

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIOVANNI ZACHER

I gruppi risolubili con duale

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 31 (1961), p. 104-113

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1961__31__104_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

I GRUPPI RISOLUBILI CON DUALE

Nota () di GIOVANNI ZACHER (a Padova)*

In un ampio studio [6] sulle proprietà del reticolo dei sottogruppi di un gruppo Suzuki, fra le altre cose, ha caratterizzato i gruppi risolubili finiti \mathcal{G} forniti di duale, cioè col reticolo $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ dei sottogruppi dualmente isomorfo a quello di un gruppo finito $\overline{\mathcal{G}}$.

In questa Nota mi propongo di trasportare il risultato di Suzuki dai gruppi risolubili finiti e dotati di duale a quelli risolubili e d'ordine infinito. E trovo che la condizione di finitezza si può eliminare senza alterare sostanzialmente la caratterizzazione di Suzuki. Infatti dimostro che *un gruppo risolubile G è dotato di duale se, e solo se, esso è prodotto diretto (non cartesiano) di gruppi finiti irriducibili in senso reticolare, che abbiano gli ordini a due a due primi fra di loro e che siano risolubili e dotati di duale.*

1. - Incominciamo col premettere alcune convenzioni e col richiamare alcune proposizioni che ci saranno utili nel seguito.

Indichiamo con $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ il reticolo dei sottogruppi del gruppo \mathcal{G} . E denotiamo con $\mathfrak{Z}(p^n)$ un p -gruppo ciclico d'ordine p^n se $n = 1, 2, 3, \dots$, e un gruppo isomorfo al gruppo delle radici p -esime, p^2 -esime, ..., dell'unità (p numero primo) se $n = \infty$.

Allora:

(*) Pervenuta in redazione il 20 dicembre 1960.

Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, Padova.

I) $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ è una catena se e solo se \mathcal{G} è uno $\mathfrak{Z}(p^n)$.

Allo scopo si vegga il corollario 78.3 di [2] ricordando che \mathcal{G} è abeliano se $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ è un reticolo distributivo ¹⁾.

L'isomorfismo φ di $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ su $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ si dice singolare rispetto al numero primo p , se esiste un tal sottogruppo ciclico $\{a\}$ di \mathcal{G} , di ordine primo, che l'immagine $\varphi(\{a\})$ di $\{a\}$ mediante φ sia un gruppo ciclico d'ordine (primo) q con $q \neq p$. Invece i P -gruppi saranno i p -gruppi abeliani elementari, ed ogni gruppo unione di un p -gruppo abeliano elementare, \mathfrak{S} , e di un gruppo ciclico $\{b\}$ con l'ordine primo, q , diverso da p e con l'elemento generatore b soddisfacente per ogni a di \mathfrak{S} alla $bab^{-1} = a^r$, r essendo un intero che non dipende da a e che verifica le $r \not\equiv 1 \pmod{p}$, $r^n \equiv 1 \pmod{p}$.

Ciò premesso dimostriamo che:

II) Se \mathcal{G} è un p -gruppo localmente finito e φ un isomorfismo singolare (rispetto a p) di $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ su $\mathcal{L}(\mathcal{G})$, il gruppo \mathcal{G} è un p -gruppo abeliano elementare non ciclico, oppure uno $\mathfrak{Z}(p^n)$, e \mathcal{G} , rispettivamente, un P -gruppo non abeliano, oppure uno $\mathfrak{Z}(q^n)$, q essendo un numero primo diverso da p .

Se $\overline{\mathcal{G}}$ è uno $\mathfrak{Z}(p^n)$, il teorema segue dalla I. Escluso questo caso, sia a un elemento di \mathcal{G} di ordine p e tale che $\varphi(\{a\})$ abbia un ordine, q , diverso da p .

