e la (13) implicano risp.

$$ac \neq a\,, \qquad ba \neq c\,.$$

Distinguiamo i tre sottocasi $ac = b, c, d$.

6_1) Sia inoltre

$$ac = b\,.$$

Allora $cc = b$, mentre $d(a, a, c)$ implica $bb = b$, e quindi $s(a, b, b)$ comporta $cc = c$; donde l'assurdo.

6_2) Sia inoltre

$$ac = c\,.$$

Allora dalla (13) segue (poichè $cc = c$):

$$ba = d\,, \qquad ad \neq c\,,$$

quindi $s(c, b, a)$, $s(a, a, d)$ comportano successivam. (poichè $cb = ca = c$):

$$cd = c\,, \qquad ad \neq d\,,$$

e perciò le $(14)_3$, $d(a, d, d)$ implicano successivam.

$$ad = a\,, \qquad dd = d\,.$$

Ma allora $s(a, d, d)$ comporta $a = ad = a(dd) = (ad)(ad) = aa = c$, il che è assurdo.

6_3) Sia inoltre

$$ac = d\,.$$

Allora $d(a, a, c)$ implica

$$dd = d\,;$$

quindi dall'eguaglianza $(ac)b = (ab)(cb) = c(cb) = (cc)(cb) = dd$, conseguenza delle $d(a, c, b)$, $s(c, c, b)$, $cc = cb = ac$, segue $db = d$; donde, per la $d(a, c, b)$, risulta

$$cd = d\,.$$

Poichè $cx = d$ $(x \in G)$, dalle $s(a, a, d)$, $s(a, c, b)$, segue risp.

$$ad \neq a\,, \qquad ad \neq b\,; \qquad ad = dc\,,$$

quindi l'eguaglianza $d(ad) = (ac)(ad) = a(cd) = ad = a(ac) = (aa)(ac) = c(ac) = d$, conseguenza delle $s(a, c, d)$, $s(a, a, c)$, comporta $ad \neq c$ ($ad = c$ implicherebbe $d(ad) = dc = ad = c$), ossia

$$ad = d\,.$$

Quindi, poichè $d(b, a, a)$ implica $ba \neq a$, dalle (13), $d(b, a, a)$ segue successivam.

$$ba = b\,, \qquad bc = b\,,$$

e perciò $s(b, a, a)$ comporta

$$bb = b .$$

Dalla $s(a, b, b)$ segue allora $c = d$, il che è assurdo.

7) In G^0 risulti

$$aa = c , \qquad ab = d .$$

Allora $s(a, a, a)$, $d(a, a, a)$, $s(a, a, b)$, $d(a, a, b)$ implicano

$$ac = ca = cc , \qquad ad = cd , \qquad cb = dd ,$$

quindi $d(a, a, c)$, $d(b, b, b)$, $d(a, a, d)$ comportano

$$ac \neq a , \qquad bb \neq a , \qquad ad \neq a .$$

Distinguiamo i tre sottocasi $ac = b, c, d$.

7_1) Sia inoltre

$$ac = b .$$

Allora $d(a, a, c)$, $s(a, a, c)$ implicano risp.

$$bb = b , \qquad cb = d ,$$

donde $dd = d$; quindi $d(c, c, b)$ comporta $b = d$, il che è assurdo.

7_2) Sia inoltre

$$ac = c .$$

Allora $d(c, c, b)$ e l'eguaglianza $a(cb) = (ac)(ab) = c(ab) = (ca)(cb) = c(cb)$ (conseguenza delle $s(a, c, b)$, $s(c, a, b)$) implicano risp.

$$cb \neq a , \qquad cb \neq b .$$

Distinguiamo i due sottocasi $cb = c, d$.

$7_{2,1}$) Sia inoltre

$$cb = c .$$

Allora $s(c, a, b)$, $s(a, b, b)$ implicano risp. (si ricordi che $dd = cb$):

$$cd = c\,, \quad ad = c\,; \quad bb \neq b\,,$$

e quindi $d(a, c, b)$, la (13), $d(b, a, a)$, $s(b, c, c)$ comportano successivam.

$$dc = c\,, \quad ba = b\,, \quad bc = b\,, \quad bb = b\,,$$

donde l'assurdo ($b \neq b$).

