GIOVANNI PRODI

Tracce sulla frontiera delle funzioni di Beppo Levi

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 26 (1956), p. 36-60

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1956__26__36_0>

TRACCE SULLA FRONTIERA DELLE FUNZIONI DI BEPPO LEVI

Memoria (*) *di* GIOVANNI PRODI (*a Milano*)

Sia Ω un insieme aperto di uno spazio euclideo $E \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e sia Γ la frontiera di Ω. Indicheremo con $W(\Omega)$ la classe delle funzioni misurabili e localmente integrabili, dotate di derivate prime (in senso generalizzato) [1]) a quadrato integrabile in Ω. Ad ogni funzione $u \in W(\Omega)$ si può associare una funzione u^* coincidente quasi ovunque con u, che risulta assolutamente continua lungo quasi tutte le parallele ad un asse e conserva questa proprietà per qualsiasi rotazione degli assi [2]).

È ben nota l'importanza di questa classe per l'analisi; per ragioni di brevità, rimandiamo alla bibliografia, in particolare ai lavori [7], [9], [10], [4] per una esposizione dettagliata dell'argomento, che è stato considerato da parecchi punti di vista.

Il problema che qui vogliamo considerare è il seguente: sotto certe condizioni di regolarità per Γ si può parlare, come vedremo, di *traccia* di una funzione $u \in W(\Omega)$ su Γ. Si tratta allora di caratterizzare le funzioni definite su Γ che possono essere traccia di funzioni di W. Da quando Hadamard portò

(*) Pervenuta in Redazione il 7 luglio 1956.

Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Politecnico, Milano.

1) Cioè nel senso della teoria delle distribuzioni (Vol. L. Schwartz, [8], Vol. I, Cap. II).

2) Morrey, [7] Teorema 6, 3, pag. 195.

la sua nota obiezione al principio di Dirichlet [3]), non mi risulta che la questione sia più stata ripresa in forma generale. Una condizione sufficiente è stata assegnata da Miranda [6]: sotto certe ipotesi di regolarità per la frontiera, basta supporre che la funzione definita su questa soddisfi ad una condizione di Hölder con esponente $> 1/2$.

Nella prima parte del lavoro richiamo alcune nozioni e pongo alcune premesse che hanno lo scopo di ridurre il problema al suo aspetto più semplice; mi riduco così al caso di un semispazio. A questo punto, la trasformazione di Fourier fornisce lo strumento più importante.

La caratterizzazione è data in due forme; in una mi servo del prodotto integrale con un nucleo particolarmente semplice, nell'altra mi servo della nozione di derivata di ordine 1/2, secondo Riemann-Liouville.

Concludo poi con lo studio di alcune proprietà delle funzioni-traccia, considerate come spazio di Hilbert.

§ **1.** - Supponiamo che l'insieme aperto Ω sia connesso e limitato. Per esprimere la nostra ipotesi sulla frontiera Γ, premettiamo alcune convenzioni. Indicheremo con Λ l'insieme aperto di E così definito:

$$\Lambda \equiv \{ x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2 < 1 \ , \quad -1 < x_n < +1 \} .$$

Con Λ_+ indichiamo il sottoinsieme di Λ per cui è $x_n > 0$, con Λ_0 il sottinsieme per cui è $x_n = 0$, con Λ_- il sottoinsieme per cui è $x_n < 0$. Ciò posto, supporremo che [4])

I) *per ogni punto $z \in \Gamma$ si possa trovare un intorno $V(z)$ (in E) ed una corrispondenza $x' = A(x)$ che lo rappresenti*

---

[3]) Come è noto, Hadamard considerò il caso del cerchio e caratterizzò le funzioni in questione mediante una limitazione sui coefficienti di Fourier. Il semplice esempio di Hadamard sarà il nostro punto di partenza.

[4]) Questa è l'ipotesi adottata da Morrey ([7] p. 195).

biunivocamente su Λ, *in modo tale che*

A *e* A^{-1} *siano lipschitziane* (*uniformemente*)
$U(z) \cap \Omega$ *abbia come immagine* Λ_+
$U(z) \cap \Gamma$ *abbia come immagine* Λ_0.

Evidentemente, essendo Γ limitata, dalla copertura $\{U(z)\}$ si può estrarre una copertura finita.

Può essere utile osservare che la condizione I) è soddisfatta quando, nell'intorno di ogni suo punto, Γ ammetta, con una opportuna scelta del riferimento, una rappresentazione cartesiana esplicita del tipo

$$x_n = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$$

dove la φ è lipschitziana e i punti di Ω che si trovano nell'intorno suddetto soddisfano alla relazione $x_n > \varphi(x_1, \dots, x_{n-1})$.

Richiamiamo alcune proposizioni di cui faremo uso:

1] *Una trasformazione bilipschitziana, come la* A *che abbiamo considerato, tra due insiemi aperti* Ω *e* Ω' *fa corrispondere fra loro gli insiemi misurabili, in modo che il rapporto tra le misure si mantenga compreso tra due valori positivi* [5]).

Se poniamo $u(x) = u'(x')$ $(x' = A(x))$ *induciamo una corrispondenza tra* $W(\Omega)$ *e* $W(\Omega')$ *che è un isomorfismo riguardo alla quasi-norma* [6])

$$\|u\|_{W(\Omega)} = \left\{ \int_\Omega \sum_1^n {}_k \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (u \in W(\Omega)). \tag{1}$$

Noi indicheremo questa corrispondenza con la notazione $u' = A(u)$.

Nelle proposizioni che enunceremo ora, noi supporremo che Ω sia connesso, limitato e soddisfi alla I).

---

[5]) Cfr. [7] pag. 190-191.

[6]) Cfr. [7] Teorema 6, 1. Usiamo il termine di quasi-norma per $\|u\|_{W(\Omega)}$ perchè, come è ovvio, $\|u\|_{W(\Omega)} = 0$ non implica che sia $u = 0$. Per la definizione di isomorfismo tra spazi di Banach vd. [1], Cap. XI, § 6.

2] *Si può definire su Γ una misura ipersuperficiale che, nella rappresentazione parametrica indotta da A, si esprime mediante il classico integrale. Gli insiemi misurabili di Λ_0 corrispondono a insiemi misurabil su Γ e viceversa; il rapporto delle rispettive misure è compreso tra due costanti positive* [7]).

3] *Per ogni $u \in W(\Omega)$, si ha $u \in L^2(\Omega)$.* (Indichiamo con $L^2(\Omega)$ lo spazio delle funzioni a quadrato integrabile in Ω, con la solita norma) [8]).

Inoltre, detta c una costante reale, vale la disuguaglianza

$$\inf_c \| u + c \|_{L^2(\Omega)} \leq S \| u \|_{W(\Omega)}$$

dove la S dipende solo da Ω.

4] *Ogni funzione $u \in W(\Omega)$ può essere prolungata in un insieme aperto Ω^* tale che $\overline{\Omega} \subset \Omega^*$, in modo che la funzione u^* che così si ottiene appartenga a $W(\Omega^*)$* [9]). (Con $\overline{\Omega}$ indichiamo la chiusura di Ω).

5] *Ogni funzione $u \in W(\Omega)$ può essere approssimata in $W(\Omega)$ mediante funzioni di classe C^∞.* Questo risultato è evidente riflettendo alla proposizione 4] e ai procedimenti di approssimazione mediante polinomi di Stieltjes [10]).

Potremo ora definire una funzione f su Γ in questo modo.

Siano $\{U_k\}$ $(k = 1, 2, \dots s)$ gli intorni che coprono Γ e siano A_k le rappresentazioni di questi su Λ. Avremo dunque $A_k(U_k \cap \Gamma) = \Lambda_0$. Indichiamo con X l'iperpiano $x_n = 0$ e con $\overline{x} \equiv (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ un punto di X. *Per assegnare una fun-*

---

7) Cfr. [7], Lemma 7,2.