Poichè \mathcal{G} è localmente finito senza essere uno $\mathfrak{Z}(p^n)$, in \mathcal{G} esiste un elemento, b , tale che il gruppo $\{a, b\}$ generato da a e b sia un p -gruppo finito non ciclico. Allora se a_1 è un elemento di \mathcal{G} che non appartenga ad $\{a, b\}$, non è ciclico nemmeno il p -gruppo finito $\{a, b, a_1\}$. Ma l'ordine di $\varphi(\{a, b, a_1\})$ non è una potenza di p , quindi ²⁾ il gruppo $\{a, b, a_1\}$ è abeliano elementare d'ordine p^3 e $\varphi(\{a, b, a_1\})$ è un P -gruppo d'ordine qp^2 . Pertanto \mathcal{G} è un p -gruppo abeliano elementare e $\varphi(\mathcal{G})$ contiene un sistema locale $\{H_\alpha\}$ di P -gruppi non abeliani d'ordine qp^2 contenenti ciascuno $\varphi(\{a\})$. Quindi $\varphi(\mathcal{G})$ è un P -gruppo non abeliano.

Si riconosce facilmente anche che:

¹⁾ Vedasi pag. 2 in [1].

²⁾ Vedasi pag. 12 in [1].

III) Un P -gruppo è strutturalmente isomorfo ad un p -gruppo abeliano elementare.

E non è nemmeno difficile riconoscere che:

IV) Se il reticolo $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ è un prodotto cardinale, $\mathcal{L}(\mathcal{G}) = \prod_{\lambda} \mathcal{L}(\mathcal{G}_{\lambda})$, il gruppo \mathcal{G} è dotato di duale se e soltanto se \mathcal{G}_{λ} è tale per ogni λ .

2. - In questo numero ci proponiamo di dimostrare il seguente

LEMMA: *Un p -gruppo risolubile dotato di duale è finito.*

Il teorema è vero se il p -gruppo \mathcal{G} è per di più abeliano ³⁾. Quindi possiamo procedere per induzione completa rispetto alla lunghezza n della serie derivata del p -gruppo.

Il gruppo $\mathcal{G}/\mathcal{G}^{n-1}$ è un p -gruppo risolubile con duale, e la lunghezza della serie derivata è minore di n ; pertanto esso è finito ⁴⁾. E quindi, se a è un elemento del gruppo abeliano \mathcal{G} , il normalizzante $\mathcal{N}(a)$ di a in \mathcal{G} ha indice finito in \mathcal{G} ; epperò la classe completa $[a]$ dei coniugati di a genera un gruppo finito, normale in \mathcal{G} . Si conclude che il centro $\mathcal{C}(\mathcal{G})$ di \mathcal{G} non è identico. Ma $\mathcal{G}/\mathcal{C}(\mathcal{G})$ soddisfa alle stesse ipotesi poste per \mathcal{G} ; pertanto \mathcal{G} è dotato di serie centrale ascendente, vale a dire è uno ZA -gruppo. Indi \mathcal{G} è anche un N -gruppo ⁵⁾ cioè i sottogruppi propri di \mathcal{G} sono contenuti propriamente nei rispettivi normalizzanti. Ne segue che i sottogruppi massimi di \mathcal{G} sono normali in \mathcal{G} e quindi d'indice p in \mathcal{G} .

Sia ora $\overline{\mathcal{G}}$ uno dei duali di \mathcal{G} , e φ un isomorfismo duale di $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ su $\mathcal{L}(\overline{\mathcal{G}})$. E sia $\Phi_1(\mathcal{G})$ il gruppo di Frattini di \mathcal{G} . Allora $\mathcal{G}/\Phi_1(\mathcal{G})$ è un p -gruppo abeliano elementare con duale, e quindi è finito. Pertanto è finito anche il gruppo $\varphi(\Phi_1(\mathcal{G}))$ che coincide con l'unione $\mathfrak{F}_1(\overline{\mathcal{G}})$ dei sottogruppi minimi di $\overline{\mathcal{G}}$. Il gruppo $\Phi_1(\mathcal{G})$ è un N -gruppo in quanto sottogruppo di \mathcal{G} , ed è un p -gruppo

³⁾ Vedasi pag. 87 in [1].

⁴⁾ E da qui si potrebbe dedurre che n non può superare 3.