$7_{2,2}$) Sia inoltre

$$cb = d\,.$$

Allora $s(d, c, c)$ e l'eguaglianza $(cb)c = (cb)(ca) = c(ba) = (ca)(ba) = (cb)a$ (conseguenza delle $s(c, b, a)$, $d(c, b, a)$) implicano risp.

$$dc \neq a\,, \quad dc = da\,.$$

Distinguiamo perciò i tre sottocasi $da = b, c, d$.

$7_{2,2,1}$) Sia inoltre

$$da = b\,.$$

Allora la $(14)_1$ implica successivam. (si ricordi che $cd = ad$):

$$ba = d\,, \quad cd = b\,, \quad ad = b\,,$$

quindi la (13) comporta $ad \neq b$, donde l'assurdo.

$7_{2,2,2}$) Sia inoltre

$$da = c\,.$$

Allora le $(14)_1$, (13) implicano risp.

$$ba \neq b\,; \quad ba = d\,, \quad ad \neq c\,,$$

quindi la $(14)_1$ comporta (si ricordi che $cd = ad$):

$$cd = c\,, \quad ad = c\,,$$

donde l'assurdo ($c \neq c$).

$7_{2.2.3}$) Sia inoltre

$$da = d .$$

Allora le $(14)_1$, (13) implicano risp.

$$ba \neq a , \quad ba \neq c ; \quad ba = d , \quad ad \neq d ,$$

quindi la $(14)_1$ comporta (si ricordi che $cd = ad$):

$$cd = d , \quad ad = d ,$$

donde l'assurdo ($d \neq d$).

7_3) Sia inoltre

$$ac = d .$$

Allora $d(a, a, c)$ comporta (si ricordi che $cc = ac$, $dd = cb$):

$$dd = d , \quad cb = d ,$$

quindi $s(c, a, b)$, $d(c, c, c)$ e la (13) implicano successivam. (ricordando che $cd = ad$, $ca = ac$):

$$ad = d , \quad dc = d , \quad ba = a ,$$

e perciò dalla $d(b, a, a)$ segue $c = d$, il che è assurdo.

8. - Pensiamo ripartite le ventiquattro condizioni di autodistributività dell'insieme $\{a, b, c, d\}$ relative alle terne del tipo $[a, b, a]$ (n.º 3) nelle seguenti otto classi (si ricordino le notazioni (16), n.º 7):

$$\begin{aligned}
K_1 &= \{s(a, b, a),\ s(a, c, a),\ s(a, d, a)\} ,\\
K_1' &= \{d(a, b, a),\ d(a, c, a),\ d(a, d, a)\} ,\\
K_2 &= \{s(b, a, b),\ s(b, c, b),\ s(b, d, b)\} ,\\
K_2' &= \{d(b, a, b),\ d(b, c, b),\ d(b, d, b)\} ,\\
K_3 &= \{s(c, a, c),\ s(c, b, c),\ s(c, d, c)\} ,\\
K_3' &= \{d(c, a, c),\ d(c, b, c),\ d(c, d, c)\} ,\\
K_4 &= \{s(d, a, d),\ s(d, b, d),\ s(d, c, d)\} ,\\
K_4' &= \{d(d, a, d),\ d(d, b, d),\ d(d, c, d)\} .
\end{aligned}$$

XX) *Se in un gruppoide di sostegno* $\{a, b, c, d\}$ *sono s-autodistributive e d-autodistributive tutte le terne non appartenenti al tipo* $[a, b, a]$ (n.° 3) *e se, inoltre, vi sono soddisfatte le tre condizioni della classe* K_i' *(risp.* K_i*), allora vi sono pure soddisfatte le tre condizioni della classe* K_i *(risp.* K_i'*).* $(i = 1, 2, 3, 4.)$

Infatti, ciò segue facilmente dalla XIX) (n.° 7), considerando opportune immagini isomorfe (risp. il gruppoide opposto) del gruppoide in questione, e ricordando la II) del n.° 1.

XXI) *La terna* (a, b, a) *è s-isolata* (n.° 1) *in un gruppoide non commutativo, di sostegno* $\{a, b, c, d\}$, *nel quale la terna* (a, c, a) *è d-isolata* (n.° 1).

Infatti (cfr. [1], p. 8, ult. capov.), un tale gruppoide è ad es. quello così definito: $ac = b$, $ba = c$, ogni altro prodotto è $= d$.