8) Questo si deduce dal fatto che Ω, nelle nostre ipotesi, è un'insieme aperto di Sobolev (cfr. [4] pag. 327).

9) Si capisce bene la possibilità di un prolungamento di tal genere quando si pensi che, in un cilindro del tipo di Λ, una funzione $u \in W(\Lambda_+)$ può essere prolungata in Λ_-, ad es., per simmetria rispetto a Λ_0, (Cfr. [4] Cap. I, §§ 7 e 8).

10) Cfr. Stampacchia [9] § 5.

zione su Γ *assegneremo s funzioni* $f_k(\bar{x})$ *definite su* Λ_0, *con la condizione che sia* $f_{k'}(\bar{x}) = f_{k''}(\bar{x})$ *tutte le volte che è* $A_{k'}^{-1}(\bar{x}) = A_{k''}^{-1}(\bar{x})$. Indicheremo con $L^2(\Gamma)$ lo spazio delle funzioni a quadrato integrabile su Γ; per queste, in virtù di quanto detto in 2], potremo adottare la norma

$$(2) \qquad \| f \|_{L^2(\Gamma)} = \left\{ \sum_1^s {}_k \| f_k \|^2_{L^2(\Lambda_0)} \right\}^{\frac{1}{2}} .$$

Abbiamo allora il seguente risultato [11]:

6] *Esiste una ed una sola trasformazione lineare* $v = \gamma u$ *che fa corrispondere ad ogni* $u \in W(\Omega)$ *una* $v \in L^2(\Gamma)$, *in modo tale che alle funzioni di classe* 1 *in* $\bar{\Omega}$ *venga fatta corrispondere la loro traccia su* Γ.

Si ha inoltre [12]

$$(3) \qquad \| \gamma u \|^2_{L^2(\Gamma)} \leq C_1 \| u \|^2_{L^2(\Omega)} + C_2 \| u \|_{L^2(\Omega)} \| u \|_{W(\Omega)} .$$

Una volta dimostrata questa disuguaglianza per le funzioni di classe 1, è facilissimo dimostrare il teorema, tenendo conto del fatto che le funzioni di classe 1 sono un insieme ovunque denso in $W(\Omega)$ [13].

Aggiungiamo un'osservazione: sia u^* una funzione coincidente quasi ovunque con $u \in W(\Omega)$ e assolutamente continua lungo quasi tutte le parallele agli assi; allora nell'ipotesi I), $u^*(x)$ *ammette limite al tendere di* x *ai punti di* Γ *lungo le parallele ad un asse, con eccezione di un insieme che si proietta*

---

11) Cfr. [7] Teorema 7,1 pag. 200; Deny e Lions [4] Teorema 7,1 pag. 334.

12) Cfr. [4] formula (7,11). Nel corso del presente lavoro indicheremo con C, C_1, C_2 certe costanti imprecisate.

13) Nelle nostre ipotesi, la funzione γu appartiene a $L^q(\Gamma)$ con q arbitrario per $n = 2$, con $q = 2\dfrac{n-1}{n-2}$ per $n \geq 3$. Noi, però, non faremo uso di queste precisazioni. Volendo caratterizzare le funzioni γu, cercheremo invece di conservare per il loro spazio quella strutura Hilbertiana che naturalmente deve competergli.

in un insieme di misura nulla sull'iperpiano ortogonale [14]). La funzione che così si ottiene coincide con γu.

L'operazione γ si definisce localmente (quindi si può parlare di traccia su Γ anche nel caso di un insieme Ω che soddisfi alla condizione I) localmente).

Viceversa si ha:

7] *Supponiamo che, per una certa funzione $f \in L^2(\Gamma)$ si possano determinare s funzioni $u_k \in W(U_k)$, dove $\{U_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots, s)$ è una copertura di Γ in E, in modo tale che u_k abbia come traccia su $U_k \cap \Gamma$ i valori della f. Allora esiste una funzione $u \in W(\Omega)$ la cui traccia su Γ è f.*

La dimostrazione si ottiene in modo molto semplice: indichiamo con U_0 un insieme aperto tale che $\overline{U}_0 \subset \Omega$ e $\Omega - \cup_k U_k \subset U_0$. Consideriamo un sistema di $s+1$ funzioni di classe 1: $\alpha_0(x), \alpha_1(x), \ldots, \alpha_s(x)$ [15]) tali che sia $\alpha_k(x) \geq 0$, il supporto di α_k sia contenuto in U_k, e sia $\sum_0^s \alpha_k(x) = 1$ per $x \in \Omega$.

Prolunghiamo poi la definizione delle funzioni u_k a tutto lo spazio, con valori nulli e poniamo $u_0 \equiv 0$. La funzione $u(x) = \sum_{k\,0}^{n} \alpha_k(x) u_k(x)$ è la funzione cercata.

Infatti si ha, evidentemente, $u \in W(\Omega)$.

Inoltre, avendosi per $x \in \Gamma$ $\gamma(\alpha_k u_k)(x) = \alpha_k(x)\gamma u_k(x) = \alpha_k(x) f(x)$ risulta chiaro che u ha, come traccia su Γ, f. Aggiungiamo ancora una semplice osservazione. Per la funzione u che abbiamo costruito si ha la limitazione, di dimostrazione immediata,

$$\| u \|_{W(\Omega)} \leq C_1 \textstyle\sum_k \| u_k \|_{W(\Omega_k)} + C_2 \sum_k \| u_k \|_{L^2(\Omega_k)} \tag{4}$$

dove le costanti C_1 e C_2 non dipendono dalle funzioni u_k.

È opportuno richiamare, infine, questo risultato:

---

14) Cfr. Stampacchia [9] pag. 30, dove il risultato è stabilito sotto l'ipotesi, più generale, che la frontiera Γ soddisfi ad una condizione di Banach-Vitali.

15) Questo sistema di funzioni può essere chiamato « partizione dell'unità » per Ω. (vd. Bourbaki, libro III, § 5, 11).

S] *Se esiste una funzione $u \in W(\Omega)$ tale che $\gamma u = f$, allora esiste anche una funzione $v \in W(\Omega)$, armonica, ed una sola, tale che $\gamma v = f$.*

La dimostrazione di questo segue facilmente dalla nota teoria variazionale [16]) tenendo presente che le funzioni $u \in W(\Omega)$ aventi traccia nulla sono, in virtù dell'ipotesi I), approssimabili in $W(\Omega)$ mediante funzioni nulle in tutto un intorno di Γ [17]).

§ **2.** - Sia E_+ il semispazio aperto $x_n > 0$, X l'iperpiano $x_n = 0$.

Porremo ancora $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$. Abbiamo il

LEMMA 1. *Sia $f(\bar{x}) \in L^2(X)$; allora esiste una ed una sola funzione $u(x)$ definita in E_+, armonica, che gode di queste proprietà:*

a) *$u(\bar{x}, x_n) \in L^2(X)$ per ogni valore di x_n e si ha*

$$\| u \|_{L^2(X)} \leq \| f \|_{L^2(X)}$$

b)
$$\| u(\bar{x}, x_n) - f(\bar{x}) \|_{L^2(X)} \to 0 \qquad (x_n \to 0+)$$

c) *per ogni $x_n > 0$, si ha*

$$\left\| \frac{u(\bar{x}, x_n + h) - u(\bar{x}, x_n)}{h} - \frac{\partial u(\bar{x}, x_n)}{\partial x_n} \right\|_{L^2(X)} \to 0 \quad (h \to 0)$$

e, analogamente per la

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = \frac{\partial}{\partial x_n} \frac{\partial u}{\partial x_n}.$$

La funzione u si può rappresentare nel seguente modo:

Sia Ξ lo spazio a $n-1$ dimensioni $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}) = \xi$; indicheremo con $x \cdot \xi$ il prodotto scalare $x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + \dots + x_{n-1}\xi_{n-1}$. Per ogni $f \in L^2(X)$, indicheremo con $\mathcal{F}(f)$ la trasformata di Fourier, ponendo

$$g(\xi) = \int_X \exp(-2\pi i \bar{x} \cdot \xi) f(\bar{x}) d\bar{x}$$

---

16) [3] Cap. VII.

