BRUNO PINI

Sull'unicità della soluzione del problema di Dirichlet per le equazioni lineari ellittiche in due variabili

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 26 (1956), p. 223-231

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1956__26__223_0>

SULL'UNICITÀ DELLA SOLUZIONE DEL PROBLEMA DI DIRICHLET PER LE EQUAZIONI LINEARI ELLITTICHE IN DUE VARIABILI

Nota (*) *di* BRUNO PINI (*a Cagliari*)

Consideriamo l'equazione

$$\mathfrak{L}[u] = \sum_{0 \leq i+j \leq 2n} a_{ij}(x, y) \frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial y^j} = f(x, y) \tag{1}$$

ellittica in un certo dominio $\mathfrak{T}$. Sia $\mathfrak{D}$ un dominio contenuto in $\mathfrak{T}$; il problema di Dirichlet per l'equazione (1) relativamente al dominio $\mathfrak{D}$ consiste nella determinazione di una funzione $u(x, y)$ tale che

$$\mathfrak{L}[u] = f \quad \text{in} \quad \mathfrak{D} - \mathfrak{F}\mathfrak{D}$$

$$\frac{\partial^k u}{\partial \nu^k} = f_k \quad \text{su} \quad \mathfrak{F}\mathfrak{D} \quad , \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

essendo ν la normale alla $\mathfrak{F}\mathfrak{D}$, rivolta per esempio verso l'interno di $\mathfrak{D}$.

In un lavoro di Viscik [1]) e in uno di Browder [2]) è provato

---

(*) Pervenuta in Redazione il 9 ottobre 1956.

Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università, Cagliari.

1) M. I. VISCIK, *Sui sistemi fortemente ellittici di equazioni differenziali*, Mat. Sbornik, 29 (1951)) (in russo).

2) F. E. BROWDER, *Strongly elliptic systems of differential equations*, Contributions to the theory of partial differential equations, Princeton-New Jersey (1954). Notiamo che l'affermazione che ci interessa e che noi intendiamo relativa a una equazione d'ordine $2n$ in due variabili, in questo lavoro di Browder e in quello di Viscik citato in 1) è provata, più in generale, sebbene da un punto di vista solo qualitativo, relativamente ai sistemi fortemente ellittici in un numero arbitrario di variabili.

che, sotto certe ipotesi sui coefficienti, termine noto e dati al contorno (che in entrambi i detti lavori s'intendono assunti dalla soluzione in un certo senso generalizzato) la soluzione è unica se il diam $\cdot\, \mathfrak{D}$ è sufficientemente piccolo.

In un precedente lavoro di Bremekamp [3]) questa affermazione, relativamente al problema ordinario, era stata provata per quella particolare equazione del quarto ordine in cui il gruppo dei termini contenenti le derivate quarte è il laplaciano iterato.

I ragionamenti di Bremekamp, a differenza di quelli di Viscik e di Browder, sono del tutto elementari e hanno il pregio di permettere la determinazione esplicita di un confine superiore per il diam $\mathfrak{D}$, tale da assicurare il verificarsi di quanto sopra affermato. Con una preventiva osservazione i ragionamenti di Bremekamp si possono facilmente estendere così da conseguire un risultato analogo a quello di questo A. per la più generale equazione ellittica d'ordine $2n$; riteniamo perciò non del tutto inutile mostrare ciò.

1. - Dall'ipotesi di ellitticità per la (1) segue l'esistenza di una costante positiva δ tale che

$$\sum_{\substack{ij\\ i+j=2n}} a_{ij}(x, y)\lambda^i\mu^j > \delta(\lambda^2+\mu^2)^n \quad \text{per } (x, y)\in\mathfrak{T}.$$

Ne segue, indicando con Δ_k l'operatore $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ iterato k volte, che anche l'equazione

$$\sum_{\substack{ij\\ i+j=2n}} a_{ij}(x, y)\,\frac{\partial^{i+j}u}{\partial x^i\partial y^j} - \varepsilon\Delta_n u = 0$$

è ellittica se ε è un numero positivo minore di δ.