XXII) *Fissate comunque due condizioni di autodistributività dell'insieme* $\{a, b, c, d\}$ *appartenenti una alla classe* K_i *e l'altra alla classe* K_i', *esiste un gruppoide non commutativo di sostegno* $\{a, b, c, d\}$ *nel quale le due condizioni fissate non sono soddisfatte, mentre tutte le rimanenti condizioni di autodistributività di* $\{a, b, c, d\}$ *vi sono invece soddisfatte.* $(i = 1, 2, 3, 4.)$

Infatti, se le due condizioni fissate sono $s(a, b, a)$, $d(a, b, a)$, un tale gruppoide è fornito dalle VI), I) (n.i 3, 1); se invece esse sono $s(a, b, a)$, $d(a, c, a)$, un tale gruppoide è fornito dalla XXI). È allora chiaro come da questi due gruppoidi, mediante opportuni isomorfismi, si possano dedurre successivamente tutti gli ulteriori gruppoidi la cui esistenza è affermata dalla XXII).

XXIII) *Fissata comunque una condizione di autodistributività dell'insieme* $\{a, b, c, d\}$ *relativa ad una terna non appartenente al tipo* $[a, b, a]$ (n.° 3), *esiste un gruppoide non commutativo di sostegno* $\{a, b, c, d\}$ *nel quale la condizione fissata non è soddisfatta, mentre tutte le rimanenti condizioni di autodistributività di* $\{a, b, c, d\}$ *vi sono invece soddisfatte.*

Infatti, se $(x, y, z) \notin [a, b, a]$, (x, y, z) è appunto s-isolata in un gruppoide d-autodistributivo e non commutativo di sostegno $\{a, b, c, d\}$, ciò risultando facilmente (cfr. [1], n.° 7) dalla V) (n.º 3), dalla XVI) (n.º 6) e dalla I) (n.º 1). Ne segue allora subito (cfr. [1], p. 28, 3º capov.), per la II) del n.º 1, che (x, y, z) è appunto d-isolata in un gruppoide s-autodistributivo e non commutativo di sostegno $\{a, b, c, d\}$.

TEOREMA 4: *Se* $G = \{a, b, c, d\}$ *è un insieme avente numero cardinale* $\nu = 4$, *ed* A_3 *è l'insieme delle* $2\nu^3$ *condizioni di autodistributività* (1) *e* (2) *di* G, *tutti i sottinsiemi* A_3' *di* A_3 *che sono indipendenti ed equivalenti ad* A_3 (n.º 1) *si ottengono nel modo seguente: Si scelga in ciascuna delle quattro classi* (si veda l'inizio di questo n.º):

$$K_i \cup K_i' \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{17}$$

una qualsiasi delle sue due sottoclassi K_i, K_i'. *Le* (dodici) *condizioni di autodistributività costituenti le quattro sottoclassi così scelte e le condizioni di autodistributività* ((1) *e* (2)) *di* G *relative a tutte le terne non appartenenti al tipo* $[a, b, a]$ (n.º 3) *formano appunto, complessivamente, un sottinsieme* A_3' (*di* A_3) *indipendente ed equivalente ad* A_3.

Dimostrazione: Per agevolare la successiva esposizione, denotiamo (nello stesso ordine in cui sono state scritte all'inizio di questo n.º) con

$$s_{i1}, \quad s_{i2}, \quad s_{i3}$$

le tre condizioni (di autodistributività di G) costituenti la classe K_i, e con

$$d_{i1}, \quad d_{i2}, \quad d_{i3}$$

le tre condizioni costituenti la classe K_i'; $(i = 1, 2, 3, 4)$.

Supponiamo dunque che A_3' sia un sottinsieme (di A_3) indipendente ed equivalente ad A_3. Allora A_3', essendo equivalente ad A_3, deve contenere (per la XXIII)) l'insieme delle condizioni di autodistributività di G relative a tutte le terne non appartenenti al tipo $[a, b, a]$, e deve inoltre contenere (per la XXII)) *almeno una* delle due condizioni di ciascuna delle tre classi:

$$\{s_{i1}, d_{i1}\}, \quad \{s_{i2}, d_{i2}\}, \quad \{s_{i3}, d_{i3}\}; \tag{18}$$

$(i = 1, 2, 3, 4)$. Dimostriamo che deve contenerne *una sola*.