17) [7] Teorema 7,1 a pag. 200.

dove l'integrale deve essere inteso nel ben noto senso della teoria di Plancherel. Indicheremo la trasformazione inversa con $\overline{\mathcal{F}}$; avremo

$$f(\bar{x}) = \int_X \exp(2\pi i \bar{x} \cdot \xi) g(\xi) d\xi .$$

Ciò posto, se f è la funzione indicata nel lemma, la u si può rappresentare così:

$$(5)\ u(x) = \int \exp(2\pi[-x_n|\xi| + i\bar{x}\cdot\xi])g(\xi)d\xi = \overline{\mathcal{F}}(\exp(-2\pi x_n|\xi|)g(\xi))$$

(avendo posto $|\xi|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_{n-1}^2$).

Per la dimostrazione rimandiamo al libro di Bochner e Chandrasekharan [18]).

L'unicità stabilita nel lemma permette di accertare che la soluzione u può anche essere rappresentata mediante il classico integrale di Poisson [19]).

$$(5') \qquad u(x) = \frac{2x_n}{\omega_n} \int_X \frac{f(x')}{(|x' - \bar{x}|^2 + x_n^2)^{\frac{n}{2}}} dx'$$

dove è $\omega_n = \dfrac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$.

Da quest'ultima espressione si ha che $\lim\limits_{x_n \to 0} u(\bar{x}, x_n) = f(\bar{x})$ per quasi tutti i punti di X.

LEMMA 2. *Sia $f \in L^2(X)$ una funzione diversa da zero solo in un insieme limitato. Allora, condizione necessaria e sufficiente perchè essa sia traccia di una funzione $v \in W(E_+)$ è che, per la funzione u definita mediante la* (5) *o la* (5') *che risolve il problema di Dirichlet per E_+, si abbia $u \in W(E_+)$.*

Per verificare che la condizione è sufficiente, basta osservare che la funzione f è traccia della u (rappresentata dalla

---

18) [2] Teorema 69, pag. 137: qui il teorema è stabilito per il caso di due variabili, ma l'estensione è immediata.

19) [3] pag. 245.

(5) o dalla (5')) nel caso che questa appartenga a $W(E_+)$. Questo è immediato se si tiene conto del fatto, sopra notato, che f è il limite di u lungo quasi tutte le parallele all'asse x_n.

Dimostriamo che la condizione è necessaria. Supponiamo che il supporto di f sia interno all'insieme $C \equiv (|\bar{x}| \leq R)$.

Sia S la semisfera $|x| = R$, $x_n \geq 0$ e sia D l'insieme aperto compreso tra C ed S. Per ipotesi, f sarà traccia di una funzione $v \in W(E_+)$, su X. Sarà allora possibile costruire una funzione $v' \in W(D)$ che ha come traccia su C i valori di f e su S i valori assunti dalla u: basterà ricorrere ad una opportuna « partizione della unità » [20]) in D, tenendo conto che il supporto di f e la semisfera S non hanno punti in comune. Allora in D esisterà una funzione armonica $u' \in W(D)$ che assume su $C \cup S$ gli stessi valori di u. Per l'unicità della soluzione del problema di Dirichlet [21]), essa coincide con u. D'altra parte l'espressione (5') ci dice che la u ha integrale di Dirichlet finito nell'insieme $E_+ - D$. Si deduce che $u \in W(E_+)$.

Procedimento ora al calcolo dell'integrale di Dirichlet della u, definita dalla (5), esteso ad E_+.

Abbiamo, dalla (5),

$$\frac{\partial u}{\partial x_n} = -2\pi \bar{\mathcal{F}}(g(\xi)\,|\,\xi\,|\exp(-2\pi x_n\,|\,\xi\,|))$$

Applicando il teorema di Plancherel, avremo

$$\int_X \left(\frac{\partial u(\bar{x}, x_n)}{\partial x_n}\right)^2 d\bar{x} = 4\pi^2 \int_\Xi |g(\xi)|^2\,|\,\xi\,|^2 \exp(-4\pi x_n\,|\,\xi\,|) d\xi .$$

Integriamo ora rispetto ad x_n. Avremo

$$\int_{E_+} \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^2 dx = \pi \int_\Xi |\,g(\xi)\,|^2\,|\,\xi\,|\,d\xi . \tag{6}$$

---

20) Cfr. nota 15).

21) Infatti, la differenza $u_1' - u_2'$ tra due soluzioni deve essere una funzione continua sia nei punti di S che in quelli di C; pertanto, deve essere nulla.

Questa relazione deve essere intesa anche nel senso che ciascuno di questi integrali esiste finito solo quando esiste finito l'altro.

Occupiamoci ora delle derivate $\frac{\partial u}{\partial x_m}$ $(m = 1, 2, \ldots, n-1)$.

Avremo

$$\frac{\partial u}{\partial x_m} = 2\pi i \overline{\mathcal{F}}(g(\xi)\xi_m \exp(-2\pi x_n |\xi|))$$

da cui

$$\int_X \left(\frac{\partial u(\bar{x}, x_n)}{\partial x_m}\right)^2 d\bar{x} = 4\pi^2 \int_\Xi |g(\xi)|^2 \xi_m^2 \exp(-4\pi x_n |\xi|) d\xi$$

e, integrando rispetto a x_n,

$$\int_{E_+} \left(\frac{\partial u}{\partial x_m}\right)^2 dx = \pi \int_\Xi |g(\xi)|^2 \frac{\xi_m^2}{|\xi|} d\xi \tag{7}$$

Sommando membro a membro la (6) e la (7), (per $m = 1, 2, \ldots, m-1$), avremo

$$\int_{E_+} \sum_1^n{}_m \left(\frac{\partial u}{\partial x_m}\right)^2 dx = 2\pi \int_\Xi |g(\xi)|^2 |\xi| d\xi . \tag{8}$$

Dunque f sarà traccia di una funzione $u \in W(E_+)$ quando e soltanto quando sia

$$|g(\xi)| \; |\xi|^{1/2} \in L^2(\Xi). \tag{9}$$

§ **3.** - LEMMA 3. *Sia X uno spazio euclideo; siano $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ le coordinate di un punto $\bar{x} \in X$; analogamente, siano $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1})$ le coordinate del punto di uno spazio Ξ di eguale dimensione. Sia $f \in L^2(X)$ e sia $g \in L^2(\Xi)$ la sua trasformata di Fourier. Allora, condizione necessaria e sufficiente perchè sia $f \in W(X)$ è che sia $\xi_m g(\xi) \in L^2(\Xi)$ $(m = 1, 2, \ldots, n-1)$.*

Indichiamo con $\mathcal{F}_m$ la trasformazione di Fourier che opera solo sulla variabile m^{sima}, con $\mathcal{F}_{m'}$ la trasformazione che opera sulle rimanenti. Analogamente per le trasformazioni inverse $\overline{\mathcal{F}}_m$, $\overline{\mathcal{F}}_{m'}$.

Porremo $\mathcal{F}_m(f(x_1, \ldots, x_{n-1})) = \mathcal{F}_{m'}(g(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})) =$
$= h_m(x_1, \ldots, x_{m-1}, \xi_m, x_{m+1}, \ldots, x_{n-1})$.