⁵⁾ Vedasi pag. 219 in [3].

con quale in quanto φ subordina un isomorfismo duale di $\mathcal{L}(\Phi_1(\mathcal{G}))$ su $\mathcal{L}(\mathcal{G}/\mathfrak{F}_1(\overline{\mathcal{G}}))$. In conclusione $\Phi_1(\mathcal{G})$ soddisfa a tutte le condizioni imposte a \mathcal{G} . Epperò se si definisce $\Phi_{n+1}(\mathcal{G})$ per $n = 1, 2, 3, \dots$ il sottogruppo di Frattini di $\Phi_n(\mathcal{G})$, la catena

$$(1) \quad \Phi_0(\mathcal{G}) = \mathcal{G} \supset \Phi_1(\mathcal{G}) \supset \Phi_2(\mathcal{G}) \supset \dots$$

è una catena discendente di sottogruppi di \mathcal{G} ; i gruppi $\Phi_1(\mathcal{G}), \Phi_2(\mathcal{G}), \dots$ sono mutati ciascuno in sè stesso da ogni automorfismo di $\mathcal{L}(\mathcal{G})$, vale a dire sono $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ -invarianti; ed i gruppi $\Phi_1(\mathcal{G})/\Phi_2(\mathcal{G}), \Phi_2(\mathcal{G})/\Phi_3(\mathcal{G}), \dots$ sono abeliani elementari finiti.

Alla (1) corrisponde, attraverso φ , una catena ascendente di sottogruppi $\mathcal{L}(\overline{\mathcal{G}})$ -invarianti di $\overline{\mathcal{G}}$.

$$(2) \quad F_0(\overline{\mathcal{G}}) = 1 \subset F_2(\overline{\mathcal{G}}) \subset F_2(\overline{\mathcal{G}}) \subset \dots$$

il gruppo $F_n(\overline{\mathcal{G}})/F_{n-2}(\overline{\mathcal{G}})$ essendo, in quanto duale di $\Phi_{n-1}(\mathcal{G})/\Phi(\mathcal{G})$ l'unione di sottogruppi minimi di $\overline{\mathcal{G}}/F_{n-2}(\overline{\mathcal{G}})$, ed avendo per lo stesso motivo, un ordine finito. Consideriamo ora il gruppo $\overline{\mathfrak{F}} = \bigcup_k \overline{\mathfrak{F}}_k$, ove k percorre l'insieme dei numeri naturali. Faremo vedere che $\overline{\mathfrak{F}}$ è ancora un p -gruppo se si esclude il caso che \mathcal{G} sia un p -gruppo ciclico o un p -gruppo abeliano elementare, dimostrando che $F_n(\overline{\mathcal{G}})$ è tale quando $n \geq 2$. Allo scopo si osservi che per $n \geq 2$, il gruppo $\mathcal{G}/\Phi_n(\mathcal{G})$ non è ciclico e non è abeliano elementare, mentre è autoduale in quanto p -gruppo finito con duale $*$). Quest'ultima circostanza implica che $\mathcal{G}/\Phi_n(\mathcal{G})$ e $F_n(\overline{\mathcal{G}})$ sono strutturalmente isomorfi. E da qui e dal fatto che il p -gruppo $\mathcal{G}/\Phi_n(\mathcal{G})$ non è ciclico e non è abeliano elementare si trae appunto che $F_n(\overline{\mathcal{G}})$ è un p -gruppo γ).

Oramai siamo in grado di far vedere che l'ordine di \mathcal{G} è finito. Ragioniamo per assurdo, e supponiamo che l'ordine di \mathcal{G} sia infinito. Allora il gruppo $F_n(\overline{\mathcal{G}})$ si può caratterizzare, per $n = 1, 2, \dots$ come il sottogruppo di $\overline{\mathcal{G}}$ generato dagli elementi d'ordine p^n . Se ne trae subito che tanto $\overline{\mathfrak{F}}$ quanto $\overline{\mathcal{G}}$ sono d'ordine infinito.

⁶) Vedasi pag. 89 in [1].

⁷) Vedasi pag. 12 in [1].