Infatti (per assurdo), supponiamo che A_3' contenga, ad es., sia s_{i1} che d_{i1}. Se A_3' contenesse allora sia s_{i2} che d_{i2} (risp. sia s_{i3} che d_{i3}), dovendo A_3' contenere o s_{i3} o d_{i3} (risp. o s_{i2} o d_{i2}), A_3' non sarebbe indipendente (per la XX)). Dunque A_3' contiene (una ed) una sola condizione di ciascuna delle due classi $\{s_{i2}, d_{i2}\}$, $\{s_{i3}, d_{i3}\}$. Se A_3' contenesse sia s_{i2} che s_{i3} (o sia d_{i2} che d_{i3}), A_3' non sarebbe indipendente (per la XX)). Dunque A_3' contiene, ad es., sia s_{i2} che d_{i3} ma non d_{i2} né s_{i3}. Ma ciò è appunto assurdo, poichè A_3', in quanto equivalente ad A_3, deve contenere (per la XXII)) una almeno delle due condizioni d_{i2}, s_{i3}. Analogamente si vede che è assurdo supporre che A_3' contenga la seconda, o la terza, delle classi (18).

Inoltre è impossibile (per la XXII), essendo A_3' equivalente ad A_3) che A_3' non contenga una delle tre condizioni della classe K_i e contemporaneamente non contenga una delle tre condizioni della classe K_i'. Dunque le tre uniche condizioni che A_3' contiene fra le sei della classe $K_i \cup K_i'$ sono appunto o quelle costituenti la sottoclasse K_i, oppure quelle costituenti la sottoclasse K_i'; $(i = 1, 2, 3, 4)$.

Viceversa, è chiaro che ogni sottinsieme di A_3 ottenuto nel modo descritto nel teor. 4 è appunto indipendente (per le XXII), XXIII)) ed equivalente ad A_3 (per la XX)). E la dimostrazione del teor. 4 è perciò completata.

Si osservi che dalle XX), XXII) e XXIII) si ottiene pure (col medesimo ragionamento ora concluso) la dimostrazione della seconda parte $(i = 3)$ della III) nel n.° 2, per $r = 4$.

9. - Continuando lo studio dell'insieme A_3 (n.° 1), consideriamo adesso il caso $r = 3$.

XXIV) *Non esiste alcun gruppoide di sostegno* $G = \{a, b, c\}$ *nel quale tutte le terne* (di elementi di G) *non appartenenti al tipo* $[a, b, a]$ (n.° 3) *siano s-autodistributive e d-autodistributive* (cioè nel quale valga la (12) del n.° 7), *e nel quale contemporaneamente risulti*:

$$a(ba) \neq (ab)(aa)\,, \tag{13}$$

$$(ab)a = (aa)(ba) . \tag{14$_1$}$$

Infatti, supponiamo che G^0 sia un gruppoide di sostegno $G = \{a, b, c\}$ nel quale valgano le (12), (13), $(14)_1$, e dimostriamo, in ciascuno dei primi sei fra i casi (15) (n.° 7), l'assurdità di questa ipotesi, (i residui tre casi possibili, con $aa = a$, si rivelano assurdi a priori: cfr. n.° 7, 4° capov.).

Nei primi quattro fra i sei casi in esame, l'assurdo si trova con gli stessi ragionamenti del n.° 7 (v. 1), ..., 4)).

5) In G^0 risulti

$$aa = c, \quad ab = b .$$

Allora si trova (v. n.° 7, 5)):

$$ac = cc , \quad bb = b , \quad a(ba) \neq (ba)(ba) ,$$

e quest'ultima diseguaglianza (in ciascuno dei tre casi $ba = a, b, c$) si rivela assurda.

6) In G^0 risulti

$$aa = c , \quad ab = c .$$

Allora si trova (v. n.° 7, 6)):

$$ac = cc , \quad cc \neq a , \quad ba \neq c ,$$

e quindi le (13), $s(a, b, b)$ implicano successivam.

$$cc = b , \quad bb = c .$$

Perciò $d(a, a, c)$ comporta $b = c$, il che è assurdo. E la dimostrazione della XXIV) è completata.

