MARIA PIA COLAUTTI

Teoremi di completezza in spazi hilbertiani connessi con l'equazione di Laplace in due variabili

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 31 (1961), p. 114-164
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1961__31__114_0>

TEOREMI DI COMPLETEZZA IN SPAZI HILBERTIANI CONNESSI CON L'EQUAZIONE DI LAPLACE IN DUE VARIABILI

Memoria (*) *di* MARIA PIA COLAUTTI (*a Trieste*)

INTRODUZIONE

Nello studio dei problemi al contorno per le equazioni alle derivate parziali, si fa sovente uso di opportuni spazi funzionali nei quali si ricerca l'incognita. Per quanto riguarda il problema di Dirichlet per la classica equazione di Laplace, le varie possibilità di connettere allo studio di esso particolari spazi hilbertiani di funzioni, sono state indicate dal Prof. G. Cimmino nella conferenza da Lui tenuta al Convegno sulle Equazioni alle Derivate Parziali di Trieste (**). Siffatta connessione si rende indispensabile nei procedimenti di tipo hilbertiano del calcolo della soluzione, volendo ben precisare in che senso debba intendersi che una certa combinazione approssimante converge verso la soluzione del problema.

Supponiamo che A sia un campo (insieme aperto) piano, limitato, avente frontiera composta da curve semplici e chiuse composte di archi regolari, e sia $\varphi(s)$ una funzione reale dell'arco s, continua sulla frontiera C di A. Si voglia calcolare la funzione u, armonica in A, che su C coincide con la φ, approssimando la u mediante una successione $\{u_m\}$ di funzioni armoniche, unifor-

---

(*) Pervenuta in redazione il 13 gennaio 1961.

(**) Cfr. [5] pag. 76. I numeri fra parentesi quadra si riferiscono alla Bibliografia alla fine del presente lavoro.

memente convergente. Fissato un particolare sistema di funzioni armoniche $\{\omega_k\}$, si cercherà di costruire la u_m al modo seguente: $u_m = \sum_{k=0}^{m} c_k^{(m)}\omega_k$, essendo le $c_k^{(m)}$ costanti calcolabili mediante la φ. Quale sistema $\{\omega_k\}$ è spontaneo scegliere quello costituito da tutti i polinomi armonici omogenei dei vari gradi se C è un continuo, oppure, nel caso generale, quello costituito da siffatti polinomi e da opportune funzioni armoniche razionali e logaritmiche, come verrà indicato nel seguito.

Le costanti $c_k^{(m)}$ possono calcolarsi con diversi procedimenti. Si può, ad esempio, pervenire alla determinazione di esse, imponendo la condizione:

$$\int_C \left| \varphi - \sum_{k=0}^{m} c_k^{(m)}\omega_k \right|^2 ds = \min .$$

Si ottiene allora una successione $\{u_m\}$ la quale converge uniformemente in ogni componente chiuso di A, come può facilmente dimostrarsi. Il limite della u_m è la soluzione del problema se il sistema $\{\omega_k\}$ è completo nello spazio di Hilbert $\mathfrak{S}_0$ costituito dalle funzioni reali dell'arco s, di quadrato sommabile su C, con la seguente definizione di prodotto scalare:

$$(f, g)_0 = \int_C fg ds .$$

Se la φ è funzione di s assolutamente continua e la sua derivata rispetto ad s è di quadrato sommabile su C, le $c_k^{(m)}$ possono anche venir calcolate imponendo la condizione:

$$\int_C \left\{ \left| \varphi - \sum_{k=0}^{m} c_k^{(m)}\omega_k \right|^2 + \left| \frac{d\varphi}{ds} - \sum_{k=1}^{m} c_k^{(m)} \frac{\partial \omega_k}{\partial s} \right|^2 \right\} ds = \min .$$

In tal caso occorre dimostrare la completezza del sistema $\{\omega_k\}$ nello spazio $\mathfrak{S}_1$ delle funzioni quali la φ, reso hilbertiano col seguente prodotto scalare:

$$(f, g)_1 = \int_C \left(fg + \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial g}{\partial s}\right) ds \, .$$

Si osservi che, una volta conseguita tale completezza, si ha il vantaggio, rispetto al metodo precedente, di avere una successione $\{u_m\}$ la quale converge uniformemente in *tutto* $A + C$, come può assai facilmente provarsi.

Si introduca ora lo spazio $\mathfrak{S}$ costituito dalle funzioni u, armoniche in A, tali che $|\operatorname{grad} u|^2$ sia sommabile in A e tali che $u(z_0) = 0$, con z_0 fissato in A, reso hilbertiano col prodotto scalare:

$$(u, v) = \iint_A \operatorname{grad} u \times \operatorname{grad} v \, dxdy \, .$$

Sia $\omega_0 \equiv \text{cost}$. Se la u, soluzione del problema, ha le derivate prime di quadrato sommabile in A, le $c_k^{(m)}$, con $k > 0$, possono determinarsi imponendo la condizione:

$$\iint_A \left| \operatorname{grad} u - \sum_{k=1}^{m} c_k^{(m)} \operatorname{grad} \omega_k \right|^2 dxdy = \min, \; (*)$$

che equivale alla risoluzione del sistema lineare:

$$\sum_{k=1}^{m} c_k^{(m)} \int_C \omega_h \frac{\partial \omega_k}{\partial n} ds = \int_C \varphi \frac{\partial \omega_h}{\partial n} ds \quad (h = 1, 2, \ldots, m)$$

(n normale interna al campo).

La $c_0^{(m)}$ è data da:

$$c_0^{(m)} = \frac{1}{\text{lungh}\, C} \int_C [\varphi - \sum_{k=1}^{m} c_k^{(m)} \omega_k] ds \, .$$

(*) Cfr. [3], [15] e [25].

La successione $\{u_m\}$ converge uniformemente in ogni componente chiuso di A verso la soluzione del problema, se il sistema $\{\omega_k(z) - \omega_k(z_0)\}$ è completo nello spazio $\mathfrak{S}$.

Un ulteriore metodo di calcolo per le $c_k^{(m)}$ è dovuto al Prof. M. Picone, nella ipotesi che alla soluzione del problema possa applicarsi la formula di Green:

$$(*) \quad -\int_C \frac{\partial u}{\partial n} v ds + \iint_A u \Delta_2 v dx dy = -\int_C \varphi \frac{\partial v}{\partial n} ds ,$$

essendo v un'arbitraria funzione di classe due in $A + C$.

Sia $\mathfrak{A}_0$ lo spazio delle funzioni armoniche in A e ivi di quadrato sommabile, essendo il prodotto scalare di due di esse dato da: $\iint_A uv dx dy$. Sia $\mathfrak{M}^{(0)}$ lo spazio di Hilbert somma diretta di $\mathfrak{S}_0$ e $\mathfrak{A}_0$. Supposto che $\frac{\partial u}{\partial n} \in \mathfrak{S}_0$ e $u \in \mathfrak{A}_0$, se $\{\Omega_k\}$ è un sistema di soluzioni particolari dell'equazione biarmonica $\Delta_2 \Delta_2 \Omega_k = 0$, scritta la $(*)$ assumendo $v = \Omega_k$, si ottiene un sistema di Fischer-Riesz relativo al vettore incognito $\left[\frac{\partial u}{\partial n}, u\right]$ di $\mathfrak{M}^{(0)}$ rispetto al sistema di vettori $\{[\Omega_k, \Delta_2 \Omega_k]\}$. Si possono allora calcolare, risolvendo sistemi di equazioni lineari algebriche, i vettori approssimanti $\left[\frac{\partial u_m}{\partial n}, u_m\right]$ con:

$$u_m = \sum_{k=0}^{m} c_k^{(m)} \Delta_2 \Omega_k , \qquad \frac{\partial u_m}{\partial n} = -\sum_{k=0}^{m} c_k^{(m)} \Omega_k .$$

$\{ u_m \}$ converge in media in A e quindi uniformemente nell'interno di A e $\left\{\frac{\partial u_m}{\partial n}\right\}$ converge in media su C. I limiti di tali successioni saranno effettivamente u e $\frac{\partial u}{\partial n}$ se il sistema $\{[\Omega_k, \Delta_2 \Omega_k]\}$ è completo in $\mathfrak{M}^{(0)}$. Tale ultimo metodo di calcolo è particolarmente interessante perchè consente il calcolo di $\frac{\partial u}{\partial n}$ su C, al quale, peraltro, provvedeva anche il secondo dei metodi precedentemente considerati (*). In tal caso, come sistema delle Ω_k possono scegliersi i polinomi biarmonici omogenei se C è un continuo o, quelle indicate nel § 10, nel caso generale (**).

Il presente lavoro è dedicato alla dimostrazione della completezza dei sistemi di vettori dedotti dalle successioni di funzioni armoniche $\{\omega_k\}$ o biarmoniche $\{\Omega_k\}$ in vari spazi hilbertiani: $\mathfrak{S}_0$, $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{M}^{(0)}$.

Allo scopo di includere nella nostra trattazione i campi A che d'ordinario si presentano nelle applicazioni, abbiamo voluto condurre la nostra indagine considerando il caso che la frontiera presenti punti angolosi (non cuspidali), impiegando, a tal fine, alcuni dei procedimenti introdotti e dei risultati ottenuti in un precedente lavoro (***). Abbiamo anche considerato alcuni teoremi di completezza relativi alla successione costituita da tutti i monomi nelle due variabili x e y. Tali teoremi assicurano la convergenza delle successioni approssimanti la soluzione del problema di Dirichlet per l'equazione non omogenea $\Delta_2 u = f$, quando si usino procedimenti di calcolo che estendono ovviamente alcuni di quelli testè descritti.

(*) Cfr. la (29) di pag. 177 della Memoria [18].

(**) Nell'applicare il metodo del Prof. Picone, si sarebbe potuto prendere come sistema $\{\Omega_k\}$ un sistema di funzioni non necessariamente biarmoniche (ad es. quello costituito da tutti i monomi). In tal caso però non si sarebbe potuta affermare la convergenza uniforme della successione $\{u_m\}$ nell'interno di A, epperò, sarebbe venuta meno la possibilità del calcolo delle derivate di u nei punti interni ad A.

(***) Cfr. [7].

1. *Ipotesi sul campo A.*

Nel corso del presente lavoro considereremo un campo (insieme aperto) A del piano, sul quale faremo la seguente ipotesi:

A) ***La frontiera C di A è costituita da $p+1$ curve C_0, $C_1, \ldots, C_p$, semplici e chiuse, composte di archi di classe $C^{(1,1)}$*** [1]***, tali che i domini $D(C_h)$ e $D(C_k)$*** [2] ***$(h, k = 1, 2, \ldots, p;\ h \neq k)$ non abbiano alcun punto in comune ed inoltre tali che le curve C_1, $C_2, \ldots, C_p$ siano contenute nel campo limitato avente C_0 come completa frontiera.***

Diremo che un campo A è *propriamente regolare* di classe $C_H^{(1)}$ [3]) se, oltre a verificare l'ipotesi A), esso verifica le seguenti condizioni:

a) Sia ζ un punto regolare di C e si assuma l'asse tangente a C in ζ come asse ξ e l'asse normale a C in ζ, orientato verso l'interno del campo A, come asse η. Esistono allora un intervallo I dell'asse ξ ed un arco L di C, avente ζ come punto interno, tale che L ammette la rappresentazione ordinaria $\eta = \eta(\xi)$, $\xi \in I$, con $\eta(\xi)$ di classe $C^{(1,1)}$ in I.

Esiste inoltre un numero positivo δ tale che tutti i punti del piano verificanti le condizioni:

$$\eta(\xi) < \eta \leqslant \eta(\xi) + \delta\,, \qquad \xi \in I\,,$$

sono contenuti in A, e quelli verificanti le condizioni:

$$\eta(\xi) - \delta \leqslant \eta \leqslant \eta(\xi)\,, \qquad \xi \in I\,,$$

sono contenuti nel complementare di A.

---

[1]) Per le definizioni usate in questi primi paragrafi rimandiamo a [7], pagg. 1-3.

[2]) Con il simbolo $D(C_h)$ indichiamo il dominio (campo più la sua frontiera) limitato avente come completa frontiera la curva C_h.

[3]) Cfr. [12], pag. 34.

[4]) Conveniamo di assumere come verso positivo su C_0 quello antiorario e come verso positivo su C_h $(h = 1, 2, \ldots, p)$, quello orario.

b) Esiste un versore $\mu(\zeta)$, di origine ζ, funzione del punto ζ variabile su C_h ($h = 0, 1, \ldots, p$), il quale dipende in modo continuo da ζ, è sempre penetrante in A ed è tale che, detta σ la misura (compresa fra 0 e π) dell'angolo che $\mu(\zeta)$ forma con il versore $\nu(\zeta)$ dell'asse normale a C (interno ad A), in ogni punto ζ regolare di C, sia sempre: $0 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_0 < \pi/2$.

c) Esiste una decomposizione di C_h ($h = 0, 1, \ldots, p$) in archi di classe $C^{(1,l)}: \Gamma_1^{(h)}, \Gamma_2^{(h)}, \ldots, \Gamma_{q_h}^{(h)}$ tali che, indicati con $T_k^{(h)}$ i rispettivi intervalli base, le componenti del versore $\mu(\zeta)$, come funzioni del punto t di $T_k^{(h)}$, sono di classe $C^{(1,l)}$ in $T_k^{(h)}$.

d) Esiste un numero positivo ϱ_0 tale che, per ogni fissato ϱ per il quale riesce: $0 < \varrho \leqslant \varrho_0$, l'insieme descritto dal punto $z = \zeta + \varrho\mu(\zeta)$, al variare di ζ su C, è contenuto in A ed i suoi punti sono in corrispondenza biunivoca con quelli di C.

Sussiste il seguente lemma:

Condizione necessaria e sufficiente perchè il campo (piano) A sia propriamente regolare di classe $C_H^{(1)}$ è che sia soddisfatta l'ipotesi A) *e che le curve $C_0, C_1, \ldots, C_p$ siano sprovviste di punti cuspidali* [5]).

Consideriamo la curva C_k ($k = 0, 1, \ldots, p$) e sia z_h un suo punto singolare, estremo comune di due archi $C_k^{(h-1)}$ e $C_k^{(h)}$ che compongono C_k. Diremo che A *presenta in z_h un angolo di ampiezza α_h*, se è uguale ad α_h la misura dell'angolo di cui deve ruotare, nel verso orario, l'asse tangente negativo a $C_k^{(h-1)}$ in z_h per sovrapporsi all'asse tangente positivo a $C_k^{(h)}$ in z_h.

Se $\alpha_h < \pi[\alpha_h > \pi]$, diremo che l'angolo è *sporgente* [*rientrante*] *per il dominio* (singolare) $A + C$.

---

[1]) La dimostrazione di questo lemma (in ipotesi un po' più generali) mi è stata gentilmente comunicata dal prof. Luciano de Vito ed è riportata in Appendice.