D'altra parte la forma binaria

$$\sum_{\substack{ij\\ i+j=2n}} a_{ij}(x, y)\lambda^i\mu^j - \varepsilon(\lambda^2+\mu^2)^n,$$

che è definita positiva, si può esprimere come somma di due

[3]) H. BREMEKAMP, *On the partial differential equations occurring in the theory of the elastic plate*, Nieuw Arch. Wiskunde, XXII (1947).

quadrati

$$\sum_{1}^{2}{}_i \left(\sum_{0}^{n}{}_h \alpha_{ih}(x, y)\lambda^{n-h}\mu^h\right)^2.$$

Pertanto l'equazione (1), se i coefficienti si suppongono opportunamente regolari, si può sempre presentare nella forma

$$(1') \qquad \mathcal{L}[u] = \varepsilon\Delta_n u + \sum_{1}^{2}{}_i \left(\sum_{0}^{n}{}_h \alpha_{ih}(x, y) \frac{\partial^n u}{\partial x^{n-h}\partial y^h}\right)^{(2)} + \\ + \sum_{0 \leq i+j \leq 2n-1} {}_{ij} \beta_{ij}(x, y) \frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial y^j} = \varphi(x, y):$$

s'intende che

$$\left(\sum_{0}^{n}{}_h \alpha_{ih}(x, y) \frac{\partial^n u}{\partial x^{n-h}\partial y^h}\right)^{(2)} = \\ = \sum_{0}^{n}{}_k \alpha_{ik}(x, y) \frac{\partial^n}{\partial x^{n-k}\partial y^k} \left(\sum_{0}^{n}{}_h \alpha_{ih}(x, y) \frac{\partial^n u}{\partial x^{n-h}\partial y^h}\right).$$

2. - Facciamo ora un paio di osservazioni che saranno utili nel seguito.

Sia $u(x, y)$ una funzione di classe $C^{(2n)}$ in $\mathfrak{D} - \mathfrak{F}\mathfrak{D}$ e di classe $C^{(2n-1)}$ in $\mathfrak{D}$ tale che

$$\frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial y^j} = 0 \qquad \text{su} \quad \mathfrak{F}\mathfrak{D} \quad \text{per} \quad i + j \leq n - 1.$$

Indichiamo con $[m]$ il più grande numero naturale contenuto nel numero positivo m, e con

$$F_k\left(\frac{\partial^k u}{\partial x^k}, \frac{\partial^k u}{\partial x^{k-1}\partial y}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial y^k}\right)$$

una forma quadratica nelle derivate k-sime della u.

Ebbene, *se* $a(x, y)$ *è una funzione di classe* $C^{(i+j)}$ *in* $\mathfrak{D}$, *si ha*

$$(2) \quad \iint_{\mathfrak{D}} a u \frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial y^j} dx dy = \iint_{\mathfrak{D}} \sum_{0}^{\left[\frac{i+j}{2}\right]}{}_k F_k dx dy \qquad per \quad i + j \leq 2n - 1.$$

Supponiamo di aver provato ciò per $i + j < m$ e mostriamo

1 6

che ciò è vero anche per $i+j=m$. Si ha

$$\iint_{\mathfrak{D}} au \frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial y^j} dxdy = (-1)^{[i/2]+[j/2]} \iint_{\mathfrak{D}} \frac{\partial^{[i/2]+[j/2]} au}{\partial x^{[i/2]} \partial y^{[j/2]}} \frac{\partial^{i+j-[i/2]-[j/2]} u}{\partial x^{i-[i/2]} \partial y^{j-[j/2]}} dxdy =$$

$$= (-1)^{[i/2]+[j/2]} \left(\iint_{\mathfrak{D}} av \frac{\partial^{i+j-2[i/2]-2[j/2]} v}{\partial x^{i-2[i/2]} \partial y^{j-2[j/2]}} dxdy + \right.$$