XXV) *Non esiste alcun gruppoide di sostegno* $G = \{a, b, c\}$ *nel quale tutte le terne* (di elementi di G) *appartenenti ai due tipi* $[a, a, b]$, $[b, a, a]$ (n.° 3) *siano s-autodistributive e d-autodistributive.*

cioè nel quale si abbia:

$$(19) \qquad (x, y, z) \in [a, a, b] \cup [b, a, a] \rightarrow \\ \rightarrow x(yz) = (xy)(xz)\,, \qquad (xy)z = (xz)(yz)\,,$$

e nel quale contemporaneamente risulti:

$$(20) \qquad a(aa) \neq (aa)(aa)\,.$$

Infatti, supponiamo che G^0 sia un gruppoide di sostegno $G = \{a, b, c\}$ nel quale valgano le (19), (20) ed in cui sia

$$aa = b\,,$$

e dimostriamo (distinguendo i tre casi $ab = a, b, c$) l'assurdità di questa ipotesi. Ne seguirà appunto immediatamente anche la non esistenza di un gruppoide di sostegno $G = \{a, b, c\}$ in cui valgano le (19), (20) ed in cui sia $aa = c$ (se un tal gruppoide esistesse, nella sua immagine isomorfa mediante la corrispondenza $a \rightarrow a$, $b \rightarrow c$, $c \rightarrow b$ varrebbero le (19), (20) e sarebbe $aa = b$), la residua eventualità $aa = a$ restando a priori esclusa dalla (20). Usiamo le notazioni (16) (n.° 7).

1) In G^0 sia inoltre

$$ab = a\,.$$

Allora le (20), $s(a, a, c)$ implicano successivam.

$$bb \neq a\,, \qquad ac \neq b\,,$$

donde $a(bb) \neq (ab)(ab)$, il che (per la $s(a, b, b)$) è assurdo.

2) In G^0 sia inoltre

$$ab = b\,.$$

Allora le (20), $s(a, a, b)$ implicano risp. $bb \neq b$, $bb = b$, il che è assurdo.

3) In G^0 sia inoltre

$$ab = c\,.$$

Allora le (20), $s(a, b, b)$ implicano successivam.

$$bb \neq c\,, \qquad cc \neq a\,,$$

quindi $s(a, c, c)$, $s(a, b, b)$ comportano successivam.

$$cc = c\,, \qquad bb = b\,.$$

Perciò $d(a, a, b)$ implica $b = c$, il che è assurdo. E la XXV) è dimostrata.

10. - Pensiamo ripartite le dodici condizioni di autodistributività dell'insieme $G = \{a, b, c\}$ relative alle terne del tipo $[a, b, a]$ (n.° 3) nelle seguenti sei classi (si ricordino le notazioni (16), n.° 7):

$$\{s(x, y, x),\ d(x, y, x)\} \qquad (x \neq y;\ x, y \in G). \tag{21}$$

XXVI) *Se in un gruppoide di sostegno* $\{a, b, c\}$ *sono s-autodistributive e d-autodistributive tutte le terne non appartenenti al tipo* $[a, b, a]$ (n.° 3) *e se, inoltre, vi è soddisfatta una delle due condizioni di una delle classi* (21), *allora vi è soddisfatta anche l'altra.*

Infatti, ciò segue facilmente dalla XXIV) del n.° preced. considerando opportune immagini isomorfe, o il gruppoide opposto, del gruppoide in questione, e ricordando la II) del n.° 1.

XXVII) *Se in un gruppoide di sostegno* $\{a, b, c\}$ *sono s-autodistributive e d-autodistributive tutte le terne appartenenti ai due tipi* $[a, a, b]$, $[b, a, a]$ (n.° 3), *allora vi sono s-autodistributive e d-autodistributive anche le tre terne del tipo* $[a, a, a]$.

Infatti, ciò segue facilmente dalla XXV) del n.° preced. (cfr. dimostraz. della XXVI)), ricordando la II) del n.° 1.

XXVIII) *Fissata comunque una delle sei classi* (21), *esiste un gruppoide non commutativo di sostegno* $\{a, b, c\}$ *nel quale le due condizioni della classe fissata non sono soddisfatte, mentre tutte le rimanenti condizioni di autodistributività dell'insieme* $\{a, b, c\}$ *vi sono invece soddisfatte.*

Infatti, un tale gruppoide è un'immagine isomorfa di quello definito dalla tabella (8) (n.º 3).