2. *Teorema di rappresentazione conforme di un dominio singolare, p volte connesso, in un dominio non singolare.*

Consideriamo il dominio $A + C$ (A verificante l'ipotesi A)) e supponiamo che la sua frontiera C sia dotata di r punti singolari $z_1, z_2, \ldots, z_r$.

Il teorema II, stabilito in [7] (cfr. [7], pag. 10) — anche se il dominio non è più semplicemente connesso — sussiste sostanzialmente immutato. E precisamente:

I. *Esiste una funzione $\zeta = F(z)$ definita in $D = A + C$, la quale, detto Δ il suo codominio, verifica le seguenti condizioni:*

1) *Pone una corrispondenza biunivoca tra D e Δ, essendo Δ un dominio limitato da $p + 1$ curve semplici e chiuse $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_p$ di classe $C^{(1,\lambda)}$.*

2) *È continua in D, olomorfa in A, e se $z_1, z_2, \ldots, z_r$ sono i punti singolari di C, ha derivata prima continua in $D - (z_1 + z_2 + \ldots + z_r)$.*

3) *Esiste un intorno I_h di z_h tale che, scelto un ramo della funzione $(z - z_h)^{\pi/\alpha_h}$ olomorfo in $I_h \cap A$, riesce, in $I_h \cap D$:*

$$F(z) - F(z_h) = (z - z_h)^{\pi/\alpha_h} G_h(z) \quad (h = 1, 2, \ldots, r), \tag{1}$$

essendo $G_h(z)$ una ben determinata funzione olomorfa in $I_h \cap A$, continua in $I_h \cap D$, diversa da zero in z_h, e tale che $(z - z_h)^{\pi/\alpha_h} \cdot \frac{dG_h}{dz}$ sia continua in z_h [6]).

Seguendo il procedimento usato in [7], dapprima si trasforma conformemente il dominio $D(C_0)$ in un dominio non singolare $D(\Gamma_0)$ « regolarizzando » la curva esterna C_0 e conservando i punti singolari che appartengono a $C_1, C_2, \ldots, C_p$. Poi si trasforma successivamente il dominio illimitato avente come completa frontiera la curva C_k in un dominio illimitato avente come

[6]) Per comodità usiamo lo stesso simbolismo usato in [7].

completa frontiera una curva regolare Γ_k ($k = 1, 2, \ldots, p$). A tale scopo basta trasformare dapprima, e in modo ovvio, il dominio illimitato con frontiera singolare C_k in uno limitato e con frontiera singolare C'_k. Questo viene trasformato con il procedimento usato in [7] in un dominio limitato avente frontiera regolare Γ'_k; infine, con una ulteriore trasformazione conforme, questo dominio va trasformato in un dominio illimitato a frontiera regolare Γ_k.

3. *Un teorema di chiusura per un sistema di funzioni razionali in una variabile complessa.*

Sia Δ un dominio del piano complesso ζ limitato da $p + 1$ curve semplici e chiuse $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_p$ a due a due disgiunte e di classe $C^{(1,\lambda)}$. Siano $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_r$ r punti fra loro distinti fissati sulla frontiera $\Gamma = \bigcup_{i=0}^{p} \Gamma_i$ di Δ e $\zeta_1^*, \zeta_2^*, \ldots, \zeta_p^*$ p punti interni, rispettivamente a $D(\Gamma_1) - \Gamma_1$, $D(\Gamma_2) - \Gamma_2, \ldots, D(\Gamma_p) - \Gamma_p$. Sussiste il teorema:

II. *Sia $\mu(\zeta)$ una funzione appartenente a $\mathfrak{L}^{(1)}(\Gamma)$, tale che la sua parte immaginaria sia costante su ogni curva Γ_k di Γ ($k = 0, 1, \ldots, p$); se riesce:*

$$(2)\qquad \int_{+\Gamma} \mu(\zeta)(\zeta - \zeta_1)(\zeta - \zeta_2) \ldots (\zeta - \zeta_r)\zeta^k d\zeta = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$(3)\qquad \int_{+\Gamma} \mu(\zeta) \frac{(\zeta - \zeta_1)(\zeta - \zeta_2) \ldots (\zeta - \zeta_r)}{(\zeta - \zeta_n^*)^{k+1}} d\zeta = 0$$

$$(n = 1, 2, \ldots, p;\ k = 0, 1, 2, \ldots),$$

allora μ è una costante su Γ.

Ripetendo, salvo modifiche del tutto ovvie, la prima parte della dimostrazione del teorema IV di [7] (pagg. 12-14), dalle (2) e (3) si trae:

$$\sum_{k=1}^{r} \frac{a_k + ib_k}{w - \zeta_k} + \int_{+\Gamma} \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - w} d\zeta = 0\,,$$

per ogni w fissato nel complementare di Δ e con a_h e b_h ben determinate costanti reali.

Indichiamo con ν_ζ la normale a Γ in ζ, orientata verso l'interno del campo $\Delta - \Gamma$ e poniamo, per $\zeta \in \Gamma_n$: $\mu(\zeta) = \mu_0(\zeta) + ic_n$, con $\mu_0(\zeta)$ reale e c_n costanti. Essendo:

$$\int_{+\Gamma} \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - w} d\zeta = \int_{\Gamma} \mu_0(\zeta) \frac{\partial}{\partial \sigma_\zeta} \log |\zeta - w| d_\zeta\sigma -$$

$$- i \int_{\Gamma} \mu_0(\zeta) \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} \log |\zeta - w| d_\zeta\sigma + i \sum_{n=0}^{p} c_n \int_{\Gamma_n} \frac{\partial}{\partial \sigma_\zeta} \log |\zeta - w| d_\zeta\sigma +$$

$$+ \sum_{n=0}^{p} c_n \int_{\Gamma_n} \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} \log |\zeta - w| d_\zeta\sigma = \int_{\Gamma} \mu_0(\zeta) \frac{\partial}{\partial \sigma_\zeta} \log |\zeta - w| d_\zeta\sigma +$$

$$+ \sum_{n=0}^{p} c_n \int_{\Gamma_n} \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} \log |\zeta - w| d_\zeta\sigma - i \int_{\Gamma} \mu_0(\zeta) \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} \log |\zeta - w| d_\zeta\sigma ,$$

dalla relazione precedentemente trovata segue, posto $\zeta_h = \xi_h + i\eta_h$ $(h = 1, 2, \ldots, r)$:

$$\int_{\Gamma} \mu_0(\zeta) \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} \log |\zeta - w| d_\zeta\sigma = \sum_{h=1}^{r} \frac{b_h(u - \xi_h) - a_h(v - \eta_h)}{(u - \xi_h)^2 + (v - \eta_h)^2} ,$$

per ogni $w = u + iv$ esterno a Δ.

La seconda parte della dimostrazione del teorema IV di [7] (pagg. 14-19) — salvo ovvie modifiche — permette di concludere che μ_0 coincide con una costante c su Γ.

Poniamo: $d_s = c + ic_s$ $(s = 0, 1, \ldots, p)$. Dalle (3) scritte per $k = 0$, fissato l'intero n tra 1 e p, si deduce:

$$d_0 \int_{+\Gamma_0} \frac{(\zeta - \zeta_1)(\zeta - \zeta_2) \ldots (\zeta - \zeta_r)}{\zeta - \zeta_n^*} d\zeta =$$

$$= - \sum_{s=1}^{p} d_s \int_{+\Gamma_s} \frac{(\zeta - \zeta_1)(\zeta - \zeta_2) \ldots (\zeta - \zeta_r)}{\zeta - \zeta_n^*} d\zeta =$$

$$= - d_n \int_{+\Gamma_n} \frac{(\zeta - \zeta_1)(\zeta - \zeta_2) \ldots (\zeta - \zeta_r)}{\zeta - \zeta_n^*} d\zeta .$$

Poichè:

$$\int_{+\Gamma_0} \frac{(\zeta-\zeta_1)(\zeta-\zeta_2)\dots(\zeta-\zeta_r)}{\zeta-\zeta_n^*}\,d\zeta =$$

$$= -\int_{+\Gamma_n} \frac{(\zeta-\zeta_1)(\zeta-\zeta_2)\dots(\zeta-\zeta_r)}{\zeta-\zeta_n^*}\,d\zeta \neq 0\,,$$

ne viene $d_0 = d_n$ $(n = 1, 2, \dots, p)$ e quindi la tesi.

4. *Definizioni di due particolari classi di funzioni.*

In [7], a pag. 10, abbiamo introdotto la classe di funzioni $\mathfrak{M}(C)$ nel caso che la curva C fosse frontiera completa del campo A. La sua definizione seguita a valere ovviamente nel caso attuale in cui $C = \bigcup_{i=0}^{p} C_s$. Per comodità del Lettore riportiamo la definizione.

Diremo che una funzione $m(z)$ appartiene alla classe di funzioni $\mathfrak{M}(C)$ se essa verifica le seguenti condizioni:

1) È una funzione complessa del punto $z = x + iy$ variabile sulla frontiera r -singolare C, misurabile secondo Lebesgue rispetto all'arco s di C.

2) Indicato con S un qualunque arco della frontiera C che non contiene alcun punto singolare e con S_h $(h = 1, 2, \dots, r)$ una porzione di curva della frontiera C costituita da due archi aventi in comune il solo punto singolare z_h e non contenenti alcuno dei restanti punti z_k con $k \neq h$, riesce:

$$(4)\qquad m(z) \in \mathfrak{L}^{(1)}(S) \qquad m(z)\,|\,z - z_h\,|^{(\pi/\alpha_h)-1} \in \mathfrak{L}^{(1)}(S_h) \qquad (h = 1, 2, \dots, r).$$

Supponiamo che in s degli r punti singolari di C $(0 \leqslant s \leqslant r)$ il campo A presenti degli angoli di ampiezza maggiore di π (angoli rientranti per il dominio). Sia $j_1 j_2 \dots j_r$ una disposizione degli indici $1\ 2 \dots r$ tale che, nei punti $z_{j_1}, z_{j_2}, \dots, z_{j_s}$ le ampiezze siano, rispettivamente, $\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \dots, \alpha_{j_s}$ con $\alpha_{j_k} > \pi$ $(k = 1, 2, \dots, s)$, ed in $z_{j_{s+1}}, z_{j_{s+2}}, \ldots, z_{j_r}$ rispettivamente $\alpha_{j_{s+1}}, \alpha_{j_{s+2}}, \ldots, \alpha_{j_r}$, con $\alpha_{j_h} < \pi$ $(h = s + 1, \ldots, r)$.

Diremo che una funzione $g(z)$ appartiene alla classe di funzioni $G(D)$ se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

1) $g(z)$ è una funzione complessa del punto z variabile in D, olomorfa nel campo A, continua in D.

2) Sia q_{j_h} il più piccolo intero tale che:

$$q_{j_h} \geqslant \frac{\pi}{\alpha_{j_h}} - 1 \qquad (h = s + 1, \ldots, r;\ 0 \leqslant s \leqslant r);$$

esistono finiti i seguenti limiti:

$$\lim_{z \to z_{j_h}} \frac{g(z)}{(z - z_{j_h})^{q_{j_h}}} \quad [h = s + 1, \ldots, r;\ 0 \leqslant s \leqslant r]\,. \tag{5}$$

5. *Un teorema di chiusura per una classe di funzioni definite sulla frontiera del campo singolare A.*

Con riferimento alle classi $\mathfrak{M}(C)$ e $G(D)$ ora introdotte, sussiste il teorema:

III. *Se $m(z)$ è una funzione della classe $\mathfrak{M}(C)$ dotata di parte immaginaria costante su ogni curva Γ_k di Γ $(k = 0, 1, \ldots, p)$ e tale che:*

$$\int_{+C} m(z)g(z)dz = 0 \;[7] \tag{6}$$

per ogni funzione $g(z)$ della classe $G(D)$, allora m è una costante [8]).

---

[7]) L'integrale complesso a primo membro della (6) esiste in virtù delle (4) e (5) che intervengono nella definizione di $\mathfrak{M}(C)$ e $G(D)$.

[8]) La dimostrazione di questo teorema coincide sostanzialmente con quella data in [7] a pag. 19 per il teorema V, con riferimento alle classi $\mathfrak{M}(C)$ e $\Phi(D)$.

Sia Δ il dominio del piano ζ, limitato dalle $p+1$ curve Γ_0, $\Gamma_1, \dots, \Gamma_p$ di classe $C^{(1,\lambda)}$, codominio della funzione $\zeta = F(z)$ introdotta nel corso del § 2. Consideriamo la funzione $z = F^{-1}(\zeta)$ inversa della $\zeta = F(z)$ e la funzione: $\mu(\zeta) = m[F^{-1}(\zeta)]$. Essa appartiene ad $\mathfrak{L}^{(1)}(\Gamma)$ [9]) $[\Gamma = \bigcup_{i=0}^{p} \Gamma_i]$. Posto: $\zeta_h = F(z_h)$ $(h = 1, 2, \dots, r)$, introduciamo i seguenti polinomi nella variabile complessa ζ:

$$\psi_k(\zeta) = \prod_{h=1}^{r} (\zeta - \zeta_h)\zeta^k \qquad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

e consideriamo le funzioni

$$g_k(z) = \psi_k[F(z)]F'(z) = \prod_{h=1}^{r} [F(z) - F(z_h)]F'(z)[F(z)]^k \, ;$$

proviamo che $g_k(z)$ appartiene a $G(D)$.

Poichè, per le proprietà di cui gode $F(z)$, $\lim_{z \to z_h} g_k(z) = 0$, la condizione 1), che interviene nella definizione della classe $G(D)$, è ovviamente soddisfatta.

Quanto alla 2), i limiti (5) esistono finiti dato che esistono finiti i seguenti:

$$\lim_{z \to z_{j_h}} \frac{F(z) - F(z_{j_h})}{(z - z_{j_h})^{q_{j_h}}} F'(z) \, ,$$

in virtù della proprietà 3) di cui gode $F(z)$.

Essendo:

$$\int_{+\Gamma} \mu(\zeta)\psi_k(\zeta)d\zeta = \int_{+C} m(z)\psi_k[F(z)]F'(z)dz = \int_{+C} m(z)g_k(z)dz \, ,$$

per le (6) si ha

$$\int_{+\Gamma} \mu(\zeta)\psi_k(\zeta)d\zeta = \int_{+\Gamma} \mu(\zeta)(\zeta - \zeta_1)(\zeta - \zeta_2) \dots (\zeta - \zeta_r)\zeta^k d\zeta = 0$$
$$(k = 0, 1, 2, \dots).$$

---

[9]) Cfr. [7], pag. 11.

Consideriamo le funzioni:

$$\psi_k^{(n)}(\zeta) = \frac{(\zeta - \zeta_1)(\zeta - \zeta_2) \dots (\zeta - \zeta_r)}{(\zeta - \zeta_n^*)^{k-1}}$$

$$(n = 1, 2, \dots, p;\ k = 0, 1, 2, \dots),$$

essendo $\zeta_1^*, \zeta_2^*, \dots, \zeta_p^*$ p punti fissati, rispettivamente, in $D(\Gamma_1) - \Gamma_1, D(\Gamma_2) - \Gamma_2, \dots, D(\Gamma_p) - \Gamma_p$.