$$\left. + \Sigma_{hk} \iint_{\mathfrak{D}} b_{hk} \frac{\partial^{h+k} u}{\partial x^h \partial y^k} \frac{\partial^{i+j-[i/2]-[j/2]} u}{\partial x^{i-[i/2]} \partial y^{j-[j/2]}} dxdy \right)$$

ove

$$v = \frac{\partial^{[i/2]+[j/2]} u}{\partial x^{[i/2]} \partial y^{[j/2]}}$$

e le b_{hk} sono certe derivate di a moltiplicate per certi fattori numerici. Ora il primo integrale all'ultimo membro è uguale a uno dei seguenti

$$\iint_{\mathfrak{D}} av^2 dxdy \ , \quad -\frac{1}{2} \iint_{\mathfrak{D}} \frac{\partial a}{\partial x} v^2 dxdy \ , \quad -\frac{1}{2} \iint_{\mathfrak{D}} \frac{\partial a}{\partial y} v^2 dxdy \ ,$$

$$\iint_{\mathfrak{D}} \left(-a \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 a}{\partial x \partial y} v^2 \right) dxdy$$

(rispettivamente secondochè è: i pari, j pari; i dispari, j pari; i pari, j dispari; i dispari, j dispari). L'integrale che figura sotto la sommaria si scrive

$$(-1)^{h+k} \iint_{\mathfrak{D}} u \frac{\partial^{h+k}}{\partial x^h \partial y^k} \left(b_{hk} \frac{\partial^{i+j-[i/2]-[j/2]} u}{\partial x^{i-[i/2]} \partial y^{j-[j/2]}} \right) dxdy$$

che è eguale a una somma d'integrali del tipo

$$\iint_{\mathfrak{D}} cu \frac{\partial^{r+s} u}{\partial x^r \partial y^s} dxdy$$

con $r+s < i+j$. Da ciò si deduce subito l'affermazione.

Inoltre *se* $a(x, y)$ *è una funzione di classe* $C^{(n+m)}$ *in* $\mathfrak{D}$, *nelle ipotesi già fatte su u, si ha*

$$(3)\qquad \iint\limits_{\mathfrak{D}} a\,\frac{\partial^m u}{\partial x^{m-i}\partial y^i}\,\frac{\partial^n u}{\partial x^{n-j}\partial y^j}\,dxdy=\iint\limits_{\mathfrak{D}}\sum_{0}^{\left[\frac{n+m}{2}\right]}{}_k\, F_k dxdy \quad \text{per } m\leq n-1.$$

L'integrale a primo membro è uguale a

$$(-1)^m\iint\limits_{\mathfrak{D}} u\,\frac{\partial^m}{\partial x^{m-i}\partial y^i}\left(a\,\frac{\partial^n u}{\partial x^{n-j}\,\partial y^j}\right)dxdy$$

da cui sviluppando e tenendo presente il risultato precedente si ha quanto si è affermato.

È quasi superfluo notare che ogni volta che si applica il teorema di Gauss-Green s'intende che ci riferiamo a un dominio interno a $\mathfrak{D}$, di frontiera opportunamente regolare, che si fa poi tendere a $\mathfrak{D}$.

3. - Torniamo ora all'equazione (1'). Supponiamo che i coefficienti $\alpha_{ij}(x, y)$ siano di classe $C^{(2n)}$ e i coefficienti $\beta_{ij}(x, y)$ di classe $C^{(i+j)}$ in $\mathfrak{T}$.

Supponiamo che la $\mathfrak{F}\mathfrak{D}$ sia costituita da curve regolari.