XXIX) *Fissata comunque una condizione di autodistributività dell'insieme* $\{a, b, c\}$ *relativa ad una terna appartenente ad uno dei tre tipi* $[a, a, b]$, $[b, a, a]$, $[a, b, c]$ (n.º 3), *esiste un gruppoide non commutativo di sostegno* $\{a, b, c\}$ *nel quale la condizione fissata non è soddisfatta, mentre tutte le rimanenti condizioni di autodistributività di* $\{a, b, c\}$ *vi sono invece soddisfatte.*

Infatti, ciò segue subito (cfr. [1], p. 4, ult. capov., e p. 28, 3º capov.) dalla V) del n.º 3 e dalla II) del n.º 1.

Teorema 5: *Se* $G = \{a, b, c\}$ *è un insieme avente numero cardinale* $\nu = 3$, *ed* A_3 *è l'insieme delle* $2\nu^3$ *condizioni di autodistributività* (1) *e* (2) *di* G, *tutti i sottinsiemi* A'_3 *di* A_3 *che sono indipendenti ed equivalenti ad* A_3 (n.º 1) *si ottengono nel modo seguente: Si scelga in ciascuna delle sei classi* (21) *una qualsiasi delle due condizioni di autodistributività che la costituiscono. Le sei condizioni così scelte e le condizioni di autodistributività* ((1) e (2)) *di* G *relative a tutte le terne non appartenenti al tipo* $[a, a, a]$ *nè al tipo* $[a, b, a]$ (n.º 3) *costituiscono appunto, complessivamente, un sottinsieme* A'_3 *(di* A_3*) indipendente ed equivalente ad* A_3.

Dimostrazione: Si ottiene ormai facilmente, in virtù delle quattro proposizioni XXVI), ..., XXIX). Anzi, da queste stesse proposizioni (con identico ragionamento) si ottiene anche la dimostrazione della seconda parte ($i = 3$) della III) del n.º 2, per $\nu = 3$.

Lo studio dell'insieme A_3 (n.º 1) viene infine completato dal seguente

Teorema 6: *Se* $G = \{a, b\}$ *è un insieme avente numero cardinale* $\nu = 2$, *ed* $A_3 = A_1 \cup A_2$ (n.º 1) *è l'insieme delle* $2\nu^3$ *condizioni* *di autodistributività* (1) *e* (2) *di G, tutti i sottinsiemi* A_3' *di* A_3 *che sono indipendenti ed equivalenti ad* A_3 (n.º 1) *si ottengono nel modo seguente: Si scelgano uno qualsiasi,* A_1', *dei sottinsiemi di* A_1 *che sono indipendenti ed equivalenti ad* A_1 (teor. 2, n.º 5) *ed uno qualsiasi,* A_2', *dei sottinsiemi di* A_2 *che sono indipendenti ed equivalenti ad* A_2 (teor. 2', n.º 5). *La loro riunione,* $A_1' \cup A_2'$, *è appunto un sottinsieme* A_3' *(di* A_3*) indipendente ed equivalente ad* A_3.

Dimostrazione: Un sottinsieme A_3' (di A_3) indipendente ed equivalente ad A_3 deve contenere (per le XIV), XIV') del n.º 4, in quanto equivalente ad A_3) un A_1' ed un A_2', e quindi deve appunto coincidere (in quanto indipendente) con il sottinsieme $A_1' \cup A_2'$ (che, per i teoremi 2 e 2', è equivalente ad A_3). Il viceversa è chiaro (per le XIV), XIV') e per i teor. 2, 2').

Questo stesso ragionamento dimostra anche la residua parte della III) del n.º 2 ($i = 3$, $\nu = 2$).

BIBLIOGRAFIA

[1] BOCCIONI, D.: *Indipendenza delle condizioni di distributività,* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 28 (1958), pp. 1-30.

[2] BOCCIONI, D.: *Condizioni di distributività con almeno una operazione commutativa,* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 31 (1961).

[3] FRINK, O.: *Symmetric and self-distributive systems,* Amer. Math. Monthly, vol. 62 (1955), pp. 697-707.

[4] STEIN, S. K.: *Left distributive quasi-groups,* Proc. Amer. Math. Soc., vol. 10 (1959), pp. 577-578.