Posto

$$g_k^{(n)}(z) = \psi_k^{(n)}[F(z)]F'(z),$$

ragionando come sopra si vede che $g_k^{(n)}(z)$ appartiene a $G(D)$, e pertanto, per le (6), riesce:

$$\int_{+\Gamma} \mu(\zeta)\psi_k^{(n)}(\zeta)d\zeta = \int_{+\Gamma} \mu(\zeta) \frac{(\zeta - \zeta_1)(\zeta - \zeta_2) \dots (\zeta - \zeta_r)}{(\zeta - \zeta_n^*)^{k+1}} d\zeta = 0$$

$$(n = 1, 2, \dots, p;\ k = 0, 1, 2, \dots).$$

Essendo verificate le (2) e (3) del teorema II ne segue che μ e quindi m è costante. Cioè la tesi.

6. *Un teorema di chiusura per una classe di funzioni razionali.*

Indichiamo con $\mathfrak{R}$ la classe di tutte le funzioni razionali della variabile complessa z nulle in $z_{j_{s+1}}, z_{j_{s+2}}, \dots, z_{j_r}$ (cfr. pag. 11). Sussiste il teorema:

IV. *Se $m(z)$ è una funzione appartenente a $\mathfrak{M}(C)$, dotata di parte immaginaria costante su ogni curva Γ_k di Γ ($k = 0, 1, \dots, p$) e se riesce:*

$$\int_{+C} m(z)R(z)dz = 0 \tag{7}$$

per ogni funzione $R(z)$ di $\Re$, allora m è una costante su C [10]).

Sia $g(z)$ una qualunque funzione di $G(D)$; poniamo:

$$h(z) = \frac{g(z)}{\prod_{h=s+1}^{r} (z - z_{j_h})^{q_{j_h}}} .$$

La funzione $h(z)$ è continua in D e olomorfa in A. Esiste allora una successione di funzioni razionali, che indichiamo con $\{R_n^*(z)\}$ tale che:

$$\lim_{n\to\infty} R_n^*(z) = h(z)$$

in tutto D.

Ne segue:

$$g(z) = \lim_{n\to\infty} \prod_{h=s+1}^{r} (z - z_{j_h})^{q_{j_h}} R_n^*(z) \tag{8}$$

con $\prod_{h=s+1}^{r} (z - z_{j_h})^{q_{j_h}} R_n^*(z) \in \Re$ e quindi, dalle (7) e (8) si trae:

$$\int_{+C} m(z)g(z)dz = 0 , \tag{9}$$

qualunque sia la funzione $g(z)$ di $G(D)$. Per il teorema III si ha: $m = \text{cost}$ su C.

Siano $z_1^*, z_2^*, \ldots, z_p^*$ p punti fissati, rispettivamente, in $D(C_1) - C_1, D(C_2) - C_2, \ldots, D(C_p) - C_p$ ed n_z la normale a C (interna ad A) in un punto z regolare di C. Il teorema ora dimostrato ci permette di ottenere un ulteriore teorema di chiusura e precisamente:

---

[10]) Anche la dimostrazione di questo teorema coincide sostanzialmente con quella data in [7], a pag. 21, per il teorema VI.

V. *Se* $m(z)$ *è una funzione reale appartenente oltre che a* $\mathfrak{M}(C)$ *anche ad* $\mathfrak{L}^{(1)}(C)$ *e se riesce*:

$$(10) \qquad \int_C m(z) \frac{\partial}{\partial n_z} z^k d_z s = 0 \qquad (k = 1, 2, \dots)$$

$$(11) \qquad \int_C m(z) \frac{\partial}{\partial n_z} \frac{1}{(z - z_l^*)^k} d_z s = 0 \qquad (k = 1, 2, \dots ; l = 1, 2, \dots, p)$$

$$(12) \qquad \int_C m(z) \frac{\partial}{\partial n_z} \log |z - z_l^*| d_z s = 0 \qquad (k = 1, 2, \dots; l = 1, 2, \dots, p),$$

allora m *è una costante su* C.

Le (10) e (11) sono equivalenti alle seguenti

$$(10') \qquad \int_{+C} m(z) \frac{d}{dz} z^k dz = 0$$

$$(11') \qquad \int_{+C} m(z) \frac{d}{dz} \frac{1}{(z - z_l^*)^k} dz = 0 \qquad (l = 1, 2, \dots, p;\ k = 1, 2, \dots).$$

Poniamo:

$$m^*(z) \begin{cases} = m(z) & \text{su } C_0 \\ = m(z) + k_l & \text{su } C_l \qquad (l = 1, 2, \dots, p), \end{cases}$$

con:

$$k_l = \frac{1}{2\pi i} \int_{+C} \frac{m(z)}{z - z_l^*} dz \qquad (l = 1, 2, \dots, p).$$

È allora, evidentemente:

$$(13) \qquad \int_{+C} \frac{m^*(z)}{z - z_l^*} dz = 0 \qquad (l = 1, 2, \dots, p).$$

D'altro canto, per le (10') e (11') riesce:

$$(14) \qquad \int_{+C} m^*(z) \frac{d}{dz} z^k dz = 0$$

$$(15) \qquad \int_{+C} m^*(z) \frac{d}{dz} \frac{1}{(z - z_l^*)^k} dz = 0 \qquad (l = 1, 2, \ldots, p;\ k = 1, 2, \ldots)$$

e quindi, presa una arbitraria funzione razionale $R(z)$, le (13), (14), (15) implicano:

$$\int_{+C} m^*(z) R(z) dz = 0 .$$

Per il teorema IV si ha allora $m(z) = k$ su C, con k costante. Per definizione di m^* ne segue:

$$m \begin{cases} = k & \text{su } C_0 \\ = k - k_l & \text{su } C_l \qquad (l = 1, 2, \ldots, p). \end{cases}$$

La funzione m soddisfa alle (12) e quindi si ha

$$\int_C m \frac{\partial}{\partial n_z} \log | z - z_l^* | \, d_z s = k \int_{C_0} \frac{\partial}{\partial n_z} \log | z - z_l^* | \, d_z s +$$

$$+ (k - k_l) \int_{C_l} \frac{\partial}{\partial n_z} \log | z - z_l^* | \, d_z s = 0 .$$

Pertanto, dev'essere: $2\pi k - 2\pi(k - k_l) = 0$, cioè $k_l = 0$ $(l = 1, 2, \ldots, p)$.

La funzione m coincide con una costante k su C e quindi il teorema è provato.

7. *Il sistema di funzioni* $\{\omega_h(z)\}$ $(z \in C;\ h \geqslant -p)$ *e sua completezza in un particolare spazio hilbertiano.*

Indichiamo con $\mathfrak{S}_0$ l'insieme lineare [11]) delle funzioni reali $f(z)$ definite al variare di z su C e che riescono funzioni dell'arco s di quadrato sommabile. $\mathfrak{S}_0$ è uno spazio di Hilbert [12]) definendo il prodotto scalare di due funzioni f e g di $\mathfrak{S}_0$ — prodotto che indicheremo con $(f, g)_0$ — al modo seguente:

$$(f, g)_0 = \int_C f(z)g(z)d_z s = \sum_{h=0}^{p} \int_{C_h} f_h(z)g_h(z)d_z s ,$$

dove f_h e g_h $(h = 0, 1, ..., p)$ sono funzioni definite su C_h e ivi coincidenti, rispettivamente, con f e g.

Al consueto simbolo di prodotto scalare in uno spazio di Hilbert, abbiamo apposto un indice zero in basso, a destra, per ricordare che esso è relativo allo spazio $\mathfrak{S}_0$ e per differenziarlo da prodotti scalari relativi ad altri spazi hilbertiani che in sèguito avremo occasione di considerare.

Consideriamo le funzioni:

$$\log | z - z_i | \quad (i = 1, 2, ..., p), \quad Re\, z^k$$

e

$$Im\, z^k \quad (k = 0, 1, ...); \quad Re\, (z - z_i)^{-k}$$

e

$$Im\, (z - z_i)^{-k} \quad (i = 1, 2, ..., p;\ k = 1, 2, ...)$$

già introdotte nel corso del teorema V. (Per semplicità di scrittura indichiamo d'ora in avanti semplicemente con $z_1, z_2, ..., z_p$

---

[11]) Cfr. [10], pag. 71.

[12]) Come definizione di spazio di Hilbert noi usiamo quella data in [10] pag. 187. Poichè $\mathfrak{S}_0$ è completo (cfr. [10], pag. 49 e teor. XXX, pag. 468), $\mathfrak{S}_0$ è uno spazio di Hilbert anche secondo la definizione usata da altri Autori.

invece che con $z_1^*, z_2^*, \dots, z_p^*$ i punti fissati in $D(C_1) - C_1$, $D(C_2) - - C_2, \dots, D(C_p) - C_p$).

Poniamo:

$$\omega_{-i}(z) = \log |z - z_i| \qquad (i = p, p-1, \dots 1)$$

$$\omega_0 \equiv 1$$

$$\omega_{(2p+2)k-(2p+1)}(z) = Re\, z^k$$
$$(i = 1, 2, \dots, p \text{ per ogni } k;\ k = 1, 2, \dots)$$

$$\omega_{(2p+2)k-2p}(z) = Im\, z^k$$
$$(i = 1, 2, \dots, p \text{ per ogni } k;\ k = 1, 2, \dots)$$

$$\omega_{(2p+2)k-(2p+1)+2i}(z) = Re\, (z - z_i)^{-k}$$
$$(i = 1, 2, \dots, p \text{ per ogni } k;\ k = 1, 2, \dots)$$

$$\omega_{(2p+2)k-2p+2i}(z) = Im\, (z - z_i)^{-k}$$
$$(i = 1, 2, \dots, p \text{ per ogni } k;\ k = 1, 2, \dots).$$

Sussiste il seguente teorema:

VI. *Se il campo A verificante l'ipotesi* A) *è propriamente regolare di classe $C_H^{(1)}$, il sistema di funzioni*: $\{\omega_h(z)\}$ $(z \in C;\ h \geq -p)$ *è un sistema completo nello spazio $\mathfrak{S}_0$* [13]).

Per dimostrare il teorema basta provare che se f è una fun-

[13]) A proposito di questo teorema si confronti: [11], pag. 27 ed inoltre [4], [28] e [9]. In [28] lo Zin dimostra il teorema VI, in ipotesi più generali di quelle da noi ammesse, sfruttando però un teorema sulla rappresentazione conforme di domini piani in domini circolari. Per tale motivo la dimostrazione nella forma data in [28] non può venir estesa allo spazio, laddove, quella da noi qui seguita, è suscettibile di una tal estensione. Il teorema VI generalizza inoltre il teorema di completezza contenuto in [11], pag. 27, al caso in cui il campo A sia propriamente regolare di classe $C_H^{(1)}$. Per altre estensioni di questo teorema nello spazio, si veda [9].

zione di $\mathfrak{S}_0$ tale che:

$$\int_C f(z)\omega_h(z)d_z s = 0 \qquad (h \geqslant -p), \tag{16}$$

riesce $f = 0$ quasi ovunque su C [14]).

Sia T un campo circolare avente centro nell'origine O e contenente il dominio $A + C$ e (ϱ, θ) un sistema di coordinate polari di polo O.

In tale riferimento siano (ϱ_0, θ_0) le coordinate polari di un punto $\zeta = \xi + i\eta$ fissato all'esterno di T e (ϱ, θ) quelle di un punto $z = x + iy$ di T. Per la funzione $\log|z - \zeta|$ sussiste allora lo sviluppo [15]):

$$\log|z-\zeta| = \log \varrho_0 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}\left\{\frac{\cos m\theta_0}{\varrho_0^m}\varrho^m \cos m\theta + \right. \left. + \frac{\operatorname{sen} m\theta_0}{\varrho_0^m}\varrho^m \operatorname{sen} m\theta\right\}, \tag{17}$$

la serie a secondo membro della (17) convergendo — fissato ζ all'esterno di T, uniformemente rispetto a z in ogni insieme chiuso di T e — fissato z in T — uniformemente rispetto a ζ variabile in ogni insieme chiuso esterno a T.

Per le (16) e per la (17) risulta allora, qualunque sia ζ esterno a T:

$$\int_C f(z)\log|z-\zeta|\, d_z s = \log \varrho_0 \int_C f(z) d_z s - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos m\theta_0}{m\varrho_0^m} \cdot \int_C f(z)\, Re\, z^m d_z s - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} m\theta_0}{m\varrho_0^m} \int_C f(z)\, Im\, z^m d_z s = 0\,.$$

Poichè la funzione: $v(\zeta) = \int_C f(z)\log|z-\zeta|\, d_z s$, nulla al-

[14]) Cfr. [10], pag. 208.
[15]) Cfr. [13], pag. 5.

l'esterno di T, è analitica nelle variabili reali ξ ed η, $v(\zeta)$ si annulla in ogni punto del campo complementare del dominio $D(C_0)$.

Proviamo ora che — più in generale — $v(\zeta)$ è identicamente nulla nel campo complementare del dominio $A + C$.

Sia T_k un campo circolare di centro z_k contenuto in $D(C_k) - C_k$, ζ un punto fissato in T_k $(k = 1, 2, \ldots, p)$ e assumiamo z_k come polo di un sistema di coordinate polari che indichiamo, per semplicità, ancora con (ϱ, θ). In tale riferimento siano (ϱ_0, θ_0) le coordinate di ζ e (ϱ, θ) quelle di un punto z variabile all'esterno di T_k; si ha

$$\log|z - \zeta| = \log\varrho - \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left\{\frac{\cos m\theta}{\varrho^m}\varrho_0^m\cos m\theta_0 + \right.$$
$$\left. + \frac{\operatorname{sen} m\theta_0}{\varrho^m}\varrho_0^m \operatorname{sen} m\theta_0\right\}. \tag{18}$$

Con ragionamento analogo a quello testè seguito, tenendo presenti le (16), ne viene, per ogni ζ di T_k:

$$\int_C f(z)\log|z - \zeta|\,d_z s = \int_C f(z)\log|z - z_k|\,d_z s - \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\varrho_0^m\cos m\theta_0 \cdot$$
$$\cdot\int_C f(z)\,Re\,(z - z_k)^{-m}d_z s - \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\varrho_0^m \operatorname{sen} m\theta_0\int_C f(z)\,Im\,(z - z_k)^{-m}d_z s = 0\,.$$

Attesa l'analiticità di $v(\zeta)$ si deduce il suo annullarsi identico in $D(C_k) - C_k$ $(k = 1, 2, \ldots, p)$ e quindi $v(\zeta)$ è identicamente nulla nel complementare del dominio $A + C$.