Ma se si tiene presente che $\overline{\mathcal{G}}$ è un gruppo periodico se ne trae anche che $\overline{\mathcal{F}} = \overline{\mathcal{G}}$. Si conclude che l'insieme A_n degli elementi di $\overline{\mathcal{G}}$ con l'ordine uguale a p^n è finito, e non è vuoto ⁸⁾. Gli insiemi A_1, A_2, A_3, \dots sono per di più disgiunti a due a due, e per un teorema di König ⁹⁾ esiste una successione a_1, a_2, a_3, \dots di elementi di $\overline{\mathcal{G}}$ rispettivamente contenuti in A_1, A_2, A_3, \dots siffatti da aversi $a_2^2 = a_1, a_3^2 = a_2, a_4^2 = a_3, \dots$; e il gruppo generato da a_1, a_2, \dots diciamolo $\overline{\mathcal{H}}$ è uno $\mathfrak{Z}(p^\infty)$ contenuto in $\overline{\mathcal{G}}$. Detta \mathcal{H} la controimmagine, $\varphi^{-1}(\overline{\mathcal{H}})$, di $\overline{\mathcal{H}}$, il gruppo \mathcal{H} è contenuto propriamente in \mathcal{G} e quindi il normalizzante $\mathfrak{N}(\mathcal{H})$ di \mathcal{H} contiene propriamente \mathcal{H} . Sia $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ un sottogruppo minimo di $\mathfrak{N}(\mathcal{H})/\mathcal{H}$. Allora $\varphi(\mathfrak{M})$ è massimo in $\varphi(\mathcal{H})$ cioè in $\overline{\mathcal{H}}$. Cosa assurda perchè $\overline{\mathcal{H}}$ è sprovvisto di sottogruppi massimi in quanto è uno $\mathfrak{Z}(p^\infty)$.

E la dimostrazione del lemma è terminata.

3. - Siamo ora in grado di dimostrare il seguente

TEOREMA: *Se \mathcal{G} è un gruppo risolubile con duale, esso è il prodotto diretto di gruppi finiti, irriducibili in senso reticolare, che hanno ordini a due a due primi tra loro e che sono (risolubili e) dotati di duale.*

Potremo, in virtù del lemma al n. 2, supporre senz'altro \mathcal{G} diverso da un p -gruppo.

Il teorema è noto per i gruppi abeliani, quindi per la dimostrazione procediamo per induzione completa rispetto alla lunghezza della serie derivata. Supponiamo dunque che la lunghezza n della serie derivata di \mathcal{G} sia maggiore di 1.

Il gruppo \mathcal{G} è periodico ¹⁰⁾ e quindi localmente finito, in quanto esso è anche risolubile ¹¹⁾.

Supponiamo in un primo momento che \mathcal{G} sia un p -gruppo.

Allo scopo si osservi che $\mathcal{G}/\mathcal{G}^{(n-1)}$, per l'ipotesi induttiva si presenta quale prodotto diretto (non cartesiano) di sottogruppi

⁸⁾ E questo basta, poichè $\overline{\mathcal{G}}$ è un p -gruppo, per concludere che $\overline{\mathcal{G}}$ è un gruppo a « strati finiti » secondo Černikov [4].

⁹⁾ Vedasi pag. 17 Corollario 2 in [5].

¹⁰⁾ Vedasi pag. 86 in [1].

¹¹⁾ Vedasi ad es. [3].

finiti, irriducibili in senso reticolare, risolubili e dotati di duale e con gli ordini a due a due primi fra di loro.

Si consideri un sottogruppo di Sylow, \mathfrak{S} , di \mathfrak{G} contenente $\mathfrak{G}^{(n-1)}$, e si supponga che i periodi degli elementi di \mathfrak{S} siano potenze del numero primo p .

A questo punto si presentano come possibili due sottocasi:

a) Almeno uno degli automorfismi di $\mathcal{L}(\mathfrak{G})$ su sè stesso subordina un isomorfismo strutturale singolare rispetto al numero primo p su \mathfrak{S} .

b) Nessun automorfismo di $\mathcal{L}(\mathfrak{G})$ su sè stesso subordina un isomorfismo singolare rispetto al numero primo p su \mathfrak{S} .

Consideriamo il primo sottocaso. E sia φ un automorfismo di $\mathcal{L}(\mathfrak{G})$ su sè stesso il quale subordina un isomorfismo singolare rispetto a p su \mathfrak{S} .