Vogliamo provare che *se* diam $\mathfrak{D} < d$, *essendo d un certo numero positivo che risulterà determinato da ciò che segue, una funzione $u(x, y)$, di classe $C^{(2n)}$ in $\mathfrak{D}-\mathfrak{F}\mathfrak{D}$ e di classe $C^{(2n-1)}$ in $\mathfrak{D}$* [4]*, tale che*

$$(4)\qquad \begin{cases} \mathfrak{L}[u]=0 \quad \text{in} \quad \mathfrak{D}-\mathfrak{F}\mathfrak{D} \\ \dfrac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i\,\partial y^j}=0 \quad \text{su} \quad \mathfrak{F}\mathfrak{D} \quad \textit{per} \quad i+j\leq n-1, \end{cases}$$

è identicamente nulla.

Si ha

$$(5)\qquad \iint\limits_{\mathfrak{D}} u\Delta_{2p}u\,dxdy=\iint\limits_{\mathfrak{D}}(\Delta_p u)^2dxdy \quad \text{per} \quad n=2p,$$

---

[4]) L'ipotesi che la $u(x, y)$ sia di classe $C^{(2n-1)}$ in $\mathfrak{D}$ è riducibile; cfr. B. PINI, *Sul problema di Dirichlet per le equazioni a derivate parziali lineari ellittiche in due variabili*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, XXV (1956).

$$(5') \iint_{\mathfrak{D}} u\Delta_{2p+1} u dxdy = -\iint_{\mathfrak{D}} \left[\left(\frac{\partial \Delta_p u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta_p u}{\partial y}\right)^2\right] dxdy \text{ per } n = 2p+1$$

$$(6) \qquad \iint_{\mathfrak{D}} \alpha_{ij} u \frac{\partial^n}{\partial x^{n-j}\partial y^j}\left(\alpha_{hk}\frac{\partial^n u}{\partial x^{n-k}\partial y^k}\right) dxdy =$$

$$= (-1)^n \iint_{\mathfrak{D}} \alpha_{ij}\alpha_{hk} \frac{\partial^n u}{\partial x^{n-j}\partial y^j}\frac{\partial^n u}{\partial x^{n-k}\partial y^k} dxdy +$$

$$+ (-1)^n \Sigma_{mr} \iint_{\mathfrak{D}} \alpha_{hk}\gamma_{ijmr} \frac{\partial^m u}{\partial x^{m-r}\partial y^r}\frac{\partial^n u}{\partial y^{n-k}\partial y^k} dxdy,$$

essendo le γ_{ijrm} certe derivate di α_{ij} moltiplicate per certi fattori numerici ed $m < n$. Allora, in base alle (2), (3), (5), (5′) e (6), integrando $u\,\mathfrak{L}[u] = 0$ su $\mathfrak{D}$ e tenendo presente che $\left[\frac{2n-1}{2}\right] = n-1$, si ha

$$(7) \iint_{\mathfrak{D}} \left|\varepsilon(\Delta_p u)^2 + \sum_{1}^{2}{}_i\left(\sum_{0}^{n}{}_h \alpha_{ih}\frac{\partial^n u}{\partial x^{n-h}\partial y^h}\right)^2 + \sum_{0}^{n-1}{}_k F_k\right| dxdy = 0 \text{ per } n=2p$$

$$(7') \quad \iint_{\mathfrak{D}} \left\{ \varepsilon\left[\left(\frac{\partial \Delta_p u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta_p u}{\partial y}\right)^2\right] + \sum_{1}^{2}{}_i\left(\sum_{0}^{n}{}_h \alpha_{ih}\frac{\partial^n u}{\partial x^{n-h}\partial y^h}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{0}^{n-1}{}_k F_k \right\} dxdy = 0 \quad \text{per} \quad n = 2p+1.$$