È noto che la funzione $v(\zeta)$, armonica in A, è dotata di derivate parziali prime di quadrato sommabile in A [16]), inoltre, essendo $v(\zeta) \equiv 0$ all'esterno di $A + C$ — per un noto teorema sui potenziali di semplice strato a densità sommabile [17]) — $v(\zeta)$ si annulla su C in un senso generalizzato che trovasi precisato nella Memoria [12]. D'altronde, una funzione armonica in A, dotata

---

[16]) Cfr. [19], pag. 27.
[17]) Cfr. [11], pag. 6.

di derivate prime di quadrato sommabile in A, annullantesi nel senso ora detto su C, è identicamente nulla in A [18]).

Per un teorema sulla discontinuità del potenziale di semplice strato con densità sommabile [19]) segue che f è quasi ovunque nulla su C. Da ciò la tesi.

8. *Ulteriori teoremi di completezza hilbertiana per il sistema* $\{\omega_h(z)\}$ $(z \in C;\ h \geqslant -p)$.

Indichiamo con $\mathfrak{S}_1$ l'insieme lineare delle funzioni reali $f(z)$ definite su C, ivi continue, assolutamente continue rispetto all'arco s e dotate di derivata prima $\frac{\partial f}{\partial s}$ di quadrato sommabile. $\mathfrak{S}_1$ è uno spazio di Hilbert [20]) definendo il prodotto scalare di due funzioni f e g di $\mathfrak{S}_1$ al modo seguente:

$$(f, g)_1 = \int_C \left[f(z)g(z) + \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial g}{\partial s} \right] d_z s = \sum_{h=0}^{p} \int_{C_h} \left[f_h(z)g_h(z) + \frac{\partial f_h}{\partial s}\frac{\partial g_h}{\partial s} \right] d_z s \,.$$

Proviamo che:

VII. *Se A (verificante l'ipotesi A)* [21])*) è propriamente regolare di classe $C_H^{(1)}$, il sistema $\{\omega_h(z)\}$ $(h \geqslant -p)$ è completo in $\mathfrak{S}_1$* [22]).

Considerato il sistema $\{\omega_h(z)\}$ $(z \in A + C;\ h \geqslant -p)$, indichiamo con $\{\omega_k^*(z)\}$ $(k = 1, 2, ...)$ il sistema da esso ottenuto mediante ortonormalizzazione rispetto al seguente prodotto

---

[18]) Cfr. [12], pag. 45. Il caso delle funzioni armoniche trovasi esplicitamente considerato in [26], pag. 169 e segg. nell'ipotesi più restrittiva che A sia propriamente regolare di classe $C^{(2)}$.

[19]) Cfr. [11], pag. 9.

[20]) Si prova che ogni successione $\{f^{(n)}\}$ di funzioni di $\mathfrak{S}_1$ verificante la condizione di Cauchy converge ad una funzione f di $\mathfrak{S}_1$ (cfr. [14]) e quindi $\mathfrak{S}_1$ è completo (cfr. nota [13])).

[21]) D'ora in avanti l'ipotesi A) per il campo A sarà sempre sottintesa.

[22]) Cfr. [14], pag. 167. Ivi trovasi considerato un caso particolare del teorema VII. Il procedimento dimostrativo seguito nel testo estende e completa quello indicato nella nota citata.

scalare:

$$\iint_A \operatorname{grad} \omega_h^*(z) \times \operatorname{grad} \omega_k^*(z) dxdy = \delta_h^k \qquad (h, k = 1, 2, ...).$$

Fissato l'intero i tra 1 e p, poniamo:

$$\gamma_k^{(i)} = -\int_{C_i} \frac{\partial}{\partial n_z} \omega_k^*(z) d_z s \qquad (k = 1, 2, ...).$$

La serie di vettori:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^{(i)} \operatorname{grad} \omega_k^*(z)$$

converge in media in A ed uniformemente in ogni insieme chiuso contenuto in A [23]); esiste allora una funzione $\omega^{(i)}(z)$, armonica in A, dotata di derivate prime di quadrato sommabile in A, tale che:

$$\operatorname{grad} \omega^{(i)}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^{(i)} \operatorname{grad} \omega_k^*(z).$$

Posto

$$v_i(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \iint_A \{\operatorname{grad}_z \log | z - \zeta | \times \operatorname{grad} \omega^{(i)}(z)\} dxdy,$$

la funzione $v_i(\zeta)$ è armonica in A, è dotata di derivate prime di quadrato sommabile in A e riesce:

(19) $\quad v_i(\zeta) = 0$ per $\zeta \in C - C_i$; $\quad v_i(\zeta) = 1$ per $\zeta \in C_i$ [24]).

Le funzioni $v_i(\zeta)$ $(i = 1, 2, ..., p)$ sono fra loro linearmente indipendenti. Infatti, se — per assurdo — esistessero p costanti

---

[23]) Cfr. [26], pag. 169 e segg.

[24]) Cfr. [14], pag. 165, [17], [26] e [8].

$c_1, c_2, \ldots, c_p$, non tutte nulle, tali che la funzione $u(\zeta) = \sum_{i=1}^{p} c_i v_i(\zeta)$ fosse identicamente nulla in $A + C$, essendo $u = c_i$ su C_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$, ne seguirebbe $c_1 = c_2 = \ldots = c_p = 0$, contro l'ipotesi.

Ciò premesso, suddividiamo la dimostrazione del teorema in corso in tre parti che indichiamo, rispettivamente, con a), b), c).

a) *Completezza in $\mathfrak{S}_1$ del sistema di funzioni:*

$$\{v_1(z), v_2(z), \ldots, v_p(z);\ \omega_r(z)\} \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots).$$

Sia f una funzione di $\mathfrak{S}_1$ tale che:

$$(v_k, f)_1 = 0\,, \qquad (\omega_r, f)_1 = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, p;\ r = 0, 1, 2, \ldots); \tag{20}$$

proviamo che f è identicamente nulla.

Indichiamo — come già in precedenza — con $f_0, f_1, \ldots, f_p$ le funzioni, definite rispettivamente su $C_0, C_1, \ldots, C_p$, con le quali ivi f coincide, e, fissata su C_k l'origine delle ascisse curvilinee, poniamo:

$$\varphi_k(s) = \int_0^s f_k(\sigma)d\sigma \qquad (k = 0, 1, \ldots, p)\,[25].$$

Essendo:

$$(v_k, f)_1 = \int_{C_k} f_k ds = 0 \ \ (k = 1, 2, \ldots, p) \quad \text{e} \quad (\omega_0, f)_1 = 0\,,$$

e poichè f appartiene ad $\mathfrak{S}_1$, si deduce che ogni φ_k è funzione continua del punto z variabile su C_k, che è dotata di derivata

[25]) D'ora in avanti, quando considereremo una funzione f definita su C_k, scriveremo $f(s)$ o $f(z)$ $(z \in C_k)$ a seconda che si voglia mettere in risalto la dipendenza di f dall'arco s o dal punto z variabile su C_k.

prima rispetto ad s assolutamente continua e di derivata seconda di quadrato sommabile ed inoltre che:

$$\varphi_k(0) = \varphi_k(L_k) = 0 \; ; \quad \varphi_k'(0) = \varphi_k'(L_k) \qquad (k = 0, 1, \dots, p), \tag{21}$$

(L_k lunghezza di C_k).

Sia φ la funzione definita al variare di z su C e che per $z \in C_k$ coincide con φ_k ($k = 0, 1, \dots, p$); per le (21) si ha

$$\int_C \left[\omega_r f + \frac{\partial \omega_r}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial s}\right] d_z s = \sum_{k=1}^{p} \int_{C_k} [\varphi_k'' - \varphi_k] \frac{\partial \omega_r}{\partial s} d_z s =$$
$$= \int_C [\varphi'' - \varphi] \frac{\partial \omega_r}{\partial s} d_z s \qquad (r = 1, 2, \dots),$$

e quindi alle (20) si possono sostituire le seguenti condizioni:

$$\int_C [\varphi'' - \varphi] \frac{\partial \omega_r}{\partial s} d_z s = 0 \qquad (r = 1, 2 \dots). \tag{22}$$

Per l'olomorfia in A delle funzioni z^k e $(z - z_i)^{-k}$ ($i = 1, 2, \dots, p$; $k = 1, 2, \dots$), fissato l'intero non negativo r, la funzione $\omega_{2r+1}(z)$ ha come funzione armonica coniugata la funzione $\omega_{2r+2}(z)$; pertanto, al variare di z su C, riesce, nei punti non singolari di C,

$$\frac{\partial \omega_{2r+1}}{\partial s_z} = \frac{\partial \omega_{2r+2}}{\partial n_z}, \quad \frac{\partial \omega_{2r+1}}{\partial n_z} = -\frac{\partial \omega_{2r+2}}{\partial s_z},$$

e quindi le (22) divengono:

$$\int_C [\varphi'' - \varphi] \frac{\partial \omega_r}{\partial n_z} d_z s = 0 \qquad (r = 1, 2, \dots). \tag{23}$$

Infine, tenendo presenti le (23) e le (19) e ben note proprietà delle funzioni armoniche posto:

$$a_j = \frac{1}{2\pi}\int_C [\varphi'' - \varphi]\,\frac{\partial \log|z - z_j|}{\partial n_z}\,d_z s \qquad (j = 1, 2, \ldots, p),$$

$$m(z) = \varphi''(z) - \varphi(z) - \sum_{j=1}^{p} a_j v_j(z) \qquad (z \in C),$$

si ha:

$$\int_C m(z)\,\frac{\partial}{\partial n_z}\log|z - z_i|\,d_z s = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p) \tag{24}$$

$$\int_C m(z)\,\frac{\partial}{\partial n_z}\,\omega_r(z) d_z s = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots). \tag{25}$$

Poichè m appartiene a $\mathfrak{L}^{(2)}(C)$ e quindi anche a $\mathfrak{M}(C)$, per il teorema V, dalle (24) e (25) segue $m = q$, con q costante su C.

Si ha allora, tenendo presenti le (21):

$$\begin{aligned}
&\varphi_0''(s) - \varphi_0(s) = q\,, && 0 \leqslant s \leqslant L_0\,;\\
&\varphi_0(0) = \varphi_0(L_0) = 0\,, && \varphi_0'(0) = \varphi_0'(L_0)\\
&\varphi_h''(s) - \varphi_h(s) = q + a_h\,, && 0 \leqslant s \leqslant L_h\,;\\
&\varphi_h(0) = \varphi_h(L_h) = 0\,, && \varphi_h'(0) = \varphi_h'(L_h)\\
& && (h = 1, 2, \ldots, p).
\end{aligned}$$

Un facile calcolo prova che, determinato l'integrale generale dell'equazione differenziale: $\varphi_0''(s) - \varphi_0(s) = q$, le condizioni $\varphi_0(0) = \varphi_0(L_0) = 0$; $\varphi_0'(0) = \varphi_0'(L_0)$ implicano necessariamente $q = 0$ ed, ovviamente, anche $\varphi_0 \equiv 0$. In modo analogo si deduce che $\varphi_h \equiv 0$ $(h = 1, 2, \ldots, p)$. Ne viene $\varphi(z) \equiv 0$ per $z \in C$ e quindi $f \equiv 0$. Da ciò la completezza del sistema $\{v_1(z), v_2(z), \ldots, v_p(z);\ \omega_r(z)\}$ $(r = 0, 1, \ldots)$.

b) *Definizione del sistema di funzioni*: $\{\tau_1(z), \tau_2(z), \ldots, \tau_p(z);\ \omega_r(z)\}$ $(z \in C;\ r = 0, 1, \ldots)$.

Siano $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_p$ p curve semplici e chiuse di classe $C^{(2)}$ contenute in A, a due a due prive di punti a comune e tali che ogni Γ_h risulti completa frontiera di un campo limitato contenente C_h e nessun'altra delle C_k, con $k \neq h$ $(h = 1, 2, \ldots, p)$.

Considerate le funzioni $v_1(z), v_2(z), \ldots, v_p(z)$, introdotte a pag. 23, poniamo:

$$\Phi_{hk} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_h} \frac{\partial}{\partial \nu_z} v_k(z) d_z s \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, p)\ ^{26}),$$

e, per ogni fissato intero h tra 1 e p, consideriamo il seguente sistema di p equazioni lineari nelle p incognite $c_{h1}, c_{h2}, \ldots, c_{hp}$:

$$(26)_h \qquad \sum_{k=1}^{p} \Phi_{ik} c_{hk} = \delta_i^h \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Proviamo che esiste una ed una sola p-upla $c_{h1}, c_{h2}, \ldots, c_{hp}$ soluzione del sistema $(26)_h$ $(h = 1, 2, \ldots, p)$.

Poichè al variare di h i sistemi $(26)_h$ differiscono fra loro solo per la colonna dei termini noti, basta ovviamente provare che il sistema omogeneo:

$$(27) \qquad \sum_{k=1}^{p} \Phi_{ik} c_k = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

nelle incognite $c_1, c_2, \ldots, c_p$, è soddisfatto soltanto per $c_1 = c_2 = \ldots = c_p = 0$.

A tale scopo supponiamo, per assurdo, che esistano p costanti $c_1^*, c_2^*, \ldots, c_p^*$, non tutte nulle, soluzioni del sistema (27) e quindi tali che, posto:

$$g(\zeta) = \sum_{i=1}^{p} c_i^* v_i(\zeta),$$

riesca:

$$(28) \qquad \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_i} \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} g(\zeta) d_\zeta s = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

---

[26]) Indichiamo con ν_z la normale a Γ_h in z orientata verso l'interno del campo limitato avente Γ_h come completa frontiera.

Ricordando le espressioni delle funzioni $v_i(\zeta)$ si trova:

$$g(\zeta) = \sum_{i=1}^{p} c_i^* v_i(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{p} c_i^* \iint_A \{\text{grad}_z \log | z - \zeta | \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^{(i)} \text{grad}\, \omega_k^*(z)\}\, dxdy = \iint_A \Big\{ \text{grad}_z \log | z - \zeta | \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{p} c_i^* \gamma_k^{(i)} \right) \text{grad}\, \omega_k^*(z) \Big\}\, dxdy ,$$

e quindi, posto:

$$g_k = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{p} c_i^* \gamma_k^{(i)} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{p} c_i^* \int_{C_i} \frac{\partial}{\partial n_z} \omega_k(z) d_z s \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

possiamo scrivere:

$$g(\zeta) = \iint_A \{\text{grad}_z \log | z - \zeta | \times \sum_{k=1}^{\infty} g_k \,\text{grad}\, \omega_k^*(z)\}\, dxdy . \tag{29}$$

Le costanti g_k che intervengono nella (29) non possono essere tutte nulle. Infatti, se fossero tali, sarebbe identicamente nulla la funzione $g(\zeta)$, cioè si avrebbe $\sum_{i=1}^{p} c_i^* v_i(\zeta) \equiv 0$, con le c_i^* non tutte nulle. Ciò è assurdo in quanto — come si è già dimostrato — le $v_i(\zeta)$ sono linearmente indipendenti.