Supponiamo che sia $\xi_m g(\xi) \in L^2(\Xi)$. Avremo intanto, in virtù del teorema di Plancherel, per quasi tutti i valori di ξ_m,

$$\int |h_m(x_1, \ldots, x_{m-1}, \xi_m, x_{m+1}, \ldots, x_{n-1})|^2 dx_1 \ldots dx_{m-1} dx_{m+1} \ldots dx_{n-1}$$
$$= \int |g(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1})|^2 d\xi_1 \ldots d\xi_{m-1} d\xi_{m+1} \ldots d\xi_{n-1}.$$

Si avrà

$$\int \xi_m^2 |h_m(x_1, \ldots, x_{m-1}, \xi_m, x^m{}_{+1}, \ldots x_{n-1}|^2 dx_1 \ldots dx_{m-1} d\xi_m dx_{m+1} \ldots$$
$$\ldots dx_{n-1} = \int_{\Xi} \xi_m^2 |g(\xi)|^2 d\xi < \infty.$$

In virtù di un noto risultato [22], si può affermare che la f, per quasi tutti i valori di $x_1, \ldots, x_{m-1}, x_{m+1}, \ldots, x_{n-1}$ è funzione assolutamente continua di x_m, quando la si modifichi, eventualmente, in un insieme di misura nulla, e che la relativa derivata è a quadrato integrabile in X.

Si ha precisamente,

$$\int_X \left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\right)^2 dx = 4\pi^2 \int_{\Xi} \xi_m^2 |g(\xi)|^2 d\xi. \tag{10}$$

Invertendo il ragionamento, si trova che, se $f \in W(X)$, $\xi_m^2 |g(\xi)| \in L^2(\Xi)$ e vale la (10).

Ritorniamo ora alla relazione (9), che cercheremo di interpretare. Distinguiamo il caso $n > 2$ dal caso $n = 2$.

Sia $n > 2$.

Porremo la (9) nella forma equivalente

$$\frac{g(\xi)}{|\xi|^{1/2}} \xi_m \in L^2(\Xi) \qquad (m = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{11}$$

---

[22]) Vd., ad es., [2] Teorema 64, pag. 128.

Poichè $g(\xi)$, essendo la funzione f diversa da zero solo in un insieme limitato, ha derivate di tutti gli ordini, e poichè, d'altra parte, $\frac{1}{|\xi|^{1/2}}$ è a quadrato integrabile in un intorno dell'origine (essendo $n > 2$), si avrà

$$\frac{g(\xi)}{|\xi|^{1/2}} \in L^2(\Xi).$$

Consideriamo ora la funzione $|\bar{x}|^{-n+\frac{3}{2}}$; essa non è nè integrabile nè a quadrato integrabile in X. Se si pone però $|\bar{x}|^{-n+\frac{3}{2}} = \psi_1(|\bar{x}|) + \psi_2(|\bar{x}|)$, dove ψ_1 è nulla per $|\bar{x}| < 1$ e ψ_2 è nulla per $|\bar{x}| > 1$, ψ_1 risulta a quadrato integrabile in X e ψ_2 integrabile in X.

Possiamo, tenendo conto di questo, calcolare la trasformata di Fourier di $|\bar{x}|^{-n+\frac{3}{2}}$. Applicando note formule che riguardano le trasformate di funzione radiali [23]), si ottiene

$$\mathcal{F}(|\bar{x}|^{-n+\frac{3}{2}}) = \frac{k_n}{|\xi|^{1/2}}$$

dove k_n indica una costante diversa da zero. Tenendo conto del fatto che f, essendo nulla fuori di un insieme limitato, appartiene tanto a $L^2(X)$ quanto a $L^1(X)$, e ricordando l'osservazione fatta sopra riguardo alla funzione $|\bar{x}|^{-n+\frac{3}{2}}$, possiamo applicare un noto risultato sul prodotto integrale [24]).

Avremo:

$$\mathcal{F}(f * |\bar{x}|^{-n+\frac{3}{2}}) = \mathcal{F}(f * \psi_1) + \mathcal{F}(f * \psi_2) =$$

$$= g(\mathcal{F}(\psi_1) + \mathcal{F}(\psi_2)) = g\,\mathcal{F}(|\bar{x}|^{-n+\frac{3}{2}}) = k_n \frac{g(\xi)}{|\xi|^{1/2}}.$$

---

[23]) Vd. [2], Teorema 40, a pag. 69 e [5], § 13 a pag. 29.

[24]) Ricordiamo che il prodotto integrale $f * g$ si può definire quando $f \in L^1(X)$ e $g \in L^2(X)$ e allora appartiene a $L^2(X)$; inoltre esso soddisfa alla limitazione

$$\| f * g \|_{L^2} \leq \| f \|_{L^1} \cdot \| g \|_{L^2}.$$

Concludendo, la relazione (11) equivale alla relazione $f * |\bar{x}|^{-n+\frac{3}{2}} \in W(X)$, e si ha, sostituendo, nella (10), alla f questo prodotto integrale,

$$\left\| \frac{g(\xi)}{|\xi|^{1/2}} \xi_m \right\|_{L^2(\Xi)} = \frac{1}{2\pi k_n} \left\| \frac{\partial}{\partial x_m} f * |\bar{x}|^{-n+\frac{3}{2}} \right\|_{L^2(X)} \tag{12}$$

$$(m = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Sia $n = 2$. f e g saranno funzioni di una sola variabile; X e Ξ indicheranno ora le rette $-\infty < \bar{x} < +\infty$, $-\infty < \xi < +\infty$.

In questo caso $f(\bar{x}) * |\bar{x}|^{-\frac{1}{2}}$ non sarà più, in generale, a quadrato integrabile. Decomponiamo f in una somma di due funzioni f_1, f_2, entrambe nulle fuori di un intervallo limitato, in modo tale che f_2 sia di classe 1 e

$$\int_X f_2(\bar{x}) d\bar{x} = \int_X f(\bar{x}) d\bar{x}.$$

in conseguenza, avremo

$$\int_X f_1(\bar{x}) d\bar{x} = 0.$$

Porremo $\mathcal{F}(f_1) = g_1$, $\mathcal{F}(f_2) = g_2$. Si riconosce facilmente che ora $f_1 * |\bar{x}|^{-\frac{1}{2}} \in L^2(X)$; pertanto, in $L^2(X)$, esisterà il limite

$$\lim_{M \to \infty} \int_{-M}^{+M} \exp(-2\pi i \xi \bar{x}) d\bar{x} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(y) |\bar{x} - y|^{-\frac{1}{2}} dy = \mathcal{F}(f_1 * |\bar{x}|^{-\frac{1}{2}}).$$

L'espressione sotto il segno di limite si può scrivere

$$\int_X f(y) \exp(-2\pi i y \xi) \left\{ \int_{-M-y}^{M-y} \exp(-2\pi i z \xi) |z|^{-\frac{1}{2}} dz \right\} dy$$

e, in questa forma, è evidente che, per ogni valore di $\xi \neq 0$, essa converge verso $g_1(\xi)|\xi|^{-\frac{1}{2}}$. Si avrà allora

$$\mathcal{F}(f_1 * |\bar{x}^{-\frac{1}{2}}) = g_1(\xi) |\xi|^{-\frac{1}{2}} \in L^2(\Xi).$$

D'altra parte, essendo $\int\limits_X \frac{df_2}{d\bar{x}}\,d\bar{x} = 0$, si ha che

$$\frac{d}{d\bar{x}} f_2 * |\bar{x}|^{-\frac{1}{2}} \in L^2(X)$$

e, con gli stessi calcoli fatti sopra, si trova

$$\mathcal{F}\left(\frac{d}{d\bar{x}} f_2 * |\bar{x}|^{-\frac{1}{2}}\right) = \mathcal{F}\left(\frac{df_2}{d\bar{x}} * |\bar{x}|^{-\frac{1}{2}}\right) = \mathcal{F}\left(\frac{df_2}{d\bar{x}}\right) |\xi|^{-\frac{1}{2}} = \tag{13}$$
$$= -2\pi i \xi g_2(\xi) |\xi|^{-\frac{1}{2}} \in L^2(\Xi).$$