Allora in \mathfrak{S} esiste un sottogruppo $\{a\}$ d'ordine p siffatto che $\varphi(\{a\})$ abbia ordine un numero primo, q , diverso da p ; ed \mathfrak{S} a norma della prop. II, o è un gruppo abeliano oppure uno $\mathfrak{B}(p^m)$.

Incominciamo col far vedere che nelle ipotesi attuali si può escludere che \mathfrak{S} sia uno $\mathfrak{B}(p^m)$ con $m > 1$. Ragioniamo per assurdo, ed ammettiamo quindi che \mathfrak{S} sia uno $\mathfrak{B}(p^m)$ con $m > 1$. Allora $\varphi(\mathfrak{S})$ è uno $\mathfrak{B}(q^m)$, con $q \neq p$ (prop. I). Ne segue per l'ipotesi induttiva che $\varphi(\mathfrak{S})$ è finito, perchè finiti sono i gruppi di Sylow di \mathfrak{G} relativi a numeri primi diversi da p . Pertanto m è finito ed \mathfrak{S} è un gruppo ciclico finito. Sia ora \mathfrak{H} un sottogruppo finito di \mathfrak{G} che contenga propriamente \mathfrak{S} . L'automorfismo φ subordina su \mathfrak{H} un isomorfismo strutturale singolare di prima specie rispetto al numero primo p ¹²⁾. Quindi, come è noto¹³⁾, \mathfrak{H} è l'unione di \mathfrak{S} e di un sottogruppo normale \mathfrak{N} tale che $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{N} = 1$. Ma \mathfrak{S} contiene il gruppo $\mathfrak{G}^{(n-1)}$ normale in \mathfrak{G} , pertanto è $\mathfrak{G}^{(n-1)} \cup \mathfrak{N} = \mathfrak{G}^{(n-1)} \times \mathfrak{N}$. E questo è assurdo atteso il significato di $\mathfrak{G}^{(n-1)}$ e l'arbitrarietà di \mathfrak{H} . Osserviamo incidentalmente che quest'ultimo ragionamento ci permette anche di riconoscere che se \mathfrak{S} è uno $\mathfrak{B}(p)$ l'automorfismo φ subordina su \mathfrak{S} un isomorfismo singolare di seconda specie.

¹²⁾ Vedasi pag. 42-45 in [1].

¹³⁾ Vedasi loc. c. ¹²⁾.

Ci siamo quindi ricondotti a poter supporre che \mathfrak{S} sia un gruppo abeliano elementare. In tal caso consideriamo in \mathfrak{S} un sottogruppo finito, \mathfrak{K} , che contenga $\{a\}$ ed in \mathfrak{G} un sottogruppo finito \mathfrak{I} . Il gruppo $\mathfrak{Q} = \mathfrak{I} \cup \mathfrak{K}$ è finito. Dico che φ subordina su \mathfrak{Q} un isomorfismo singolare $\bar{\varphi}$ di seconda specie rispetto al numero primo p . Nel fatto la cosa segue dall'osservazione precedente se \mathfrak{S} è ciclico d'ordine p , e segue dall'ipotesi poste se \mathfrak{S} non è ciclico ¹⁴⁾. Pertanto $\mathfrak{K} \cup \varphi(\{a\})$ è un P -gruppo (non abeliano) ed \mathfrak{Q} si spezza nel prodotto diretto di $\mathfrak{K} \cup \varphi(\{a\})$ e di un altro sottogruppo il cui ordine è primo con quello di $\mathfrak{K} \cup \varphi(\{a\})$. Ne segue che il gruppo $\varphi(\{a\}) \cup \mathfrak{S}$, diciamolo \mathfrak{M} è un P -gruppo non abeliano e che ogni elemento di \mathfrak{G} di ordine primo con pq è permutabile con ogni elemento di \mathfrak{M} . A questo punto è facile vedere che \mathfrak{G} si può pensare come il prodotto diretto di un P -gruppo \mathfrak{M} e di un gruppo \mathfrak{R} , i cui elementi hanno gli ordini primi con pq : nel fatto basta osservare che se c e d sono due elementi di \mathfrak{G} con gli ordini primi con pq , ogni elemento del gruppo (finito) generato da c e d ha l'ordine primo con pq . Mostriamo adesso che \mathfrak{M} è finito: nel fatto, \mathfrak{M} è dotato di duale; quindi è dotato di duale, epperò è finito, anche il gruppo abeliano elementare a cui esso è strutturalmente isomorfo (prop. III).