Dalla (29) si trae:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_i} \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} g(\zeta) d_\zeta s = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_i} \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} \Big\{ \iint_A \text{grad}_z \log | z - \zeta | \times \tag{30}$$

$$\times \sum_{k=1}^{\infty} g_k \,\text{grad}\, \omega_k^*(z) dxdy \Big\} d_\zeta s = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} g_k \cdot$$

$$\cdot \int_{\Gamma_i} \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} \Big\{ \iint_A \text{grad}_z \log | z - \zeta | \times \text{grad}\, \omega_k^*(z) dxdy \Big\} d_\zeta s .$$

Poichè le funzioni $\omega_k^*(z)$ sono armoniche in A, per la formola di Green si ha:

$$(31)\qquad \iint_A \operatorname{grad}_z \log|z-\zeta| \times \operatorname{grad} \omega_k^*(z)dxdy = $$
$$= -\int_C \log|z-\zeta| \frac{\partial}{\partial n_z} \omega_k^*(z) d_z s,$$

e quindi, dalle (30) e (31) segue:

$$(32)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_i} \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} g(\zeta) d_\zeta s =$$
$$= -\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty} g_k \int_{\Gamma_i} \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta}\left\{\int_C \log|z-\zeta| \frac{\partial}{\partial n_z}\omega_k^*(z) d_z s\right\} d_\zeta s =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty} g_k \int_C \frac{\partial}{\partial n_z}\omega_k^*(z)\left\{\int_{\Gamma_i} \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} \log|z-\zeta| d_\zeta s\right\} d_z s \text{ [27]}) .$$

Poichè:

$$\int_{\Gamma_i} \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} \log|z-\zeta| d_\zeta s \begin{cases} = 0 & \text{per} \quad z \in C - C_i \\ = 2\pi & \text{per} \quad z \in C_i \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

dalle (32) si trae:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_i} \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} g(\zeta) d_\zeta s = -\sum_{k=1}^{\infty} g_k \int_{C_i} \frac{\partial}{\partial n_z} \omega_k^*(z) d_z s,$$

e quindi, tenendo presenti le (28), ne segue:

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{p} c_i^* \int_{\Gamma_i} \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} g(\zeta) d_\zeta s =$$
$$= -\sum_{k=1}^{\infty} g_k \sum_{i=1}^{p} c_i^* \int_{C_i} \frac{\partial}{\partial n_z}\omega_k^*(z) d_z s = 2\pi \sum_{k=1}^{\infty} g_k^2 = 0 .$$

---

[27]) La funzione $\frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} \log|z-\zeta| \frac{\partial}{\partial n_z}\omega_k^*(z)$ è sommabile su C uniformemente rispetto a ζ variabile su Γ_i; è quindi lecita la derivazione sotto il segno d'integrale. Inoltre, in virtù dei classici teoremi di Fubini e Tonelli, sono lecite le inversioni dell'ordine di integrazione rispetto a ζ e a z.

Poichè — come si è in precedenza osservato — fra le g_k ve n'è almeno una diversa da zero, la relazione $\sum_{k=1}^{\infty} g_k^2 = 0$ è assurda e, pertanto, le $c_1^*, c_2^*, \dots, c_p^*$, soluzioni del sistema (27), sono tutte nulle.

Poniamo

$$\tau_h(z) = \sum_{k=1}^{p} c_{hk} v_k(z) \qquad (h = 1, 2, \dots, p),$$

dove, per ogni fissato h tra 1 e p, $c_{h1}, c_{h2}, \dots, c_{hp}$ è la p -upla soluzione del sistema $(26)_h$.

Le funzioni $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p$, in quanto ottenute dalle funzioni $v_1, v_2, \dots, v_p$ a mezzo di una sostituzione lineare a modulo diverso da zero (riesce infatti $[\det. (\Phi_{hk})]^{-1} = \det. (c_{hk}) \neq 0$), risultano esse pure linearmente indipendenti. Pertanto la completezza del sistema $\{v_1(z), v_2(z), \dots, v_p(z); \ \omega_r(z)\}$ $(z \in C; \ r \geqslant 0)$, acquisita in a), implica quella del sistema $\{\tau_1(z), \tau_2(z), \dots, \tau_p(z); \ \omega_r(z)\}$ $(z \in C; \ r \geqslant 0)$.

c) *Completezza in* $\mathfrak{S}_1$ *del sistema*:

$$(33) \quad \{\log|z - z_1|, \log|z - z_2|, \dots, \log|z - z_p|; \ \omega_r(z)\} \qquad (z \in C; \ r \geqslant 0).$$

Per acquisire la completezza del sistema (33), procediamo per induzione, facendo vedere che:

1) La completezza del sistema $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p; \ \omega_r\}$ $(r \geqslant 0)$ acquisita in b), implica quella del sistema $\{\log|z - z_1|, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_p; \ \omega_r\}$ $(r \geqslant 0)$, ottenuto dal precedente sostituendo alla funzione $\tau_1(z)$ la funzione $\log|z - z_1|$.

2) Supposta acquisita la completezza del sistema:

$$\{\log|z - z_1|, \log|z - z_2|, \dots, \log|z - z_{p-1}|, \tau_p(z); \ \omega_r(z)\} \qquad (r \geqslant 0),$$

è di conseguenza completo anche il sistema da esso ottenuto sostituendo al posto di $\tau_p(z)$ la funzione $\log|z - z_p|$, cioè il sistema (33).

Ovviamente le 1) e 2) si conseguono contemporaneamente se, fissato l'intero k con $0 \leqslant k \leqslant p - 1$, si fa vedere che, supposto completo il sistema:

$$\begin{aligned}(34)\qquad &\{\log|z - z_1|, \log|z - z_2|, \ldots, \log|z - z_k|,\\ &\tau_{k+1}(z), \tau_{k+2}(z), \ldots, \tau_p(z); \omega_r(z)\} \qquad (r \geqslant 0)\end{aligned}$$

lo è anche il sistema:

$$\begin{aligned}(35)\qquad &\{\log|z - z_1|, \log|z - z_2|, \ldots, \log|z - z_k|,\\ &\log|z - z_{k+1}|, \tau_{k+2}(z), \ldots, \tau_p(z); \omega_r(z)\} \qquad (r \geqslant 0),\end{aligned}$$

ottenuto dal sistema (34) sostituendo alla funzione $\tau_{k+1}(z)$ la funzione $\log|z - z_{k+1}|$ [28]).

Consideriamo il sistema (34) privato della funzione $\tau_{k+1}(z)$ e indichiamo con $\{w_i(z)\}$ $(i \geqslant -p + 1)$ il sistema da esso dedotto mediante ortonormalizzazione per mezzo del prodotto scalare in $\mathfrak{S}_1$, cioè tale che:

$$(36)\qquad (w_i, w_j)_1 = \delta_i^j \qquad (i, j \geqslant -p + 1).$$

Poichè, scelto comunque un numero finito di funzioni del sistema (34), esse risultano linearmente indipendenti [29]), invece di

---

[28]) Per $k = 0$ il sistema (34) si riduce al sistema $\{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p; \omega_r\}$.

[29]) Basta provare che sono linearmente indipendenti le funzioni:

$$\log|z - z_1|, \log|z - z_2|, \ldots, \log|z - z_k|, \tau_{k+1}(z), \ldots, \tau_p(z) \qquad (0 \leqslant k \leqslant p - 1).$$

Tale circostanza è immediata qualora si ricordi che:

$$\int_{\Gamma_i} \frac{\partial}{\partial \nu_z} \log|z - z_n|\, d_z s = 2\pi\delta_n^i \qquad (i = 1, 2, \ldots, p;\ n = 1, 2, \ldots, k);$$

$$\int_{\Gamma_i} \frac{\partial}{\partial \nu_z} \tau_h(z) d_z s = 2\pi\delta_h^i \qquad (i = 1, 2, \ldots, p;\ h = k + 1, \ldots, p),$$

essendo $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_p$ le curve introdotte a pag. 27 e ν_z la normale a Γ_i rivolta verso l'interno del campo limitato avente Γ_i come completa frontiera $(i = 1, 2, \ldots, p)$.

provare quanto sopra affermato relativamente alla coppia di sistemi (34) e (35), possiamo considerare i sistemi:

$$\begin{aligned}(37)\qquad &\{\tau_{k+1}(z),\ w_{-p+1}(z),\ w_{-p+2}(z),\ \ldots,\\ &w_{-1}(z),\ w_0(z),\ w_1(z),\ \ldots\} \qquad (z \in C)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(38)\qquad &\{\log|z - z_{k+1}|,\ w_{-p+1}(z),\ w_{-p+2}(z),\ \ldots,\\ &w_{-1}(z),\ w_0(z),\ w_1(z),\ \ldots\} \qquad (z \in C)\end{aligned}$$

e dimostrare che se è completo il sistema (37), tale è, di conseguenza, anche il sistema (38).

A tale scopo consideriamo la funzione $\log|z - z_{k+1}|$ per $z \in C$. Essa appartiene allo spazio $\mathfrak{S}_1$ e pertanto — in base alla completezza in $\mathfrak{S}_1$ del sistema (37) — riesce, posto per brevità di scrittura: $w_{-p}(z) = \tau_{k+1}(z)$:

$$\lim_{n\to\infty} (\log|z - z_{k+1}| - \sum_{i=-p}^{n} a_i^{(n)} w_i,\ \log|z - z_{k+1}| - \sum_{i=-p}^{n} a_i^{(n)} w_i)_1 = 0,$$

dove, per ogni fissato intero positivo n, con $a_i^{(n)}$ $(-p \leqslant i \leqslant n)$ abbiamo indicato le costanti di miglior approssimazione $(n+p+1)$-esima [30]) ottenute risolvendo il seguente sistema di equazioni lineari nelle incognite $a_i^{(n)}$:

$$\sum_{i=-p}^{n} (w_h, w_i)_1 a_i^{(n)} = (\log|z - z_{k+1}|,\ w_h)_1$$
$$(h = -p,\ -p+1,\ \ldots,\ -1, 0, 1, 2, \ldots, n).$$

In particolare, relativamente alla costante $a_{-p}^{(n)}$, ricordando le (36), si trova:

$$a_{-p}^{(n)} = \frac{(\log|z - z_{k+1}|,\ \tau_{k+1})_1 - \sum\limits_{i=-p+1}^{n} (\log|z - z_{k+1}|, w_i)_1 (\tau_{k+1}, w_i)_1}{(\tau_{k+1}, \tau_{k+1})_1 - \sum\limits_{i=-p+1}^{n} [(\tau_{k+1}, w_i)_1]^2}.$$

[30]) Cfr. [10], pag. 208.

La convergenza della successione approssimante il $\log|z-z_{k+1}|$ in $\mathfrak{S}_1$ implica la convergenza puntuale della stessa alla funzione $\log|z-z_{k+1}|$ uniformemente rispetto a z variabile su C, e, pertanto, riesce:

$$(39)\qquad \lim_{n\to\infty}\,[a_{-p}^{(n)}\tau_{k+1}(z)+\sum_{i=-p+1}^{n} a_i^{(n)}w_i(z)] = \log|z-z_{k+1}|\ ^{31}).$$

Proviamo che:

$$\lim_{n\to\infty} a_{-p}^{(n)} = a_{-p}^{(\infty)} \neq 0\,.$$

A tale scopo dimostriamo dapprima che:

$$(\tau_{k+1},\tau_{k+1})_1 - \sum_{i=-p+1}^{+\infty}[(\tau_{k+1},w_i)_1]^2 > 0\ ^{32}).$$

Supponiamo, per assurdo, che riesca:

$$(40)\qquad (\tau_{k+1},\tau_{k+1})_1 = \sum_{i=-p+1}^{+\infty}[(\tau_{k+1},w_i)_1]^2\,.$$

Il sussistere di tale relazione permette di affermare che se dal sistema completo $\{\tau_{k+1}(z);\ w_i(z)\}$ $(i\geqslant -p+1)$ si toglie la funzione $\tau_{k+1}(z)$, il sistema ortonormale $\{w_i(z)\}$ $(i\geqslant -p+1)$ è ancora completo in $\mathfrak{S}_1$ e pertanto che lo è il sistema:

$$(41)\qquad \{\log|z-z_1|,\ \log|z-z_2|,\ \ldots,\ \log|z-z_k|,\ \tau_{k+2}(z),\ \ldots,\ \tau_p(z);\ \omega_r(z)\}\qquad (r\geqslant 0)$$

dal quale $\{w_i(z)\}$ è stato dedotto mediante ortonormalizzazione per mezzo del prodotto scalare in $\mathfrak{S}_1$.

---

[31]) Basta ripetere un ragionamento perfettamente analogo a quello svolto per provare la completezza dello spazio $\mathfrak{S}_1$ (cfr. [14]).

[32]) La serie $\sum_{i=-p+1}^{+\infty}[(\tau_{k+1},w_i)_1]^2$ è convergente e riesce:

$$\sum_{i=-p+1}^{+\infty}[(\tau_{k+1},w_i)_1]^2 \leqslant (\tau_{k+1},\tau_{k+1})_1\,,$$

(cfr. [10], pag. 198).

In base a ciò la funzione $\log|z-z_{k+1}|$ $(z \in C)$, come ogni funzione di $\mathfrak{S}_1$, può venir approssimata in $\mathfrak{S}_1$ mediante le funzioni del sistema (41). Indichiamo con $b_i^{(n)}$ le costanti di miglior approssimazione $(n+p)$ -esima ad essa relative; si avrà, uniformemente al variare di z su C e quindi di z in A:

$$
\begin{aligned}
(42)\quad \log|z-z_{k+1}| = \lim_{n\to\infty} \{ & b^{(n)}_{-p+1}\log|z-z_1| + \\
& + b^{(n)}_{-p+2}\log|z-z_2| + \ldots + \\
& + \ldots + b^{(n)}_{-p+k}\log|z-z_k| + b^{(n)}_{-p+k+1}\tau_{k+2}(z) + \\
& + b^{(n)}_{-p+k+2}\tau_{k+3}(z) + \ldots + b^{(n)}_{-1}\tau_p(z) + \\
& + \sum_{h=0}^{n} b_h^{(n)}\omega_h(z)\} .
\end{aligned}
$$

Consideriamo la curva Γ_{k+1} (cfr. pag. 27); si ha:

$$
\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_{k+1}} \frac{\partial}{\partial\nu_z}\log|z-z_{k+1}|\, d_z s = 1 ,
$$

laddove, qualunque sia il fissato intero positivo n, riesce:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\Big\{ & b^{(n)}_{-p+1}\int_{\Gamma_{k+1}} \frac{\partial}{\partial\nu_z}\log|z-z_1|\, d_z s + \ldots + b^{(n)}_{-p+k} \cdot \\
& \cdot \int_{\Gamma_{k+1}} \frac{\partial}{\partial\nu_z}\log|z-z_k|\, d_z s + b^{(n)}_{-p+k+1}\int_{\Gamma_{k+1}} \frac{\partial}{\partial\nu_z}\tau_{k+2}(z) d_z s + \ldots \\
& \ldots + b^{(n)}_{-1}\int_{\Gamma_{k+1}} \frac{\partial}{\partial\nu_z}\tau_p(z) d_z s + \sum_{h=1}^{n} b_h^{(n)}\int_{\Gamma_{k+1}} \frac{\partial}{\partial\nu_z}\omega_h(z) d_z s\Big\} = 0 .
\end{aligned}
$$

La (42) è pertanto assurda e quindi lo è la (40).