Poichè $g = g_1 + g_2$, la condizione (9) equivale a questa:

$$g_1(\xi) |\xi|^{\frac{1}{2}} \in L^2(\Xi). \tag{14}$$

Si può allora applicare il lemma 3: la (14) equivarrà alla relazione $f_1 * |x|^{-\frac{1}{2}} \in W(X)$ e si avrà

$$\mathcal{F}\left(\frac{d}{d\bar{x}} f_1 * |\bar{x}|^{-\frac{1}{2}}\right) = -2\pi i \xi g_1(\xi) |\xi|^{-\frac{1}{2}}.$$

Sommando membro a membro questa con la (13) e applicando il teorema di Plancherel, si avrà

$$\| g(\xi) |\xi|^{\frac{1}{2}} \|_{L^2(\Xi)} = \frac{1}{2\pi} \left\| \frac{d}{d\bar{x}} f * |\bar{x}|^{-\frac{1}{2}} \right\|_{L^2(X)}. \tag{15}$$

Applicando il lemma 2, possiamo concludere enunciando il seguente

LEMMA 4. *La relazione* $f * |\bar{x}|^{-n+\frac{3}{2}} \in W(X)$ *è condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione* $f \in L^2(X)$, *diversa da zero solo in un insieme limitato, sia traccia di una funzione* $u \in W(E_+)$.

Per passare a caratterizzare le funzioni $f \in L^2(\Gamma)$ che sono traccia di funzioni $u \in W(\Omega)$, sempre ammettendo l'ipotesi I), occorre premettere altre considerazioni.

§ **4.** - Premettiamo ancora due lemmi

LEMMA 5. *Sia u una funzione appartenente a $W(\Lambda_+)$* [25] *e sia $\gamma u = f$ su Λ_0. Allora, comunque si prenda su Λ_0 un insieme aperto Λ^* tale che $\bar{\Lambda}^* \subset \Lambda_0$, si può costruire una funzione $u^* \in W(E_+)$ tale che, su Λ^*, si abbia $\gamma u^* = f$.*

La dimostrazione si ottiene facilmente in questo modo: si considera l'insieme Ψ dei punti $x = (\bar{x}, x_n)$ tali che $\bar{x} \in \Lambda^*$, $0 < x_n < 1/2$; sia $\alpha(x)$ una funzione definita in E_+, di classe 1, che assume valore 1 su Ψ e valore 0 fuori di Λ_+. La funzione

$$u^*(x) = \begin{cases} \alpha(x)u(x) & \text{per} \quad x \in \Lambda_+ \\ 0 & \text{per} \quad x \notin \Lambda_+ \end{cases}$$

soddisfa, evidentemente, ai requisiti voluti.

LEMMA 6. *Sia $f \in L^2(X)$ una funzione diversa da zero solo su Λ_0; per un certo insieme aperto Λ' tale che $\bar{\Lambda}' \subset \Lambda_0$, si abbia $f * |\bar{x}|^{-n+\frac{3}{2}} \in W(\Lambda')$* (con questo si intende che la restrizione di $f * |\bar{x}|^{-n+\frac{3}{2}}$ appartenga a $W(\Lambda')$). *Allora, preso un arbitrario insieme aperto Λ'' tale che $\bar{\Lambda}'' \subset \Lambda'$, si può costruire una funzione f^*, nulla fuori di un insieme limitato, che coincide con f su Λ'' e tale che si abbia*

$$f^* * |\bar{x}|^{-n+\frac{3}{2}} \in W(X).$$

Infatti, sia $\alpha(\bar{x})$ una funzione di classe 1 che assume valore 1 su Λ'' e valore 0 fuori di Λ'. Poniamo $f^* = f\alpha$.

Si avrà, evidentemente, $\alpha \cdot (f * |\bar{x}|^{-n+\frac{3}{2}}) \in W(X)$. Inoltre:

$$f^* * |\bar{x}|^{-n+\frac{3}{2}} = (\alpha f) * |\bar{x}|^{-n+\frac{3}{2}} = \alpha(f * |\bar{x}|^{-n+\frac{3}{2}}) -$$

$$- \int_X f(\eta)(\alpha(\bar{x}) - \alpha(\eta)) \, |\bar{x} - \eta|^{-n+\frac{3}{2}} d\eta.$$

La funzione $[\alpha(\bar{x}) - \alpha(\eta)] \, |\bar{x} - \eta|^{-n+\frac{3}{2}}$, che compare come nucleo nell'ultimo integrale, ammette derivate parziali rispetto

---

[25]) Teniamo presente che Λ_+ è il cilindro aperto $(|\bar{x}| < 1, 0 < x_n < 1)$.

alle variabili (x_m) che, per $\eta \to \bar{x}$ possono essere maggiorate da una funzione del tipo $k\,|\bar{x}-\eta|^{-n+\frac{3}{2}}$.

Da ciò si deduce che l'integrale in questione ha derivate parziali che sono a quadrato integrabile in ogni insieme misurabile limitato.

Si verifica poi direttamente che, per valori di $|\bar{x}|$ maggiori di 1, $f^* * |\bar{x}|^{-n+\frac{3}{2}}$ ammette derivate prime continue e che queste sono a quadrato integrabile nell'insieme $(|\bar{x}|>1)$. Tanto basta per poter affermare che $f^* * |\bar{x}|^{-n+\frac{3}{2}} \in W\,(X)$.

Si vede anche facilmente che si può porre la limitazione

$$(16)\quad \| f^* * |\bar{x}|^{-n+\frac{3}{2}} \|_{W(X)} \leq C_1 \| f \|_{L^2(\Lambda')} + C_2 \; \| f * |\bar{x}|^{-n+\frac{3}{2}} \|_{W(\Lambda')}$$

dove le costanti C_1 e C_2 non dipendono dalla funzione f, ma solo da Λ' e Λ''.

Teniamo ora presente l'ipotesi I) e il modo con cui abbiamo definito una funzione f su Γ; per comodità, prolungheremo la definizione delle funzioni f_k a tutto X attribuendo loro valori nulli fuori di Λ_0. Abbiamo allora il

TEOREMA 1. *Sia Ω un insieme aperto, limitato e connesso, dotato di frontiera Γ soddisfacente all'ipotesi* I). *Condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione $f \in L^2(\Gamma)$, rappresentata localmente mediante le funzioni $f_k(x)\,(x \in \Lambda_0)$, sia traccia di una funzione $u \in W\,(\Omega)$ è che si abbia $f_k * |x|^{-n+\frac{3}{2}} \in W(\Lambda')$, dove Λ' è un qualsiasi insieme aperto contenuto con la sua chiusura in Λ_0.*

La condizione è necessaria; infatti sia $u \in W(\Omega)$ e sia $\gamma u = f$. Indichiamo con u_k le restrizioni di u agli intorni U_k e poniamo $u'_k = A_k(u_k)$ (cfr. § 1, 1]). Le funzioni u'_k appartengono a $W(\Lambda_+)$ e hanno su Λ_0 come tracce le f_k; prendiamo ora, ad arbitrio, su Λ_0, un insieme aperto Λ' tale che $\bar{\Lambda}' \subset \Lambda_0$.

Preso allora un altro insieme aperto Λ^* tale che $\bar{\Lambda}' \subset \Lambda^*$, $\bar{\Lambda}^* \subset \Lambda_0$, per il lemma 5 possiamo costruire una funzione $u_k^* \in W(E_+)$ tale che la traccia $\gamma u^* = f^*$ coincida con f su Λ^*.