Di qui e dalla struttura di $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}^{(n-1)}$, segue il teorema nel sottocaso *a*). Passiamo al sottocaso *b*). Basta dimostrare che \mathfrak{S} è finito e che \mathfrak{G} si spezza nel prodotto diretto di \mathfrak{S} e di un altro sottogruppo; perchè allora la conclusione si raggiunge di nuovo ricordando la struttura di $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}^{(n-1)}$. Incominciamo col far vedere che \mathfrak{S} è normale in \mathfrak{G} . Ragioniamo per assurdo. Dalla struttura di $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}^{(n-1)}$ segue che il normalizzante di \mathfrak{S} in \mathfrak{G} ha indice finito in \mathfrak{G} . Pertanto tutti i sottogruppi di Sylow di \mathfrak{G} relativi al numero primo p sono coniugati tra di loro ¹⁵⁾. E se si aggiunge l'ipotesi che \mathfrak{S} non sia normale in \mathfrak{G} e si tien conto di nuovo della struttura di $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}^{(n-1)}$, si riconosce che in \mathfrak{G} esiste almeno un sottogruppo \mathfrak{F} che contenga \mathfrak{G} e siffatto che $\mathfrak{F}/\mathfrak{G}^{(n-1)}$ sia un P -gruppo d'ordine pr , col numero primo r maggiore di p . Ne

¹⁴⁾ Vedasi loc. c. ¹²⁾.

¹⁵⁾ Vedasi ad es. [3].

segue che l'indice di $\mathcal{G}^{(n-1)}$ in \mathcal{S} è p , e che $\mathcal{G}^{(n-1)}$ è l'intersezione di \mathcal{S}_1 ed \mathcal{S}_2 per poco che \mathcal{S}_1 ed \mathcal{S}_2 siano due sottogruppi coniugati ad \mathcal{S} e distinti fra di loro. D'altra parte se φ è un qualunque automorfismo di $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ su sè stesso, risulta $\varphi(\mathcal{G}^{(n-1)}) = \varphi(\mathcal{S}_1) \cap \varphi(\mathcal{S}_2)$, epperò $\varphi(\mathcal{G}^{(n-1)}) = \mathcal{G}^{(n-1)}$, perchè $\varphi(\mathcal{S}_1)$ e $\varphi(\mathcal{S}_2)$ sono ancora per \mathcal{G} due sottogruppi di Sylow relativi al numero primo p . Vale a dire \mathcal{G} è $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ -invariante. Ma allora $\mathcal{G}^{(n-1)}$ è un p -gruppo risolubile con duale. Quindi è finito per il lemma del n. 2; pertanto è finito anche \mathcal{S} . Pertanto \mathcal{F} è $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ -invariante. Si conclude che \mathcal{F} è dotato di duale, epperò è un P -gruppo. Ma ciò implica che $\mathcal{G}^{(n-1)}$ sia identico, contro l'ipotesi fatta su n . Dunque \mathcal{S} , come si voleva, è normale in \mathcal{G} .

Mostriamo ora che \mathcal{S} è finito. Infatti \mathcal{S} è $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ -invariante, perchè esso è normale, e perchè nessuno degli automorfismi di $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ su sè stesso è singolare rispetto al numero primo p ; quindi \mathcal{S} è dotato di duale. Ma \mathcal{S} è anche un p -gruppo risolubile; pertanto esso è finito, come si voleva, sempre in virtù del lemma del n. 2.

Poichè \mathcal{G} è localmente finito, per completare lo studio del sottocaso b), basta dimostrare che l'unione di \mathcal{S} con un qualunque sottogruppo di Sylow di \mathcal{G} relativo ad un numero primo diverso da p coincide col prodotto diretto di \mathcal{S} per il sottogruppo.