Supponiamo ora, sempre per assurdo, che $\lim\limits_{n\to\infty} a^{(n)}_{-p} = 0$, e cioè che:

$$
\begin{aligned}
(43)\quad & (\log|z-z_{k+1}|, \tau_{k+1}(z))_1 - \\
& - \sum_{i=-p+1}^{+\infty} (\log|z-z_{k+1}|, w_i)_1 (\tau_{k+1}(z), w_i(z))_1 = 0 .
\end{aligned}
$$

Poniamo:

$$w(z) = \frac{\tau_{k+1}(z) - \sum_{i=-p+1}^{+\infty} (\tau_{k+1}, w_i)_1 w_i(z)}{\left\{(\tau_{k+1}, \tau_{k+1})_1 - \sum_{i=-p+1}^{+\infty} [(\tau_{k+1}, w_i)_1]^2\right\}^{1/2}}.$$

Poichè $\{w_i\}$ $(i \geqslant -p+1)$ è ortonormale, riesce: $(w, w)_1 = 1$, e, per $i \geqslant -p+1$:

$$(w, w_i)_1 = \frac{(\tau_{k+1}, w_i)_1 - \sum_{j=-p+1}^{+\infty} (\tau_{k+1}, w_j)_1 (w_i, w_j)_1}{\left\{(\tau_{k+1}, \tau_{k+1})_1 - \sum_{j=-p+1}^{+\infty} [(\tau_{k+1}, w_j)_1]^2\right\}^{1/2}} =$$

$$= \frac{(\tau_{k+1}, w_i)_1 - (\tau_{k+1}, w_i)_1}{\left\{(\tau_{k+1}, \tau_{k+1})_1 - \sum_{j=-p+1}^{+\infty} [(\tau_{k+1}, w_j)_1]^2\right\}^{1/2}} = 0.$$

Pertanto il sistema di funzioni $\{w(z); w_i(z)\}$ $(z \in C;$ $i \geqslant -p+1)$ è ortonormale e completo in $\mathfrak{S}_1$ [33]).

Per la funzione $\log|z - z_{k+1}|$ $(z \in C)$ di $\mathfrak{S}_1$ si ha allora:

$$\lim_{n\to\infty} \Big\| \log|z - z_{k+1}| - \Big\{(\log|z - z_{k+1}|, w)_1 w + \\ + \sum_{i=-p+1}^{n} (\log|z - z_{k+1}|, w_i)_1 w_i\Big\}\Big\|^2 = 0 \text{ [34])}$$

---

[33]) Sia $(f, w)_1 = 0$, $(f, w_i)_1 = 0$ $(i \geqslant -p+1)$; si ha, per la completezza in $\mathfrak{S}_1$ del sistema $\{\tau_{k+1}; w_i\}$ $(i \geqslant -p+1)$:

$$0 = (f, w)_1 = (f, \tau_{k+1})_1 - \sum_{i=-p+1}^{+\infty} (\tau_{k+1}, w_i)_1 (f, w_i)_1 = (f, \tau_{k+1})_1,$$

e quindi f verifica anche le condizioni:

$$(f, \tau_{k+1})_1 = 0, \quad (f, w_i)_1 = 0 \qquad (i \geqslant -p+1).$$

Pertanto $f = 0$ e il sistema $\{w; w_i\}$ $(i \geqslant -p+1)$ è completo.

[34]) Abbiamo posto $\|v\|^2 = (v, v)_1$. In questo caso, per l'ortonormalità del sistema, le costanti di miglior approssimazione di $\log|z - z_{k+1}|$ sono le sue coordinate di Fourier.

e quindi, uniformemente rispetto a z variabile su C (ed in A), riesce:

$$(44) \qquad \log|z - z_{k+1}| = \lim_{n\to\infty} \{(\log|z - z_{k+1}|, w)_1 w + \\ + \sum_{i=-p+1}^{n} (\log|z - z_{k+1}|, w_i)_1 w_i\} .$$

Essendo, per la (43):

$$(\log|z - z_{k+1}|, w)_1 = \\ = \frac{(\log|z - z_{k+1}|, \tau_{k+1})_1 - \sum\limits_{i=-p+1}^{+\infty} (\log|z - z_{k+1}|, w_i)_1 (\tau_{k+1}, w_i)_1}{\{(\tau_{k+1}, \tau_{k+1})_1 - \sum\limits_{i=-p+1}^{+\infty} [(\tau_{k+1}, w_i)_1]^2\}^{1/2}} = 0 ,$$

ne segue:

$$\log|z - z_{k+1}| = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=-p+1}^{n} (\log|z - z_{k+1}|, w_i)_1 w_i .$$

Relativamente alla curva Γ_{k+1} (cfr. pag. 27) si ha:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_{k+1}} \frac{\partial}{\partial \nu_z} \log|z - z_{k+1}|\, d_z s = 1 ; \quad \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_{k+1}} \frac{\partial}{\partial \nu_z} w_i(z) d_z s = 0 \\ (i \geqslant -p+1)$$

e quindi la (44) è assurda. Pertanto, è $a_{-p}^{(\infty)} \neq 0$.

Sia infine f un'arbitraria funzione di $\mathfrak{S}_1$ tale che:

$$(45) \qquad (\log|z - z_{k+1}|, f)_1 = 0 , \quad (w_i, f)_1 = 0 \\ (i \geqslant -p+1) ;$$

tenendo presente la (39) si ha:

$$0 = (\log|z - z_{k+1}|, f)_1 = \lim_{n\to\infty} [a_{-p}^{(n)}(\tau_{k+1}, f)_1 + \\ + \sum_{i=-p+1}^{n} a_i^{(n)}(w_i, f)_1] = a_{-p}^{(\infty)}(\tau_{k+1}, f)_1$$

e quindi, verificando f le (45), essa verifica anche le condizioni:

$$(\tau_{k+1}, f)_1 = 0 , \qquad (w_i, f)_1 = 0 \qquad (i \geqslant -p+1).$$

Per la supposta completezza del sistema $\{\tau_{k+1}; w_i\}$ $(i \geqslant -p+1)$ in $\mathfrak{S}_1$ segue allora $f = 0$. Da ciò la tesi del teorema.

Possiamo dimostrare un ulteriore teorema di completezza per il sistema $\{\omega_h(z)\}$ $(z \in A; h \geqslant -p)$.

Indichiamo con $\mathfrak{S}$ l'insieme lineare delle funzioni reali $u(z)$ continue in $A+C$, di classe $C^{(2)}(A)$, armoniche in A, tali che $|\operatorname{grad} u|^2$ sia sommabile in A ed inoltre tali che $u(z_0) = 0$, essendo z_0 un punto fissato del campo A.

Mediante la seguente definizione di prodotto scalare:

$$(u, v) = \iint_A \operatorname{grad} u \times \operatorname{grad} v \, dxdy ,$$

$\mathfrak{S}$ è uno spazio di Hilbert [35]).

Sussiste il teorema:

VIII. *Se A è propriamente regolare di classe $C_H^{(1)}$, il sistema $\{\omega_h(z) - \omega_h(z_0)\}$ $(z \in A; h \geqslant -p)$ è completo in $\mathfrak{S}$.*

Sia u una funzione di $\mathfrak{S}$ tale che:

$$(46) \qquad \iint_A \operatorname{grad} u \times \operatorname{grad} \omega_h dxdy = 0 \qquad (h \geqslant -p);$$

---

[35]) Se $\{u^{(n)}\}$ è una successione di funzioni di $\mathfrak{S}$ verificante in $\mathfrak{S}$ la condizione di Cauchy, per una classica disuguaglianza relativa alle funzioni armoniche (cfr. [10], pag. 488), la successione di vettori: $\{\operatorname{grad} u^{(n)}\}$ converge uniformemente in A. Potendosi poi stabilire per le funzioni di $\mathfrak{S}$, fissato z in A, una formola di maggiorazione del tipo seguente:

$$|u(z)|^2 \leqslant H_T \iint_A |\operatorname{grad} u|^2 dxdy ,$$

con H_T costante positiva dipendente esclusivamente da un insieme chiuso T contenuto in A e contenente z (cfr. [10], pag. 488), ne segue che $\{u^{(n)}\}$ converge uniformemente in A ad una funzione u di $\mathfrak{S}$. Da ciò la completezza dello spazio $\mathfrak{S}$.

per la formula di Green le (46) divengono:

$$\int_C u \frac{\partial}{\partial n} \omega_h d_z s = 0 \qquad (h \geqslant -p)$$

e queste implicano (teor. V) $u =$ cost su C e quindi $u =$ cost $= 0$ in A data l'appartenenza di u ad $\mathfrak{S}$. Da ciò la tesi.

9. *Teoremi di completezza relativi a un sistema costruito con i monomi.*

Indichiamo con $\mathfrak{H}^{(0)}$ l'insieme lineare dei vettori a due componenti: $f \equiv [f_1, f_2]$ dove $f_1(z)$ è una funzione reale di z, variabile su C, e appartenente allo spazio $\mathfrak{S}_0$, cioè tale da riuscire — come funzione dell'arco s del punto z sulla frontiera — di quadrato sommabile, ed $f_2(z)$ è una funzione reale definita in A ed ivi di quadrato sommabile.

$\mathfrak{H}^{(0)}$ può riguardarsi come uno spazio hilbertiano (completo) [36]) definendo il prodotto scalare di due vettori $f \equiv [f_1, f_2]$ e $g \equiv \equiv [g_1, g_2]$ al modo seguente:

$$(f, g)^{(0)} = \int_C f_1(z) g_1(z) d_z s + \iint_A f_2(z) g_2(z) dx dy \,.$$

Accanto allo spazio $\mathfrak{H}^{(0)}$ consideriamo lo spazio di Hilbert $\mathfrak{H}^{(1)}$ dei vettori $f \equiv [f_1, f_2]$ con la sola differenza rispetto ad $\mathfrak{H}^{(0)}$ che f_1 appartiene ad $\mathfrak{S}_1$ e con la seguente definizione di prodotto scalare:

$$(f, g)^{(1)} = \int_C \left[f_1(z) g_1(z) + \frac{\partial f_1}{\partial s} \frac{\partial g_1}{\partial s} \right] d_z s + \iint_A f_2(z) g_2(z) dx dy \,.$$

Consideriamo il sistema di tutti i monomi nelle due variabili

---

[36]) Cfr. [10], pag. 468, e [22], pag. 229.

x e y: $\{x^h y^k\}$ $(h, k = 0, 1, 2, \ldots)$ e indichiamo con $\{\mu_r(z)\}$ $(r \geqslant 0;$ $z = x + iy)$ il sistema da esso dedotto ordinandoli in successione.

Sussistono i teoremi:

IX. *Se A è propriamente regolare di classe $C_H^{(1)}$, il sistema:* $\{[\mu_r, \Delta_2\mu_r]\}$ *è completo in* $\mathfrak{H}^{(0)}$ [37]).

X. *Se A è propriamente regolare di classe $C_H^{(1)}$, il sistema* $\{[\mu_r, \Delta_2\mu_r]\}$ *è completo in* $\mathfrak{H}^{(1)}$.

Sia $f \equiv [f_1, f_2]$ un vettore di $\mathfrak{H}^{(1)}$ tale che:

$$(47) \quad \int_C \left[f_1(z)\mu_r(z) + \frac{\partial f_1}{\partial s}\frac{\partial \mu_r}{\partial s} \right] d_z s + \iint_A f_2(z)\Delta_2\mu_r(z)dxdy = 0 \qquad (r \geqslant 0);$$

proviamo che $f_1 = 0$ su C e $f_2 = 0$ quasi ovunque in A.

Sia R un dominio rettangolare contenente $A + C$, $z = x + iy$ un punto di R e $\zeta = \xi + i\eta$ un punto del campo complementare di R avente da R distanza positiva. Fissato ζ, la funzione $\log|z-\zeta|$ è — come funzione delle variabili x e y — di classe $C^{(2)}(R)$: si può allora costruire una successione di polinomi $\{P_r(z)\}$ $(r \geqslant 0)$ tale che, uniformemente al variare di z in R, $\{P_r(z)\}$ e le rispettive successioni derivate parziali prime e seconde convergano a $\log|z - \zeta|$ e alle relative derivate parziali prime e seconde [38]). Le (46) implicano allora:

$$\int_C \left[f_1(z)P_r(z) + \frac{\partial f_1}{\partial s}\frac{\partial P_r}{\partial s} \right] d_z s + \iint_A f_2(z)\Delta_2 P_r(z)dxdy = 0 \qquad (r \geqslant 0)$$

e quindi, al limite per $r \to \infty$, attesa l'armonicità di $\log|z - \zeta|$,

[37]) Questo teorema trovasi già dimostrato in una mia nota (cfr. [6]), nel caso più generale che A appartenga ad uno spazio euclideo ad n dimensioni. Sempre in [6] si è poi data una generalizzazione del teorema in questione, sostituendo all'operatore Δ_2 di Laplace un operatore del secondo ordine di tipo ellittico, verificante ipotesi opportune.

[38]) Cfr. [24], pag. 534, teor. XI'.

la funzione:

$$v(\zeta) = \int_C \left[f_1(z) \log |z - \zeta| + \frac{\partial f_1}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s_z} \log |z - \zeta| \right] d_z s$$

risulta nulla nel campo complementare di R e quindi nel campo complementare del dominio $D(C_0)$.

Fissato un punto ζ in $D(C_k) - C_k$, $(k = 1, 2, \ldots, p)$ e, detto $I(r_k, \zeta)$ un intorno circolare di centro il punto ζ e di raggio r_k tale che $I(r_k, \zeta)$ sia interno a $D(C_k) - C_k$, poniamo:

$$U(z) \begin{cases} = \log |z - \zeta| & \text{per} \quad z \in R - I(r_k, \zeta) \\ = -\dfrac{|z - \zeta|^4}{4r_k^4} - \dfrac{|z - \zeta|^2}{r_k^2} + \log r_k - \dfrac{3}{4} & \text{per} \quad z \in I(r_k, \zeta). \end{cases}$$

Si prova facilmente che la funzione $U(z)$ è di classe $C^{(2)}(R)$ [39]) e pertanto, come già in precedenza, esiste una successione $\{Q_r(z)\}$ di polinomi approssimante $U(z)$, uniformemente assieme alle sue derivate parziali prime e seconde. Riesce, per le (47):

$$\int_C \left[f_1(z) Q_r(z) + \frac{\partial f_1}{\partial s} \frac{\partial Q_r}{\partial s} \right] d_z s + \iint_A f_2(z) \Delta_2 Q_r(z) dx dy = 0$$

e, al limite per $r \to \infty$:

$$v(\zeta) = \int_C \left[f_1(z) \log |z - \zeta| + \frac{\partial f_1}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s_z} \log |z - \zeta| \right] d_z s = 0 \, .$$

$v(\zeta)$ risulta pertanto identicamente nulla nel campo complementare del dominio $A + C$. Da tale identità, sfruttando gli sviluppi (17) e (18) si trae, rispettivamente:

$$(48) \qquad \begin{aligned} &(f_1, \omega_0)_1 = 0 \; ; \\ &(f_1, \omega_{(2p+2)k-(2p+1)})_1 = 0 \; ; \\ &(f_1, \omega_{(2p+2)k-2p})_1 = 0 \end{aligned} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

[39]) Cfr. [26], pag. 178.

e

$$(f_1, \omega_{-i})_1 = 0\ ;$$

(49) $$(f_1, \omega_{(2p+2)k-(2p+1)+2i})_1 = 0\ ;$$

$$(f_1, \omega_{(2p+2)k-2p+2i})_1 = 0$$

$$(k = 1, 2, \ldots \text{ ed } i = 1, 2, \ldots, p \quad \text{per ogni } k).$$

Le (48) e (49), per la già acquisita completezza del sistema $\{\omega_h(z)\}$ $(h \geqslant -p)$ nello spazio $\mathfrak{S}_1$, implicano $f_1 = 0$ su C.

