Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Angelo Tonolo

Sugli spazi riemanniani normali ad n dimensioni

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 26 (1956), p. 328-333

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1956__26__328_0>

SUGLI SPAZI RIEMANNIANI NORMALI AD n DIMENSIONI

Nota (*) *di* ANGELO TONOLO (*a Padova*)

Alcuni anni or sono [1]) ho assegnato delle condizioni necessarie e sufficienti affinchè uno spazio riemanniano V_3 sia normale, cioè affinchè con le linee delle sue tre congruenze principali si possa costruire (almeno) un sistema triplo ortogonale di superficie.

Successivamente lo Schouten [2]) ha generalizzato il problema assumendo in uno spazio riemanniano V_n, con $n \geq 3$, un campo qualsiasi di affinori simmetrici, con distinti autovalori, e lo ha risolto con i suoi espressivi ed agili algoritmi. Il Nijenhuis [3]) ha risolto la quistione anche per gli spazi X_n senza metrica e senza connessione.

Mi sono ora proposto il problema di caratterizzare gli spazi V_n riemanniani normali con $n > 3$ estendendo il metodo esposto nella mia precedente ricerca. Questa estensione non

---

(*) Pervenuta in Redazione il 4 dicembre 1956.
Indirizzo dell'A.: Seminario matematico, Università, Padova.

1) A. TONOLO, *Sulle varietà riemanniane normali a tre dimensioni*, Pont. Accad. Sci., Acta, Vol. XIII, (1949); Rend. Accad. Naz. Lincei, Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., Serie VIII, Vol. VI, (1949).

2) J. A. SCHOUTEN, *Sur les tenseurs de V_n aux directions principales V_{n-1}-normales*, Conférence au Colloque de Géométrie différentielle à Louvain, 11-14 Avril, (1951).

3) A. NIJENHUIS, *X_{n-1}-forming sets of eigenvectors*, Proc. Kon. Akad. van Wet. Amsterdam, Serie A, Vol. LIV, (1951).

J. HAANTJES, *On X_m-forming sets of eigenvectors*, Ibidem, Serie A, Vol. LVIII, (1955).

A. FRÖLICHER and A. NIJENHUIS, *Theory of vector-valued differential forms*, Ibidem, Serie A, Vol. LIX, (1956).

porta alle equazioni assegnate dallo Schouten; essa assegna alle condizioni di normalità la forma seguente: certi polinomi $P_{\lambda\mu\sigma}(\rho)$ nella indeterminata ρ, i quali si costruiscono operando sulle componenti del tensore misto di Ricci $K_{\bullet\mu}^{\ \nu}$ e loro derivate prime rispetto alle coordinate di V_n, devono essere divisibili per il $\mathrm{Det}(K_{\bullet\mu}^{\ \nu} - \rho\delta_\mu^\nu)$. È essenziale supporre che gli zeri di questo determinante (autovalori di $K_{\bullet\mu}^{\ \nu}$) siano semplici. In tale ipotesi il risultato è valido per ogni campo di affinori simmetrici di V_n.

1. - Siano: (α, β, λ, μ, ν, ξ, σ, τ, $=1, 2, \ldots, n$) V_n uno spazio riemanniano con le coordinate ξ^λ, $g_{\mu\nu}$ il suo tensore metrico, $K_{\mu\nu}$ il tensore contratto di Ricci, $\rho_h = \rho_h(\xi^\lambda)$ ($h = 1, 2, \ldots, n$) le radici dell'equazione

$$\mathrm{Det}\,(K_{\bullet\mu}^{\ \nu} - \rho\delta_\mu^\nu) = 0, \tag{1}$$

(autovalori di $K_{\bullet\mu}^{\ \nu}$). Noi supporremo che esse siano semplici; allora vi sono in V_n n determinate direzioni principali mutuamente ortogonali e noi indicheremo con $\overset{h}{i}_\lambda$ ($h = 1, 2, \ldots, n$) n vettori unità lungo queste direzioni (sistema covariante di autovettori). Normale è lo spazio V_n quando i campi $\overset{h}{i}_\lambda$ sono V_{n-1}-normali. È noto che ciò avviene solo e soltanto quando

$$\gamma_{\mu\nu\sigma} = \overset{h}{i}_\mu(\partial_\nu \overset{h}{i}_\sigma - \partial_\sigma \overset{h}{i}_\nu) + \text{termini ciclici} = 0, \quad (\mu \neq \nu \neq \sigma) \tag{2}$$

$$\partial_\lambda = \frac{\partial}{\partial\xi^\lambda}.$$

Per semplificare in seguito le notazioni, denoteremo con $\rho = \rho(\xi^\lambda)$ una generica delle ρ_h e con i_λ i corrispondenti autovettori; valgono allora le identità