In virtù del lemma 4, si avrà allora $f_k^* * |\bar{x}|^{-n+\frac{3}{2}} \in W(X)$; a fortiori, $f_k^* * |\bar{x}|^{-n+\frac{3}{2}} \in W(\Lambda')$; ora, poichè $f_k = f_k^*$ su Λ^* e poichè si ha $\bar{\Lambda}' \subset \Lambda^*$, è $(f_k - f_k^*) * |\bar{x}|^{-n+\frac{3}{2}} \in C^\infty(\bar{\Lambda}')$.

Si deduce che è $f_k * | x |^{-n+\frac{3}{2}} \in W(\Lambda')$.

Dimostriamo ora la sufficienza. Consideriamo un insieme aperto Λ^* tale che gli insiemi $A_k^{-1}(\Lambda^*)$ costituiscano ancora una copertura di Γ. Prendiamo poi un insieme aperto Λ' tale che $\bar{\Lambda}^* \subset \Lambda'$ e $\bar{\Lambda}' \subset \Lambda_0$. Per ipotesi sarà $f_k * | \bar{x} |^{-n+\frac{3}{2}} \in W(\Lambda')$. Allora, per il lemma 6, esisterà una funzione f_k^* definita in X, nulla fuori di un insieme limitato, coincidente con f_k su Λ^* e tale che $f_k^* * | \bar{x} |^{-n+\frac{3}{2}} \in W(X)$. Per il lemma 4 esisterà allora una funzione $u'_k \in W(E_+)$, armonica, che ha, come traccia su X, f_k^*. Per la proporzione 1] del § 1, la funzione $u_k = A_k^{-1}(u'_k)$ appartiene a $W(U_k)$. Teniamo ora presente che la funzione u_k ha come traccia la funzione f sull'insieme $A_k^{-1}(\Lambda^*)$; ma poichè gli insiemi $A_k^{-1}(\Lambda^*)$ costituiscono una copertura di Γ, applicando la proposizione § 1, 7] si può costruire una funzione $u \in W(\Omega)$ che ha, come traccia su Γ, f. Il teorema risulta così completamente dimostrato.

È opportuno ora enunciare una limitazione che vale per la funzione u che abbiamo costruito, in base alle limitazioni che valgono per $f_k * | \bar{x} |^{-n+\frac{3}{2}}$ in Λ'; per questo basterà riesaminare la dimostrazione del teorema, nella seconda parte. La (16), unita con la (8) e la (12) (o la (15)) ci dà

$$(17) \qquad \| u'_k \|_{W(\Lambda_+)} \leq \| u'_k \|_{W(E_+)} \leq C_1 \| f_k \|_{L^2(\Lambda')} + \\ + C_2 \| f_k * | \bar{x} |^{-n+\frac{3}{2}} \|_{W(\Lambda')} .$$

D'altra parte, si ha molto facilmente in Λ_+ la limitazione

$$(18) \qquad \| u'_k \|^2_{L^2(\Lambda_+)} \leq 2 \| f_k^* \|^2_{L^2(\Lambda_0)} + 2 \| u'_k \|^2_{W(\Lambda_+)} .$$

Tenendo presente che (lemma 6) $f_k^* = f_k \alpha$ e applicando la (17) si ha

$$(19) \qquad \| u'_k \|_{L^2(\Lambda_+)} \leq C_1 \| f_k \|_{L^2(\Lambda')} + C_2 \| f_k * | \bar{x} |^{-n+\frac{3}{2}} \|_{W(\Lambda')} .$$

Ricordiamo ora quanto detto nel § 1, 1] a proposito delle trasformazioni bilipschitziane tra due insiemi aperti e dell'isomorfismo che stabiliscono tra gli spazi funzionali L^2 e tra gli spazi funzionali W. Tenendo presente la (4), abbiamo infine

$$\| u \|_{W(\Omega)} \leq C_1 \Sigma_k \| f_k \|_{L^2(\Lambda')} + C_2 \Sigma_k \| f_k * | \bar{x} |^{-n+\frac{3}{2}} \|_{W(\Lambda')} \tag{20}$$

§ **5.** - Per caratterizzare in un altro modo le funzioni definite su Γ che sono traccia di funzioni di $W(\Omega)$, richiamiamo la classica definizione di derivata di ordine α (reale qualunque), secondo Riemann-Liouville.

Prenderemo, per semplicità, $0 < \alpha < 1$; considereremo funzioni f definite in uno spazio euclideo a $n-1$ dimensioni X, a quadrato integrabile e diverse da zero solo in un insieme limitato.

Supponiamo dapprima $f \in W(X)$; allora, secondo la definizione di Riemann Liouville, si pone [26])

$$D^{\alpha}_{x_m} f = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^{x_m} (x_m - t)^{-\alpha} \frac{\partial f(x_1, \dots, x_{m-1}, t, x_{m+1}, \dots, x_{n-1})}{\partial t} dt.$$

Si verifica facilmente che si ha

$$D^{\alpha}_{x_m} f = \tag{21}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial x_m} \int_{-\infty}^{x_m} (x_m - t)^{-\alpha} f(x_1, \dots, x_{m-1}, t, x_{m+1}, \dots, x_{n-1}) dt.$$

Ma questa espressione può avere significato anche quando non sia $f \in W(X)$. *Noi diremo che una funzione $f \in L^2(X)$, nulla fuori di un insieme limitato, ha derivata di ordine α rispetto a $x_m (0 < \alpha < 1)$, a quadrato integrabile in X, se l'integrale*

$$\int_{-\infty}^{x_m} (x_m - t)^{-\alpha} f(x_1, \dots, x_{m-1}, t, x_{m+1}, \dots, x_{n-1}) dt$$

---

26) Preferiamo prendere, come estremo inferiore di integrazione, $-\infty$ anzichè 0, perchè ciò introduce delle semplificazioni e rende più chiara l'esposizione. (Cfr. Leray [5], pag. 24).

ha derivata rispetto ad x_m *(in senso generalizzato) a quadrato integrabile in* X[27]).

In modo analogo parleremo di derivata di ordine α, *di* $f \in L^2(X)$, *a quadrato integrabile in un insieme aperto* Λ.

A proposito occorre osservare che l'operazione di derivazione di ordine α non ha carattere locale, potendo essere uguale a zero la funzione in un insieme aperto, senza che lo sia la derivata; ma la proprietà di avere derivata di ordine α ha carattere locale. Precisamente: *il fatto che una funzione* $f \in L^2(X)$ *abbia derivata di ordine* α, *a quadrato integrabile in un certo insieme aperto* Λ, *non dipende dai valori che* f *assume fuori di un insieme aperto arbitrario che contenga* $\bar{\Lambda}$.

Si ha allora il

LEMMA 7. *Condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione* $f \in L^2(X)$, *nulla fuori di un insieme limitato, abbia derivate di ordine* 1/2 *a quadrato integrabile in* X, *è che, detta sempre* g *la trasformata di Fourier di* f, *si abbia*

$$g(\xi)\,|\,\xi_m\,|^{1/2} \in L^2(\Xi) \qquad (m = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1).$$

Porremo, con gli stessi simboli del § 3,

$$\mathfrak{F}_m(f(x_1,\ \ldots,\ x_{n-1})) = \bar{\mathfrak{F}}_{m'}(g(\xi_1,\ \ldots,\ \xi_{n-1})) =$$
$$= h_m(x_1,\ \ldots,\ x_{m-1},\ \xi_m,\ x_{m+1},\ \ldots,\ x_{n-1}).$$

Avremo, per il teorema di Plancherel,

$$\int |\,h_m(x_1, \ldots, x_{m-1}, \xi_m, x_{m+1}, \ldots, x_{n-1})|^2\, dx_1 \ldots dx_{m-1} dx_{m+1} \ldots dx_{n-1} =$$
$$= \int |\,g(\xi)\,|^2\, d\xi_1\ \ldots\ d\xi_{m-1} d\xi_{m+1}\ \ldots\ d\xi_{n-1}.$$

Moltiplichiamo ambo i membri per $|\,\xi_m\,|$ e integriamo rispetto a ξ_m. Otterremo

$$(22) \qquad \int |\,h_m(x_1,\ \ldots,\ x_{m-1},\ \xi_m,\ x_{m+1},\ \ldots,\ x_{n-1})\,|^2\,|\,\xi_m|\ dx_1\ \ldots$$
$$\ldots\ dx_{m-1} d\xi_m dx_{m+1}\ \ldots\ d_{n-1} = \int_{\Xi} |\,g(\xi)\,|^2\,|\,\xi_m\,|\,d\xi.$$

[27]) Ciò implica che l'integrale in questione coincide quasi ovunque con una funzione che è assolutamente continua rispetto ad x_m per quasi tutti i valori delle altre variabili.