Fissiamo un arbitrario polinomio $Q(x, y)$; si può sempre costruire un polinomio $\Gamma(x, y)$ tale che $\Delta_2\Gamma(x, y) = Q(x, y)$ [40]) e quindi, dalle (47) si trae: $\iint_A f_2(z)Q(z)dxdy = 0$ qualunque sia Q. Ne segue $f_2 = 0$ quasi ovunque in A [11]) e quindi la tesi del teorema.

10. *Il sistema di funzioni $\{\Omega_h(z)\}$ $(h \geqslant 0)$ e sua completezza in un particolare spazio hilbertiano.*

Consideriamo le funzioni:

$$\log|z - z_i|\ ; \quad Re\,(z - z_i)\log|z - z_i|\,,$$

$$Im\,(z - z_i)\log|z - z_i|\ ; \quad |z - z_i|^2\log|z - z_i|$$

$$(i = 1, 2, \ldots, p)$$

$$1,\ |z|^2,$$

$$Re\, z^k, \quad |z|^2\, Re\, z^k, \quad Im\, z^k, \quad |z|^2\, Im\, z^k$$

$$Re\,(z - z_i)^{-k}, \quad |z - z_i|^2\, Re\,(z - z_i)^{-k},$$

$$Im\,(z - z_i)^{-k}, \quad |z - z_i|^2\, Im\,(z - z_i)^{-k}$$

$$(k = 1, 2, \ldots;\ i = 1, 2, \ldots, p \quad \text{per ogni } k);$$

---

[40]) Siano t e $\bar{t}$ due variabili complesse coniugate e consideriamo le sostituzioni: $t = \frac{1}{2}(x - iy)$; $\bar{t} = \frac{1}{2}(x + iy)$; $x = t + \bar{t}$; $y = t - \bar{t}$.

Posto

$$\Gamma(x, y) = \Gamma[t + \bar{t},\ i(t - \bar{t})] = \Gamma^*(t, \bar{t})\,,$$

$$Q(x, y) = Q[t + \bar{t},\ i(t - \bar{t})] = Q^*(t, \bar{t})\,,$$

ordiniamole in successione e indichiamo con $\{\Omega_h(z)\}$ $(h \geqslant 0)$ il sistema così ottenuto [42]).

Sia $\mathfrak{M}^{(0)}$ la varietà lineare [43]) di $\mathfrak{H}^{(0)}$ (cfr. pag. 38) costituita dai vettori $f \equiv [f_1, f_2]$ di $\mathfrak{H}^{(0)}$ che hanno come seconda componente f_2 una funzione armonica in A e di quadrato sommabile in A.

Proviamo che la varietà $\mathfrak{M}^{(0)}$ è chiusa in $\mathfrak{H}^{(0)}$.

Sia $\{f^{(n)}\} \equiv \{[f_1^{(n)}, f_2^{(n)}]\}$ una successione di vettori di $\mathfrak{M}^{(0)}$ verificante la condizione di Cauchy. Basta ovviamente provare l'esistenza di una funzione $f_2(z)$, armonica in A e di quadrato sommabile tale che:

$$\lim_{n \to \infty} \iint_A | f_2(z) - f_2^{(n)}(z) |^2 \, dx dy = 0 .$$

Poichè, se ζ è un punto di A avente da C distanza $\delta(\zeta) > 0$, riesce, per ogni funzione armonica in A, di quadrato sommabile in A:

$$| u(\zeta) | \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\delta(\zeta)} \left\{ \iint_A | u(z) |^2 dx dy \right\}^{1/2},$$

dalla convergenza in media della successione $\{f_2^{(n)}\}$ in A segue intanto la convergenza uniforme in A di $\{f_2^{(n)}(z)\}$ ad una funzione — che indichiamo con f_2 — e che è necessariamente armonica

---

con facili calcoli si trova: $\Delta_2 \Gamma(x, y) = \dfrac{\partial^2}{\partial t \partial \bar{t}} \Gamma^*(t, \bar{t})$, e quindi è sufficiente cercare un polinomio $\Gamma^*(t, \bar{t})$ tale che:

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial \bar{t}} \Gamma^*(t, \bar{t}) = Q^*(t, \bar{t}) .$$

Ad esempio si può prendere: $\Gamma^*(t, \bar{t}) = \displaystyle\int_0^{\bar{t}} \left\{ \int_0^t Q^*(\xi, \tau) d\xi \right\} d\tau$.

[41]) Cfr. [22] pag. 229 e [10], pag. 454.

[42]) Se A è semplicemente connesso il sistema $\{\Omega_h\}$ può venir sostituito da quello di tutti i polinomi biarmonici in A.

[43]) Cfr. [10], pag. 73.

in A. Si vede poi facilmente che f_2 è di quadrato sommabile in A e che $\{f_2^{(n)}\}$ vi converge in media.

La varietà $\mathfrak{M}^{(0)}$ può pertanto considerarsi come uno spazio di Hilbert (completo) assumendo come prodotto scalare in $\mathfrak{M}^{(0)}$ quello di $\mathfrak{H}^{(0)}$.

Sussiste il seguente teorema:

XI. *Se il campo A è propriamente regolare di classe $C_H^{(1)}$ il sistema di vettori:*

$$\{[\Omega_h, \Delta_2\Omega_h]\} \qquad (h \geqslant 0) \tag{50}$$

è completo nello spazio $\mathfrak{M}^{(0)}$.

Sia $f \equiv [f_1, f_2]$ un arbitrario vettore di $\mathfrak{M}^{(0)}$ tale che:

$$\int_C f_1(z)\Omega_h(z)d_zs + \iint_A f_2(z)\Delta_2\Omega_h(z)dxdy = 0 \qquad (h \geqslant 0): \tag{51}$$

proviamo che allora si ha $f_1 = 0$ quasi ovunque su C ed $f_2 = 0$ in A.

Come già in precedenza, indichiamo con T un intorno circolare avente il centro nell'origine O e contenente $A + C$ e, considerato un sistema di coordinate polari, di polo O, siano (ϱ_0, θ_0) le coordinate di un punto $\zeta = \xi + i\eta$ fissato all'esterno di T e (ϱ, θ) quelle di un punto $z = x + iy$ variabile in T. Dalla (17) facilmente si deduce:

$$\begin{aligned} |z - \zeta|^2 \log|z - \zeta| &= \varrho_0^2 \log\varrho_0 + \varrho^2\log\varrho_0 - \\ &- 2\varrho\varrho_0\cos(\theta - \theta_0)\log\varrho_0 + \\ &+ \varrho^2 - \varrho\varrho_0\cos(\theta - \theta_0) + \\ &+ \frac{1}{2}\varrho^2\cos 2(\theta - \theta_0) - \\ &- \varrho^2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m(m+1)}\frac{\varrho^m}{\varrho_0^m}\cos m(\theta - \theta_0) + \\ &+ \varrho_0^2\sum_{m=3}^{\infty}\frac{1}{m(m-1)}\frac{\varrho^m}{\varrho_0^m}\cos m(\theta - \theta_0)\,. \end{aligned} \tag{52}$$

Lo sviluppo a secondo membro delle (52), fissato $\zeta \equiv (\varrho_0, \theta_0)$ all'esterno di T, converge uniformemente rispetto a z variabile in ogni insieme chiuso contenuto in T e, fissato $z \equiv (\varrho, \theta)$ in T, uniformemente rispetto a $\zeta \equiv (\varrho_0, \theta_0)$ variabile in ogni insieme chiuso contenuto nel complementare di T.

Considerata la funzione:

$$u(\zeta) = \int_C f_1(z) \mid z - \zeta \mid^2 \log \mid z - \zeta \mid d_z s + \\ + 4 \iint_A f_2(z)(\log \mid z - \zeta \mid + 1) dx dy ,$$

si prova facilmente, in virtù delle (17), (51) e (52) che essa è nulla nel complementare di $A + C$.

Ne segue che anche la funzione:

$$v(\zeta) = \int_C f_1(z) \log \mid z - \zeta \mid d_z s$$

è nulla nel campo complementare di $A + C$.

Per un teorema di Lichtenstein-Friedrichs [44]) u è continua in A, di quadrato sommabile in A, e possiede derivate prime e seconde di quadrato sommabile in A. Riesce inoltre, in A: $\Delta_2 u = 8\pi f_2$ e quindi u è una funzione biarmonica in A.

Alcuni teoremi sul potenziale logaritmico assicurano — tenute presenti le proprietà di cui gode la f_2 — che $u = 0$, $\dfrac{\partial u}{\partial u} = 0$ quasi ovunque su C [n normale a C, interna ad A, nei punti regolari di C] e quindi, per un teorema di unicità per il problema biarmonico generalizzato [45]), si trova $u = 0$ in A. Ne segue $f_2 = 0$ in A e quindi la tesi.

---

[44]) Cfr. [20] e [21].

[45]) Cfr. [15] pagg. 35-100, [26] pag. 245 e segg., [2] parte I, pagine 99-134.

11. *Un ulteriore teorema di completezza per il sistema* $\{\Omega_h(z)\}$ $(h \geqslant 0)$.

Sia $\mathfrak{M}^{(1)}$ la varietà lineare dello spazio $\mathfrak{H}^{(1)}$ (cfr. pag. 38) costituita dai vettori $f \equiv [f_1, f_2]$ di $\mathfrak{H}^{(1)}$ tali che f_2 sia anche continua in A ed ivi armonica.

Come già per $\mathfrak{M}^{(0)}$ è facile vedere che la varietà $\mathfrak{M}^{(1)}$ può riguardarsi come uno spazio di Hilbert (completo) assumendo come prodotto scalare di due vettori f e g di $\mathfrak{M}^{(1)}$ il loro prodotto $(f, g)^{(1)}$ in $\mathfrak{H}^{(1)}$.

Sussiste il teorema:

XII. *Se A è propriamente regolare di classe $C_H^{(1)}$, il sistema di vettori $\{[\Omega_h, \Delta_2\Omega_h]\}$ $(h \geqslant 0)$ è completo in $\mathfrak{M}^{(1)}$.*

Sia $f \equiv [f_1, f_2]$ un vettore di $\mathfrak{M}^{(1)}$ tale che:

$$(53) \quad \int_C \left[f_1(z)\Omega_h(z) + \frac{\partial f_1}{\partial s}\frac{\partial \Omega_h}{\partial s} \right] d_z s + \iint_A f_2(z)\Delta_2\Omega_h(z)dxdy = 0 \quad (h \geqslant 0);$$

proviamo che $f_1 = 0$ su C ed $f_2 = 0$ in A.

Le (53), scritte relativamente alle funzioni del sistema $\{\omega_h(z)\}$, per la già acquisita completezza di quel sistema nello spazio $\mathfrak{S}_1$ implicano $f_1 = 0$ su C.

Ripetendo dei ragionamenti svolti nel corso della dimostrazione del teorema precedente, si trova che la funzione:

$$v(\zeta) = \iint_A f_2(z) \log | z - \zeta | \, dxdy$$

è identicamente nulla nel complementare del dominio $A + C$ e, pertanto, il ragionamento finale della dimostrazione del teorema XI fornisce $f_2 = 0$ in A.

APPENDICE

Diremo che un campo piano A (semplicemente connesso) è *regolare* se è limitato e se la sua frontiera è costituita da un'unica curva semplice e chiusa e regolare (composta di archi di classe $C^{(1)}$). Diremo che A è *propriamente regolare* se è regolare e se sono verificate le condizioni *a*), *b*), *c*) e *d*) enunciate a pag. 6 e 7, salvo sostituire — dove interviene — la classe $C^{(1,l)}$ con la classe $C^{(1)}$.

Il lemma enunciato a pag. 7, consegue dal seguente teorema:

Condizione necessaria e sufficiente perchè un campo piano A sia propriamente regolare è che sia regolare e la sua frontiera $\mathfrak{F}A$ sia priva di cuspidi.

La condizione è necessaria. Sia z_i una cuspide di $\mathfrak{F}A$; se C_i e C_{i+1} sono i due archi di classe $C^{(1)}$, che hanno z_i come estremo comune, i due assi tangenti positivi a C_i e C_{i+1} in z_i formano un angolo uguale a π e, posto

$$\nu_{i+1} = \lim_{\substack{z \to z_i \\ \text{su } C_{i+1}}} \nu(z)\,, \qquad \nu_i = \lim_{\substack{z \to z_i \\ \text{su } C_i}} \nu(z)$$

anche ν_i e ν_{i+1} formano un angolo di ampiezza π. Esiste, per ipotesi, un numero λ_0 $(0 < \lambda_0 < 1)$ tale che:

$$\lim_{\substack{z \to z_i \\ \text{su } C_{i+1}}} \mu(z) \times \nu_{i+1} \geqslant \lambda_0\,, \qquad \lim_{\substack{z \to z_i \\ \text{su } C_i}} \mu(z) \times \nu_i \geqslant \lambda_0$$

e quindi dovrebbe essere $\mu(z_i) \times \nu_{i+1} \geqslant \lambda_0$, $\mu(z_i) \times \nu_i \geqslant \lambda_0$.

Ciò è assurdo.

La condizione è sufficiente. Ci serviremo del seguente lemma [46]):

Sia C una curva regolare semplice di classe $C^{(1)}$. Dato $\varepsilon > 0$ è possibile determinare un numero positivo p_ε tale che — fissati comunque il punto ζ su C ed il numero positivo $p < p_\varepsilon$ — indicato

---

[46]) Cfr. [19], pag. 189.

con $K(\zeta, p)$ *il dominio circolare di centro* ζ *e raggio* p, *sono verificate le seguenti circostanze:*

1) *L'insieme* $C \cap K(\zeta, p)$ *è una porzione di curva regolare la quale, assunta la tangente a* C *in* ζ *come asse* ξ *e la normale in tal punto come asse* η, *ammette la rappresentazione ordinaria* $\eta = \eta(\xi)$ *con* $\eta(\xi)$ *di classe* $C^{(1)}$.