$$(K_{\bullet\mu}^{\ \nu} - \rho(\xi^\lambda)\delta_\mu^\nu)i_\nu = 0. \tag{3}$$

Poichè la radice $\rho(\xi^\lambda)$ è supposta semplice per l'equazione (1), la matrice del determinante che figura al primo membro della (1) con $\rho = \rho(\xi^\lambda)$ è di caratteristica $n-1$; perciò i complementi algebrici degli elementi di una sua linea sono proporzionali ai complementi algebrici degli elementi di una sua linea parallela. Posto allora

$$k_\mu^\nu = K_{\cdot\mu}^{\,\nu} - \rho(\xi^\lambda)\delta_\mu^\nu, \tag{4}$$

il risultato della risoluzione del sistema (3) può scriversi così:

$$m_\mu i_\nu = A_{\mu\nu}, \tag{5}$$

ove abbiamo indicato con

$$A_{\mu\nu} = A_{\mu\nu}(\xi^\lambda) \tag{6}$$

i complementi algebrici degli elementi (4) della matrice $\| k_\mu^\nu \|$.

Nel seguito giocano un ufficio essenziale le seguenti espressioni:

$$A_{\mu\nu\sigma} = A_{\tau\mu}\partial_\nu A_{\tau\sigma} - A_{\tau\sigma}\partial_\nu A_{\tau\mu} + \text{termini ciclici}. \tag{7}$$
$$\mu \neq \nu \neq \sigma.$$

Esse sono funzioni delle coordinate ξ^λ e si costruiscono operando soltanto sulle componenti $K_{\cdot\mu}^{\,\nu}$ e loro derivate prime rispetto a queste variabili.

2. - Poniamo:

$$h_\mu^\nu = K_{\cdot\mu}^{\,\nu} - \rho\delta_\mu^\nu, \tag{8}$$

$$E = E(\xi^\lambda, \rho) = \mathrm{Det}\,(h_\mu^\nu) = 0, \tag{9}$$

ove ρ va pensata ora come una indeterminata, e denotiamo con

$$B_{\mu\nu} = B_{\mu\nu}(\xi^\lambda, \rho) \tag{10}$$

i complementi algebrici degli elementi (8) della matrice $\| h_\mu^\nu \|$. Essi sono funzioni intere nella ρ i cui coefficienti dipendono dalle ξ^λ e si identificano con i complementi algebrici (6) quando al posto della indeterminata ρ poniamo la radice $\rho = \rho(\xi^\lambda)$ dell'equazione (1), cioè della (9); abbiamo pertanto

$$A_{\mu\nu} = B_{\mu\nu}[\xi^\lambda, \rho(\xi^\lambda)]. \tag{11}$$

Premettiamo la notazione seguente: data una generica funzione delle ξ^λ e della ρ

$$F = F(\xi^\lambda, \rho),$$

con il simbolo $[F]$ intendiamo la funzione delle sole ξ^λ che si ricava dalla F quando al posto della ρ poniamo la radice $\rho(\xi^\lambda)$; cioè

$$[F] = F(\xi^\lambda, \rho(\xi^\lambda)). \tag{12}$$

Dalla (11) si ricava allora

$$\partial_\alpha A_{\mu\nu} = [\partial_\alpha B_{\mu\nu} + \partial_\rho B_{\mu\nu} \partial_\alpha \rho]. \tag{13}$$

Poichè $\rho(\xi^\lambda)$ è radice semplice dell'equazione (9), sarà

$$[E] = 0, \ [\partial_\rho E] \neq 0,$$

e quindi

$$\partial_\alpha \rho = -\left[\frac{\partial_\alpha E}{\partial_\rho E}\right].$$

Sostituendo nella (13) ricaviamo

$$[\partial_\rho E]\partial_\alpha A_{\mu\nu} = [\partial_\rho E \partial_\alpha B_{\mu\nu} - \partial_\alpha E \partial_\rho B_{\mu\nu}]. \tag{15}$$

Moltiplichiamo la (15) per un generico complemento algebrico $A_{\beta\omega}$; per la (11) e la convenzione (12), otteniamo

$$[\partial_\rho E] A_{\beta\omega} \partial_\alpha A_{\mu\nu} = [B_{\beta\omega} \{ \partial_\rho E \partial_\alpha B_{\mu\nu} - \partial_\alpha E \partial_\rho B_{\mu\nu} \}]. \tag{16}$$

Consideriamo l'espressione che figura dentro la parentesi quadra del secondo membro della (16), cioè

$$B_{\beta\omega} \{ \partial_\rho E \partial_\alpha B_{\mu\nu} - \partial_\alpha E \partial_\rho B_{\mu\nu} \}. \tag{17}$$

Essa è manifestamente una funzione intera nella indeterminata ρ i cui coefficienti sono funzioni delle sole ξ^λ la quale si identifica col primo membro della (16) quando al posto della ρ poniamo la radice $\rho(\xi^\lambda)$. Fissiamo ora nella (7) un valore per τ, che denotiamo ancora con questa lettera, e poniamo:

$$A^*_{\mu\nu\sigma/\tau} = A_{\tau\mu}\partial_\nu A_{\tau\sigma} - A_{\tau\sigma}\partial_\nu A_{\tau\mu} . \tag{18}$$