Supponiamo per assurda ipotesi che in \mathcal{G} esistono sottogruppi di Sylow che non siano direttamente permutabili con \mathcal{S} e che siano relativi a numeri primi, q , diversi da p . I valori possibili per q sono in numero finito, perchè il centralizzante di \mathcal{S} in \mathcal{G} ha indice finito, in quanto \mathcal{S} è un sottogruppo finito normale. Siano q_1, q_2, \dots, q_t i valori possibili per q . Siano $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \dots, \mathcal{D}_t$ sottogruppi di Sylow di \mathcal{G} non permutabili direttamente con \mathcal{S} , e rispettivamente relativi ai numeri primi q_1, q_2, \dots, q_t . Essi sono ciclici perchè altrimenti le unioni $\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{S}, \dots, \mathcal{D}_t \cup \mathcal{S}$ sarebbero contenute in gruppi contenuti in gruppi finiti $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ -invarianti e quindi con duale; ma allora in virtù di risultati noti, i gruppi $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \dots, \mathcal{D}_t$ sarebbero direttamente permutabili con \mathcal{S} , contro l'ipotesi. Siano ora $q_1^{x_1}, \dots, q_t^{x_t}$ gli ordini rispettivi dei sottogruppi $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \dots, \mathcal{D}_t$. In virtù dell'ipotesi induttiva e del fatto che \mathcal{S} contiene $\mathcal{G}^{(n-1)}$, il gruppo $\mathcal{G}^{(n-1)}$ contiene un

sottogruppo \mathfrak{M} d'ordine $q_1^{\alpha_1} \dots q_t^{\alpha_t} p^\alpha$, se p^α è l'ordine di \mathfrak{G} . Il gruppo \mathfrak{M} è $\mathcal{L}(\mathfrak{G})$ -invariante; epperò è dotato di duale. Indi \mathfrak{M} è un P -gruppo non abeliano e \mathfrak{G} si spezza in un prodotto diretto del tipo $\mathfrak{M} \times \mathfrak{L}$, cosa assurda perchè \mathfrak{G} è $\mathcal{L}(\mathfrak{G})$ -invariante. E il sottocaso $b)$ è esaurito.

Per completare la dimostrazione del teorema, resta da esaminare il caso che $\mathfrak{G}^{(n-1)}$ non sia un p -gruppo.

Mostriamo anzitutto che gli ordini dei sottogruppi di Sylow di \mathfrak{G} sono finiti. Infatti, ammettiamo che la circostanza non sia vera per il numero primo p , e supponiamo $\mathfrak{G}_p^{(n-1)}$ sia, per $\mathfrak{G}^{(n-1)}$ un sottogruppo di Sylow relativo al numero primo p . Allora $\mathfrak{G}_p^{(n-1)}$ non è identico e posto $\mathfrak{G}^{(n-1)} = \mathfrak{G}_p^{(n-1)} \times {}_p\mathfrak{G}^{(n-1)}$, il sottogruppo $\mathfrak{G}/{}_p\mathfrak{G}^{(n-1)}$ conterrebbe dei gruppi di Sylow di ordine infinito. Cosa assurda in virtù dei risultati precedenti, perchè $\mathfrak{G}/{}_p\mathfrak{G}^{n-1}$ ha duale, ha come lunghezza della serie derivata n ed ha come derivato $(n-1)$ -esimo un p -gruppo.

Sia di nuovo $\mathfrak{G}_p^{(n-1)}$ un sottogruppo di Sylow (non identico) di $\mathfrak{G}^{(n-1)}$ relativo ad un certo numero primo p , e si ponga di nuovo $\mathfrak{G}^{(n-1)} = \mathfrak{G}_p^{n-1} \times {}_p\mathfrak{G}^{(n-1)}$. Allora $\mathfrak{G}/{}_p\mathfrak{G}^{(n-1)}$ è metabeliano, sempre in virtù dei risultati precedenti; quindi $n-1=1$, epperò anche \mathfrak{G} è metabeliano.