2) *La funzione* $\eta'(\xi)$ *verifica la limitazione:* $|\eta'(\xi)| < \varepsilon$.

Dimostriamo che è soddisfatta la condizione *a*).

Sia ζ un punto regolare di $\mathfrak{F}A$; per il lemma ora ricordato è possibile costruire un dominio circolare $K(\zeta, R)$ di centro ζ e raggio R, che contenga punti di un solo dei C_i che compongono $\mathfrak{F}A$ ed inoltre tale che l'intersezione $\mathfrak{F}A \cap K(\zeta, R)$ sia un arco rappresentato in forma ordinaria da $\eta = \eta(\xi)$ con $|\eta'(\xi)| < 1$. Sia δ un numero positivo minore di R e ξ_0 un numero positivo tale che: $\xi_0 + \delta < \sqrt{R^2 - \xi_0^2}$.

Allora l'intervallo I di estremi $-\xi_0$ e ξ_0 e il corrispondente arco L di $\mathfrak{F}A \cap K(\zeta, R)$ soddisfano alla condizione espressa in *a*).

Passiamo alle condizioni *b*) e *c*).

Sia z_i un punto singolare ($i = 1, 2, \dots, r$). Indichiamo con θ_i la misura, non inferiore a zero e minore di 2π dell'angolo di cui deve ruotare, nel verso antiorario, l'asse tangente a C_{i+1} in z_i per sovrapporsi all'asse tangente negativo a C_i nel punto z_i [47]). Indichiamo con ε un numero positivo, minore di uno, e tale che: $\varepsilon < |\operatorname{tg} \theta_i/2|$.

In virtù del lemma premesso, esiste un numero positivo p_i ($i = 1, 2, \dots, r$) tale che l'intersezione di C_i [di C_{i+1}] con il dominio circolare $K(z_i, p_i)$ è una porzione di curva regolare la quale, assunto l'asse tangente a C_i [a C_{i+1}] in z_i come asse ξ e la normale a C_i [a C_{i+1}] come asse η, ammette la rappresentazione $\eta = \eta_i(\xi)$ con $|\eta_i'(\xi)| < \varepsilon$.

Possiamo supporre che le intersezioni di $K(z_i, p_i)$ con C_j [$j \neq i$; $j \neq i+1$] e con $K(z_j, p_j)$ ($j \neq i$) siano vuote. Inoltre,

---

[47]) Per comodità di dimostrazione, le convenzioni qui adottate differiscono in parte da quelle usate nel corso del lavoro.

ancora per il lemma ricordato, è possibile determinare un numero positivo p tale che, scelto comunque un punto z in $\mathfrak{F}A - \sum_{i=1}^{r} [K(z_i, p_i) - \mathfrak{F}K(z_i, p_i)]$, l'intersezione di $\mathfrak{F}A$ con $K(z, p)$ sia costituita da una porzione di curva regolare rappresentata — al modo consueto — con $\eta = \eta(\xi)$ e $|\eta'(\xi)| < 1$.

Siano $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{m_i}$ m_i punti a due a due distinti di C_i tali che il punto ζ_j segua ζ_{j-1} nello stesso verso secondo cui, su C_i, il punto z_i segue z_{i-1} e tali inoltre che riesca:

$$\zeta_1 \in \mathfrak{F}K(z_{i-1}, p_{i-1}), \quad \zeta_{m_i} \in \mathfrak{F}K(z_i, p_i), \quad \zeta_j \in K(\zeta_{j-1}, p)$$
$$(j = 1, 2, \ldots, m_i).$$

Siano $\zeta'_1, \zeta'_2, \ldots, \zeta'_{m_i+1}$, $m_i + 1$ punti di C_i a due a due distinti, tali che ζ'_1 sia interno all'arco $C_i \cap K(z_{i-1}, p_{i-1}) \cap \cap K(\zeta_1, p)$, ζ'_{m_i+1} sia interno all'arco $C_i \cap K(z_i, p_i) \cap K(\zeta_{m_i}, p)$, e ζ'_j sia interno all'arco di C_i che ha per estremi ζ_{j-1} e ζ_j $(j = = 2, 3, \ldots, m_i)$. Indichiamo con ν_j la normale a C_i in ζ'_j e con τ_j la bisettrice dell'angolo formato dall'asse tangente a C_{j+1} in z_j con l'asse tangente negativo a C_j nello stesso punto.

Sia ζ un punto di C_i; indichiamo con $\tau(\zeta)$ la retta che passa per il punto ζ e gode della seguente proprietà: se ζ è contenuto nell'arco di C_i di estremi z_{i-1} e ζ'_1, $\tau(\zeta)$ appartiene al fascio di rette individuato da τ_{i-1} e da ν_1, se ζ è contenuto nell'arco di C_i di estremi $\zeta'_{m_{i-1}}$ e z_i, $\tau(\zeta)$ appartiene al fascio individuato da τ_i e ν_{m_i+1}, se ζ è contenuto nell'arco di C_i di estremi ζ'_j e ζ'_{j+1} $[j = 1, 2, \ldots, m_i]$, $\tau(\zeta)$ appartiene al fascio di rette individuate da ν_j e ν_{j-1}.

La retta $\tau(\zeta)$ non è tangente a C_i nel punto ζ. Supponiamo infatti che ζ sia un punto dell'arco di estremi ζ'_j e ζ'_{j+1}; allora l'angolo, compreso fra 0 e $\pi/2$, formato da $\tau(\zeta)$ con la tangente a C_i in ζ_j è maggiore di $\pi/4$ mentre la tangente a C_i in ζ forma con l'asse ξ (tangente a C_i in ζ_j) un angolo $< \pi/4$. Inoltre la retta $\tau(\zeta)$ non può incontrare l'arco di estremi ζ'_j e ζ'_{j+1} in altri punti distinti da ζ. Infatti, una retta che abbia coefficiente angolare in valore assoluto maggiore di uno non può incontrare, in due punti distinti, una curva grafico di una funzione avente derivata in valore assoluto minore di uno. Analogamente si ragiona nel caso che l'arco contenente il punto ζ abbia per estremi uno dei punti z_i.

Indichiamo con $\mu(\zeta)$ il versore della retta $\tau(\zeta)$ avente origine nel punto ζ e orientato verso l'interno di A. Consideriamo gli archi di C_i: Γ_1 di estremi z_{i-1}, ζ_1', Γ_2 di estremi ζ_1', ζ_2', ... ecc. Ciascuno di questi archi ammette, per il lemma ricordato, una rappresentazione regolare di classe uno. Siano $x = x_j(t)$, $y = y_j(t)$ le equazioni parametriche di Γ_j; supposto che il fascio di rette relativo a Γ_j sia proprio (ν_j e ν_{j+1} non paralleli), indichiamo con $y - y_0 = \tau(x - x_0)$ l'equazione della retta generica di tale fascio. I coseni direttori di $\mu(\zeta)$ sono allora:

$$\left\{1 + \left[\frac{y(t) - y_0}{x(t) - x_0}\right]^2\right\}^{-1/2}, \quad \frac{y(t) - y_0}{x(t) - x_0}\left\{1 + \left[\frac{y(t) - y_0}{x(t) - x_0}\right]^2\right\}^{-1/2}$$

e queste sono ovviamente funzioni di classe uno. Analogamente si ragiona se il fascio è improprio. Ne viene allora che $\mu(\zeta)$ è funzione continua di ζ su C_i. Detta σ la misura (compresa fra 0 e π) dell'angolo che $\mu(\zeta)$ forma con $\nu(\zeta)$, esiste il massimo σ_i di σ al variare di ζ su C_i e si ha $\sigma_i < \pi/2$. Operando allo stesso modo sugli archi C_j ($j \neq i$) si perviene a costruire un versore $\mu(\zeta)$ che — come subito si verifica — soddisfa le condizioni *b*) e *c*) ove si ponga: $\sigma_0 = \max\limits_{1 \leq i \leq r} \sigma_i$.

Verifichiamo la condizione *d*).

Indichiamo con Φ_j il fascio di rette relativo a Γ_j; se Φ_j è un fascio proprio indichiamo con t_j la distanza del suo centro da Γ_j. Si ha ovviamente $t_j > 0$. Se Φ_j è improprio porremo $t_j = 1$.

Indichiamo con λ_j la distanza di Γ_j dall'insieme costituito dalla riunione degli archi Γ_i che compongono $\mathfrak{F}A$ e che non hanno punti in comune con Γ_j e sia ϱ_0 un numero positivo minore di:

$$\min\left[[t_1, t_2, \ldots, t_q;\ \frac{\lambda_1}{2}, \frac{\lambda_2}{2}, \ldots, \frac{\lambda_q}{2}\right].$$

Tale numero ϱ_0 soddisfa la condizione *d*). Infatti, detto Σ_j l'insieme dei punti descritto da $z = \zeta + \varrho\mu(\zeta)$ quando $0 \leqslant \varrho \leqslant \varrho_0$, $\zeta \in \Gamma_j$, si ha che Σ_j è privo di punti interni in comune con i due insiemi Σ_{j-1} e Σ_{j+1} relativi ai due archi Γ_{j-1} e Γ_{j+1} che hanno punti in comune con Γ_j.

D'altra parte, dato che $\varrho_0 \leqslant \min\limits_{1 \leq h \leq q} \frac{\lambda_h}{2}$, l'insieme Σ_j non ha punti in comune con alcuno dei $\Sigma_h (h \neq j, j-1 \text{ e } j+1)$.

La biunivocità della corrispondenza tra i punti ζ di Γ_j e i punti z della curva $z = \zeta + \varrho\mu(\zeta)$ [$\zeta \in \Gamma_j$, ϱ fissato in $(0, \varrho_0)$] è assicurata dal fatto che il centro del fascio Φ_j cade all'esterno di Σ_j.

BIBLIOGRAFIA

[1] AMERIO L.: *Sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno per le equazioni lineari del secondo ordine di tipo ellittico.* American Journal of Mathem., LXIX, 1947.

[2] ANCORA R. B.: *Problemi analitici connessi alla teoria della piastra elastica appoggiata.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. XX, 1951.

[3] BERGMAN S., SCHIFFER M.: *Kernel functions and elliptic differential equations in mathematical physics.* Acad. Press Inc. N. Y., 1953.

[4] BERNSTEIN S.: *Sur le principe de Dirichlet et le développement des fonctions harmoniques en séries de polynomes.* Comptes Rendus, 148, 1306-1308.

[5] CIMMINO G.: *Spazi hilbertiani di funzioni armoniche e questioni connesse.* Convegno Internazionale sulle Equazioni alle Derivate Parziali. Trieste, agosto 1954.

[6] COLAUTTI M. P.: *Sulla determinazione di un sistema completo di vettori.* Rend. Acc. Naz. dei Lincei (Scienze fis., mat. e naturali), s. VIII, vol. XXV, fasc. 5, 1958.

[7] COLAUTTI M. P.: *Sul problema di Neumann per l'equazione* $\Delta_2 u - \lambda c u = f$ *in un dominio a contorno angoloso.* Rend. Acc. delle Scienze di Torino (Scienze mat., fis. e naturali), vol. XVIII, fasc. 2, 1958-59.

[8] COURANT R., HILBERT D.: *Methoden der mathematischen Physik.* Berlin, Springer 1937, vol. II.

[9] DENY J.: *Systèmes totaux de fonctions harmoniques.* Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 1949.

[10] FICHERA G.: *Lezioni sulle trasformazioni lineari.* Istit. Matem. Univ. Trieste, vol. I, 1954.

[11] FICHERA G.: *Teoremi di completezza sulla frontiera di un dominio per taluni sistemi di funzioni.* Ann. di Mat. pura ed appl., s. IV, t. XXVII, 1948.

[12] FICHERA G.: *Alcuni recenti sviluppi della teoria dei problemi al contorno per le equazioni alle derivate parziali lineari.* Atti del Convegno Internazionale sulle Equazioni alle Derivate Parziali di Trieste, ed. Cremonese, Roma, 1954.

[13] FICHERA G.: *Decomposizione al modo di Poincaré delle funzioni bi-iperarmoniche in due variabili.* Rend. Acc. Scienze Fisiche e Matem. di Napoli, s. IV, vol. XI, 1940-41.

[14] FICHERA G.: *Sulla torsione elastica dei prismi cavi.* Rend. di Mat. e delle sue applicazioni, s. V, vol. XII, fasc. 1-2.

[15] FICHERA G.: *Sull'esistenza e sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno, relativi all'equilibrio di un corpo elastico.* Ann. Sc. Norm. sup. di Pisa - Sc. Fis. e Mat., s. III, vol. IV, fasc. 1-2, 1950.

[16] FICHERA G.: *Formole di maggiorazione connesse ad una classe di trasformazioni lineari.* Ann. di Mat. pura ed appl., s. IV, t. XXXVI, 1954.

[17] FICHERA G.: *Sui teoremi di esistenza della teoria del potenziale e della rappresentazione conforme.* Nota I e II Rend. Acc. Naz. dei Lincei (Sc. fis., mat. e naturali), s. VIII, vol. X, fasc. 5-6, 1951, 356-364; 452-458.

[18] FICHERA G.: *Una introduzione alla teoria delle equazioni integrali singolari.* Rend. di Mat. e delle sue applicazioni. Univ. Roma (1-2), vol. 17, 82-191, 1958.

[19] FICHERA G.: *Appunti del corso di Analisi Superiore.* Anno Accademico 1956-57. Istituto Mat. Univ. Roma.

[20] FRIEDRICHS K. O.: *A Theorem of Lichtenstein.* Duke Math. Journ., 14, 1947.

[21] LICHTENSTEIN L.: *Uber das Poissonsche Integral, ecc.* Journ. fuer di reine und angewandte mathem., 141, 1912.

[22] MC SHANE J. E.: *Integration.* Princeton University Press. N. J., 1944.

[23] MIRANDA C.: *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico.* Springer-Verlag, Berlin, 1955.

[24] PICONE M.: *Appunti di Analisi Superiore.* Rondinella, Napoli.

[25] PICONE M.: *Sur le Calcul de la deformation d'un solide élastique encastrè.* Congresso Internazionale di Meccanica applicata a Londra, 1948.

[26] PRINCIVALLI M. L.: *Sul sistema di equazioni lineari alle derivate parziali, relativo all'equilibrio delle volte cilindriche.* Ann. Sc. Norm. Sup. di Pisa, s. III, vol. VII, fasc. 3-4, 1954.

[27] ZIN G.: *Contributo alla risoluzione del problema piano di Dirichlet.* Atti Acc. Naz. dei Lincei. Rend. Sc. Fis. Mat. e Naturali, vol. XIV, fasc. VI, 1953.

[28] ZIN G.: *Sull'esistenza in un dominio jordaniano di funzioni olomorfe all'interno e convergenti al contorno verso valori assegnati.* Atti Acc. Naz. dei Lincei. Rend. Sc. Fis., mat. e naturali, vol. XIV, fasc. IV, 1953.

[29] ZIN G.: *Risoluzione del problema di Dirichlet.* Ann. Mat. pura ed applicata, s. IV, t. XXXV, 1953.