Moltiplichiamo per $[\partial_\rho E]$; si trae, applicando la (16),

$$[\partial_\rho E]A^*_{\mu\nu\sigma/\tau} = [\partial_\rho E \{ B_{\tau\mu}\partial_\nu B_{\tau\sigma} - B_{\tau\sigma}\partial_\nu B_{\tau\mu} \} + \tag{19}$$

$$+ \partial_\nu E \{ B_{\tau\sigma}\partial_\rho B_{\tau\mu} - B_{\tau\mu}\partial_\rho B_{\tau\sigma} \}].$$

Per quanto abbiamo detto in precedenza l'espressione fra parentesi quadre nel secondo membro della (19), è un polinomio nella ρ con coefficienti dipendenti dalle coordinate ξ^λ; esso è uguale al primo membro della (19) quando ρ viene sostituita con la radice $\rho(\xi^\lambda)$.

Nella (19) pensiamo effettuata la sommatoria rispetto a τ e facciamo circolare gli indici μ, ν, σ; otteniamo

$$[\partial_\rho E]A_{\mu\nu\sigma} = [\partial_\rho E \{ B_{\tau\mu}\partial_\nu B_{\tau\sigma} - B_{\tau\sigma}\partial_\nu B_{\tau\mu} \} + \tag{20}$$

$$+ \partial_\nu E \{ B_{\tau\sigma}\partial_\rho B_{\tau\mu} - B_{\tau\mu}\partial_\rho B_{\tau\sigma} \} + \text{termini ciclici}].$$

Il secondo membro della (20), prima di effettuarvi la sostituzione $\rho = \rho(\xi^\lambda)$, è una funzione intera nella ρ:

$$P_{\mu\nu\sigma}(\rho) = p^{(s)}_{\mu\nu\sigma}\rho^s + p^{(s-1)}_{\mu\nu\sigma}\rho^{s-1} + \dots p_{\mu\nu\sigma} , \tag{21}$$

e si ha identicamente

$$[\partial_\rho E]A_{\mu\nu\sigma} = [P_{\mu\nu\sigma}(\rho)]. \tag{22}$$

Va osservato che i coefficienti $p_{\mu\nu\sigma}$, $p^{(t)}_{\mu\nu\sigma}$ $(t = 1, \dots, s)$ si costruiscono a mezzo delle componenti del tensore misto di Ricci e delle loro derivate parziali prime rispetto alle ξ^λ.

3. - Possiamo scrivere la (7) nella forma seguente:

$$A_{\mu\nu\sigma} = A_{\tau\mu}(\partial_\nu A_{\tau\sigma} - \partial_\sigma A_{\tau\nu}) + \text{termini ciclici}. \tag{23}$$

Poniamo al posto dei complementi algebrici $A_{\mu\nu}$ i primi membri della (5); si ottiene

$$A_{\mu\nu\sigma} = m_\tau i_\mu \{ \partial_\nu m_\tau i_\sigma - \partial_\sigma m_\tau i_\nu \} + \text{termini ciclici.} \tag{24}$$

Eseguendo le derivazioni e tenendo conto delle (2) si ricava

$$A_{\mu\nu\sigma} = M\gamma_{\mu\nu\sigma}, \qquad M = \Sigma_\tau m_\tau^2 \neq 0. \tag{25}$$

Supponiamo che il campo i_λ^h sia V_{n-1}-normale; allora sono nulle le $\gamma_{\mu\nu\sigma}$ e quindi anche le $A_{\mu\nu\sigma}$ per le (25); per le (22) ogni $\rho_h(\xi^\lambda)$ è anche radice del polinomio (21) $P_{\mu\nu\sigma}(\rho)$ qualunque sia la terna $\mu\nu\sigma$, con $\mu \neq \nu \neq \sigma$. Questi polinomi sono perciò divisibili per il determinante $E(\rho)$:

$$P_{\mu\nu\sigma}(\rho) = E(\rho) Q_{\mu\nu\sigma}(\rho). \tag{26}$$

Inversamente, se valgono le (26) per ogni terna $\mu\nu\sigma$, e se $\rho = \rho(\xi^\lambda)$ sono le radici dell'equazione $E(\rho) = 0$, supposte semplici, allora si annullano anche i polinomi $P_{\mu\nu\sigma}(\rho)$ con $\rho = \rho(\xi^\lambda)$; per le (22) sono allora nulle le $A_{\mu\nu\sigma}$ e quindi le $\gamma_{\mu\nu\sigma}$ per le (25); il campo dei vettori i_λ^h è perciò V_{n-1}-normale.

OSSERVAZIONE. - È manifesto che la precedente teoria è senz'altro applicabile ad ogni campo di affinori simmetrici di V_n, nell'ipotesi che siano semplici le radici della corrispondente equazione secolare.