Supponiamo che, per un certo valore di $(x_1, \dots, x_{m-1}, x_{m-1}, \dots, x_{n-1})$ si abbia

$$|h_m(x_1, \dots, x_{m-1}, \xi_m, x_{m+1}, \dots, x_{n-1})|^2 |\xi_m| \in L^2 \qquad (-\infty < \xi_m < +\infty)$$

Teniamo presente che la derivata di ordine 1/2 può essere indicata così

$$D_{x_m}^{1/2} f = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial}{\partial x_m} f \underset{m}{*} \frac{1}{\sqrt{x_m}}$$

dove il simbolo $\underset{m}{*}$ indica il prodotto integrale eseguito rispetto alla sola variabile m^sima^ e con $\frac{1}{\sqrt{x_m}}$ indichiamo, convenzionalmente, la funzione che è uguale a $\frac{1}{\sqrt{x_m}}$ per $x_m > 0$ e uguale a 0 per $x_m < 0$.

Con calcoli elementari si trova poi che è

$$\mathcal{F}_m\left(\frac{1}{\sqrt{x_m}}\right) = |\xi_m|^{-\frac{1}{2}} \nu(\xi_m)$$

dove

$$\nu(\xi_m) \begin{cases} \dfrac{1-i}{2} & \text{per } \xi > 0 \\[2ex] \dfrac{1+i}{2} & \text{per } \xi < 0 \end{cases}$$

Possiamo allora ripetere le considerazioni che abbiamo fatto nel § 3 per giungere alla (15). Avremo

$$\mathcal{F}_m\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial}{\partial x_m} f \underset{m}{*} \frac{1}{\sqrt{x_m}}\right) = 2\pi i \xi_m h_m |\xi_m|^{-\frac{1}{2}} \nu(\xi_m)$$

dove si deve intendere che la funzione $f \underset{m}{*} \frac{1}{\sqrt{x_m}}$ ha derivata rispetto ad x_m a quadrato integrabile se e soltanto se la funzione a secondo membro è a quadrato integrabile.

Ricordando che è $|\nu(\xi_m)| = 1$ e tenendo presente la (22), si ottiene

$$(23) \qquad \| g(\xi) \, | \xi_m |^{1/2} \|_{L^2(\Xi)} = \frac{1}{2\pi^{3/2}} \left\| \frac{1}{\partial x_m} f \underset{m}{*} \frac{1}{\sqrt{x_m}} \right\|_{L^2(X)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \| D_{x_m}^{1/2} f \|_{L^2(X)} .$$

Ma la condizione $g(\xi) \, | \xi_m |^{1/2} \in L^2(\Xi)$ $(m = 1, 2, \ldots, n-1)$ è equivalente alla (9). Pertanto:

la condizione $D_{x_m}^{1/2} f \in L^2(X)$ è necessaria e sufficiente perchè una funzione $f \in L^2(X)$, nulla fuori di un insieme limitato, sia traccia di una funzione $u \in W(E_+)$.

Veniamo ora nuovamente all'insieme aperto Ω; possiamo enunciare il seguente teorema.

TEOREMA 2. - *Sia Ω un insieme aperto limitato e connesso, dotato di frontiera Γ soddisfacente all'ipotesi* I). *Condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione $f \in L^2(\Gamma)$, rappresentata localmente mediante le funzioni $f_k(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in L^2(\Lambda_0)$, sia traccia di una funzione $u \in W(\Omega)$ è che le funzioni f_k abbiano derivate di ordine* 1/2, *rispetto a ciascuna delle variabili, a quadrato integrabile in ogni insieme aperto Λ' tale che $\bar{\Lambda}' \subset \Lambda_0$.*

La dimostrazione si fa seguendo punto per punto quella del teorema 1, con questa sola ovvia modificazione: tutte le volte che, per una funzione f a quadrato integrabile in un certo insieme aperto Ψ, si scrive là la relazione $f * | \bar{x} |^{-n+\frac{3}{2}} \in W(\Psi)$, qui si deve porre la condizione che f abbia derivate parziali di ordine 1/2 a quadrato integrabile in Ψ. Sarà bene, però, notare esplicitamente come si modifica il lemma 6:

LEMMA 8. *Sia $f \in L^2(X)$ una funzione diversa da zero solo su Λ_0; f abbia inoltre le derivate di ordine* 1/2 *a quadrato integrabile in un insieme aperto Λ' tale che $\bar{\Lambda}' \subset \Lambda_0$. Allora, preso un arbitrario insieme aperto Λ'' tale che $\bar{\Lambda}'' \subset \Lambda'$, si può costruire una funzione f^* che coincide con f su Λ'' e che ha derivate di ordine* 1/2 *a quadrato integrabile in X.*

Per la dimostrazione si prende la funzione α come nella dimostrazione del lemma 6 e si pone $f^* = \alpha f$.

Si avrà, per la variabile x_m,

$$f^* \underset{m}{*} \frac{1}{\sqrt{x_m}} = (\alpha f) \underset{m}{*} \frac{1}{\sqrt{x_m}} = \alpha\left(f \underset{m}{*} \frac{1}{\sqrt{x_m}}\right) -$$

$$- \int\limits_{-\infty}^{x_m} f(x_1, \ldots, x_{m-1}, \eta, x_{m+1}, \ldots, x_{n-1})[\alpha(x_1, \ldots, x_m, \ldots, x_{n-1}) -$$

$$- \alpha(x_1, \ldots, \eta, \ldots, x_{n-1})] \frac{1}{\sqrt{x_m - \eta}} d\eta.$$

Ora, il primo termine a secondo membro ha senz'altro derivata rispetto ad x_m a quadrato integrabile in X, per il modo con cui è stata presa α. Il secondo termine ha derivata rispetto a x_m che si può ottenere derivando sotto il segno di integrale e questa risulta a quadrato integrabile in ogni insieme limitato di X. D'altra parte, considerando che la funzione f^* è diversa da zero solo in un insieme limitato, si riconosce immediatamente che $f^* \underset{m}{*} \frac{1}{\sqrt{x_m}}$ ha derivata rispetto a x_m a quadrato integrabile nell'insieme $|\bar{x}| > 1$.

§ **6.** - Concludiamo con l'enunciazione di alcune proprietà dell'insieme delle funzioni-traccia definite su Γ, insieme che verrà dotato, in modo naturale, della struttura di spazio di Hilbert.

Osserviamo dapprima che, se nella (2), con cui abbiamo introdotto la norma in $L^2(\Gamma)$, noi consideriamo, anzichè l'insieme Λ_0, un insieme aperto $\Lambda' \subset \Lambda_0$, noi otteniamo uno spazio isomorfo con $L^2(\Gamma)$ purchè gli insiemi $A_k^{-1}(\Lambda')$ ($k = 1, 2, \ldots, s$) costituiscano ancora una copertura di Γ. Per semplicità, indicheremo ancora con $L^2(\Gamma)$ il nuovo spazio.