Sia ora \mathfrak{G}_q un sottogruppo di Sylow non normale in \mathfrak{G} e relativo al numero primo p . Il gruppo \mathfrak{G}_q non è contenuto in \mathfrak{G}' . Inoltre, sempre a norma dei risultati precedenti, \mathfrak{G}' contiene almeno un sottogruppo di Sylow siffatto che $\mathfrak{G}_q \cup \mathfrak{G}_p$ sia un P -gruppo non abeliano d'ordine qp , il numero primo p riuscendo maggiore di q . Mostriamo ora che il numero primo p è individuato. Ragioniamo di nuovo per assurdo e supponiamo che \mathfrak{G}_r sia un sottogruppo di Sylow relativo ad un numero primo r diverso da p e dotato di proprietà analoghe di \mathfrak{G}_p . Dalla struttura di $\mathfrak{G}/{}_p\mathfrak{G}'$ segue che l'unione $\mathfrak{G}_q \cup \mathfrak{G}_p$ ha un complemento, ${}^p\mathfrak{N}$, normale in \mathfrak{G} ¹⁶). Analogamente dalla struttura di $\mathfrak{G}/{}_r\mathfrak{G}'$ segue che $\mathfrak{G}_q \cup \mathfrak{G}_r$ ha un complemento, ${}^r\mathfrak{N}$, normale in \mathfrak{G} . Ma allora $\mathfrak{G} = (\mathfrak{G}_p \cup \mathfrak{G}_q \cup \mathfrak{G}_r) \cup ({}^p\mathfrak{N} \cap {}^r\mathfrak{N})$, $(\mathfrak{G}_p \cup \mathfrak{G}_q \cup \mathfrak{G}_r) \cup$

¹⁶) Rammentiamo che ${}^p\mathfrak{N}$ è un complemento di $\mathfrak{G}_p \cup \mathfrak{G}_q$, se ${}^p\mathfrak{N} \cup (\mathfrak{G}_p \cup \mathfrak{G}_q) = \mathfrak{G}$ e se ${}^p\mathfrak{N} \cap (\mathfrak{G}_p \cap \mathfrak{G}_q) = 1$.

$\cap (\mathcal{N} \cap \mathcal{N}) = 1$. Di qui segue che il gruppo $\mathcal{G}_p \cup \mathcal{G}_q \cup \mathcal{G}_r$ è isomorfo al gruppo $\mathcal{G}/\mathcal{N} \cap \mathcal{N}$, dotato di duale. Quindi anche il gruppo $\mathcal{G}_p \cup \mathcal{G}_q \cup \mathcal{G}_r$ è dotato di duale; cosa assurda perchè \mathcal{G}_r non è direttamente permutabile con \mathcal{G}_q . In modo del tutto analogo si dimostra che anche il numero primo q è individuato, facendo vedere che se il numero primo s è diverso da q , mancano in \mathcal{G} sottogruppi di Sylow relativi ad s i quali diano con \mathcal{G}_p unioni che siano P -gruppi. Nelle considerazioni precedenti è implicito poi che $\mathcal{G}_p \cup \mathcal{G}_q$ è normale in \mathcal{G} . Se ne deduce che \mathcal{G} è il prodotto diretto di gruppi risolubili finiti irriducibili in senso reticolare e con gli ordini a due a due primi tra loro. In virtù della prop. IV i fattori di questo prodotto diretto sono dotati di duale.

Donde il teorema enunciato all'inizio del numero.

Ma il teorema stesso si inverte in virtù della prop. IV e quindi la condizioni trovata non è soltanto necessaria ma anche sufficiente. Donde il teorema enunciato nella prefazione.

BIBLIOGRAFIA

- [1] SUZUKI M.: *Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups*, Springer Verlag, Berlin, 1956.
- [2] FUCHS A.: *Abelian groups*, Pergamon Press, London, 1960.
- [3] KUROSH K. A.: *The theory of groups*, vol. II, Chelsea Publ. Co. New York 1956.
- [4] CERNIKOV S. N.: *Infinite groups with finite layers*, Mat. Sbornik, vol. 22, 1948.
- [5] BERGE CL.: *Theorie des graphes et ses applications*, Dunod, Paris, 1958.
- [6] SUZUKI M.: *On the lattice of subgroups of finite groups*, Trans. Amer. Math. Soc. 70, 1951.