Notiamo ancora che *la condizione di cui parla il teorema* 1 *rimane ancora sufficiente quando la si richieda per un particolare insieme aperto* Λ' *tale che* $\bar{\Lambda}' \subset \Lambda_0$, *purchè gli insiemi* $A_k^{-1}(\Lambda')$ *costituiscano ancora una copertura di* Γ.

Ciò posto indichiamo con Λ' un cerchio aperto, di raggio < 1, con centro nell'origine di X, tale che gli insiemi $A_k^{-1}(\Lambda')$ siano una copertura di Γ. *Chiameremo* $T(\Gamma)$ *lo spazio delle* *funzioni* $f \in L^2(\Gamma)$ *tali che si abbia* $f_k * |\bar{x}|^{-n+\frac{3}{2}} \in W(\Lambda')$, [28]) *dotato della norma*

$$(24) \qquad \| f \|_{T(\Gamma)} = \left\{ \sum_{1}^{s}{}_k \| f_k * |\bar{x}|^{-n+\frac{3}{2}} \|^2_{W(\Lambda')} + \| f_k \|^2_{L^2(\Lambda')} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

È chiaro che questa norma si può ritenere indotta da un prodotto scalare. Si vede poi facilmente che lo spazio $T(\Gamma)$ è completo. Infatti, consideriamo una successione $\{f_m\}$ ($f_m \equiv \equiv (f_{m,k})$ con $k = 1, 2, \ldots, s$) tale che $f_m \in T(\Gamma)$ e $\| f_{m'} - f_{m''} \|_{T(\Gamma)} \to 0$ ($m', m'' \to \infty$). Si ha, intanto, dalla (24), $\| f_{m'} - f_{m''} \|_{L^2(\Gamma)} \to 0$. Esisterà allora una funzione $\bar{f} \in L^2(\Gamma)$ tale che $f_m \to \bar{f}$ in $L^2(\Gamma)$.

Si ha ora

$$f_{m,k} * |\bar{x}|^{-n+\frac{3}{2}} \to \bar{f}_k * |\bar{x}|^{-n+\frac{3}{2}} \quad \text{in} \quad L^2(\Lambda') \qquad (m \to \infty).$$

Ma la successione $f_{m,k} * |\bar{x}|^{-n+\frac{3}{2}}$ è convergente secondo la quasi-norma di $W(\Lambda')$: essa convergerà perciò anche in $W(\Lambda')$ verso $\bar{f}_k * |\bar{x}|^{-n+\frac{3}{2}}$.

Sappiamo (§ 1, 7]) che tra le funzioni $u \in W(\Omega)$ che hanno la stessa traccia su Γ ne esiste una ed una sola per cui $\| u \|_{W(\Omega)}$ assume il valore minimo; questa è armonica in Ω. Consideriamo l'insieme $A(\Omega)$ delle funzioni v che hanno tale proprietà; se lo dotiamo della norma

$$\| v \|_{A(\Omega)} = \{ \| v \|^2_{W(\Omega)} + \| v \|^2_{L^2(\Omega)} \}^{\frac{1}{2}}$$

questo insieme diventa uno spazio di Hilbert.

Abbiamo allora il

TEOREMA 3. *L'operazione di traccia stabilisce un isomorfismo tra* $A(\Omega)$ *e* $T(\Gamma)$.

Infatti, il teorema 1, completato con una osservazione fatta

---

28) È opportuno ricordare che le funzioni f sono definite in Λ_0 (in modo tale da soddisfare alla condizione «di raccordo») e che il prodotto integrale $f_k * |\bar{x}|^{-n+\frac{3}{2}}$ si intende definito prolungando le f fuori di Λ_0 con valori nulli.

all'inizio di questo paragrafo, dice che l'operazione γ pone tra $A(\Omega)$ e $T(\Gamma)$ una corrispondenza biunivoca.

Sia ora $f \in T(\Gamma)$. Per la particolare funzione $u \in W(\Omega)$, tale che $\gamma u = f$, che abbiamo costruito per dimostrare il teorema 1, si ha, in virtù della (20),

$$\| u \|_{W(\Omega)} \leq C \| f \|_{T(\Gamma)} .$$

A fortiori si avrà, per la $v \in A(\Omega)$ che ha per traccia f,

$$\| v \|_{W(\Omega)} \leq C \| f \|_{T(\Gamma)} .$$

Inoltre si ha, come si dimostra facilmente,

$$\| v \|_{L^2(\Omega)} \leq C_1 \| f \|_{L^2(\Gamma)} + C_2 \| v \|_{W(\Omega)} .$$

Da questa si deduce che è

$$\| v \|_{A(\Omega)} \leq C \| f \|_{T(\Gamma)} . \tag{25}$$

Perciò la corrispondenza che fa passare da $T(\Gamma)$ ad $A(\Omega)$ è lineare; per la biunivocità della corrispondenza, in virtù di un teorema di Banach, anche la trasformazione inversa è lineare.

Enunciamo da ultimo un teorema che stabilisce una interessante proprietà di $T(\Gamma)$, considerato come sottospazio di $L^2(\Gamma)$:

TEOREMA 4. *L'operazione di immersione di $T(\Gamma)$ in $L^2(\Gamma)$ è completamente continua.*

Si tratta di dimostrare che una successione $\{f_n\}$ tale che sia $f_n \in T(\Gamma)$ e sia $\| f_n \|_{T(\Gamma)} \leq 1$ è relativamente compatta in $L^2(\Gamma)$. Consideriamo la successione $\{v_n\}$ delle funzioni $v_n \in A(\Omega)$ tali che $\gamma v_n = f_n$. Per il noto teorema di Rellich [29]) potremo estrarre da questa successione una successione convergente in $L^2(\Omega)$. Sia questa $\{ v_{n_k} \}$.

Consideriamo la differenza

$$f_{n_{k'}} - f_{n_{k''}} \quad \text{per} \quad k', \ k'' \to \infty.$$

---

[29]) Che vale certamente per insiemi aperti soddisfacenti alle nostre ipotesi.

Applichiamo la limitazione (3) tenendo presente che si ha, per la (25),

$$\| v_{n_k} \|_{W(\Omega)} \leq C.$$

Avremo

$$\| f_{n_{k'}} - f_{n_{k''}} \|^2_{L^2(\Gamma)} \leq C_1 \| v_{n_{k'}} - v_{n_{k''}} \|^2_{L^2(\Omega)} + 2C_2C \| v_{n_{k'}} - v_{n_{k''}} \|_{L^2(\Omega)}$$

da cui risulta che la successione parziale $\{f_{n_k}\}$ è convergente in $L^2(\Gamma)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] BANACH - *Théorie des opérations linéaires.* Varsavia, 1932.

[2] BOCHNER e CHANDRASEKHARAN - *Fourier Transforms.* Annals of Math. Studies 19 (1949).

[3] COURANT e HILBERT - *Methoden der Mathematischen Physik.* Vol. II. Berlino, 1937.

[4] DENY e LIONS - *Les espaces du type de Beppo Levi.* Annales de l'Institut Fourier, vol. V, 305-370 (1955).

[5] LERAY - *Hyperbolic differential equations.* Princeton (1955).

[6] MIRANDA - *Sulla sommabilità delle derivate di una funzione armonica hölderiana.* Rend. Acc. Sc. Fis. e Matem. di Napoli, s. IV, vol. 18.

[7] MORREY C. B. Jr. - *Functions of several variables and absolute continuity.* Duke Math. Journal, *6*, 187-215, (1940).

[8] SCHWARTZ - *Théories des Distributions.* Vol. I e II, Parigi, 1950.

[9] STAMPACCHIA - *Sopra una classe di funzioni in due variabili. Applicazioni agli integrali doppi del calcolo delle variazioni.* Giorn. di Mat. di Battaglini *79*, 169-208 (1950).

[10] STAMPACCHIA - *Sopra una classe di funzioni in n variabili.* Ricerche di Matematica, *1*, 27-54 (1951).