Osserviamo poi che se $n = 2p$ si ha

$$\iint_{\mathfrak{D}} \frac{\partial^{2p-2} u}{\partial x^{2p-2-2i}\partial y^{2i}}\frac{\partial^{2p} u}{\partial x^{2p-2j}\partial y^{2j}} dxdy = -\iint_{\mathfrak{D}} \left(\frac{\partial^{2p-1} u}{\partial x^{2p-1-(i+j)}\partial y^{i+j}}\right)^2 dxdy;$$

se $n = 2p+1$ si hanno formole analoghe ponendo $\partial u/\partial x$ oppure $\partial u/\partial y$ al posto di u. Pertanto se $n = 2p$

$$(8) \qquad \iint_{\mathfrak{D}} \Delta_p u \sum_{0}^{p-1}{}_i \frac{\partial^{2p-2} u}{\partial x^{2p-2-2i}\partial y^{2i}} dxdy = -\iint_{\mathfrak{D}} \Phi_{n-1} dxdy$$

essendo Φ_{n-1} una combinazione a coefficienti costanti positivi dei quadrati delle derivate $(n-1)$-sime della u.

Analogamente se $n = 2p + 1$

$$(8') \quad \iint_{\mathfrak{D}} \left(\frac{\partial \Delta_p u}{\partial x} \sum_{0}^{p-1}{}_i \frac{\partial^{2p-2} \frac{\partial u}{\partial x}}{\partial x^{2p-2-2i} \partial y^{2i}} + \frac{\partial \Delta_p u}{\partial y} \sum_{0}^{p-1}{}_i \frac{\partial^{2p-2} \frac{\partial u}{\partial y}}{\partial x^{2p-2-2i} \partial y^{2i}} \right) dxdy =$$

$$= - \iint_{\mathfrak{D}} \Phi_{n-1}\, dx\, dy$$

ove Φ_{n-1} ha il significato già specificato.

Infine se le $M(x, y)$ ed $N(x, y)$ sono funzioni continue su $\mathfrak{D}$ insieme alle derivate $\partial M/\partial x$ e $\partial N/\partial y$, si ha

$$(9) \quad 0 = \iint_{\mathfrak{D}} \sum_{0}^{[k/2]}{}_i \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left[M_{ik} \left(\frac{\partial^k u}{\partial x^{k-i} \partial y^i} \right)^2 \right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[N_{ik} \left(\frac{\partial^k u}{\partial x^i \partial y^{k-i}} \right)^2 \right] \right\} dxdy =$$

$$= \iint_{\mathfrak{D}} \left\{ \sum_{0}^{[k/2]}{}_i \left[\left(M_{ik} \frac{\partial^k u}{\partial x^{k-i} \partial y^i} + \frac{\partial^{k+1} u}{\partial x^{k+1-i} \partial y^i} \right)^2 + \right.\right.$$

$$\left. + \left(N_{ik} \frac{\partial^k u}{\partial x^i \partial y^{k-i}} + \frac{\partial^{k+1} u}{\partial x^i \partial y^{k+1-i}} \right)^2 \right] +$$

$$+ \sum_{0}^{[k/2]}{}_i \left[\left(\frac{\partial M_{ik}}{\partial x} - M_{ik}^2 \right) \left(\frac{\partial^k u}{\partial x^{k-i} \partial y^i} \right)^2 + \left(\frac{\partial N_{ik}}{\partial y} - N_{ik}^2 \right) \left(\frac{\partial^k u}{\partial x^i \partial y^{k-i}} \right)^2 \right] -$$

$$\left. - \sum_{0}^{[k/2]}{}_i \left[\left(\frac{\partial^{k+1} u}{\partial x^{k+1-i} \partial y^i} \right)^2 + \left(\frac{\partial^{k+1} u}{\partial x^i \partial y^{k+1-i}} \right)^2 \right] \right\} dxdy$$

per $k = 0, 1, \ldots, n-2$. Poniamoci nel caso di $n = 2p$ (in modo del tutto analogo si procede se $n = 2p + 1$). Sommiamo alla (7) la (8) moltiplicata per $2\varepsilon\lambda$ e le (9) per $k = 0, 1, \ldots, n-2$; si ha

$$(10) \quad \iint_{\mathfrak{D}} \left\{ \varepsilon \left(\Delta_p u + \lambda \sum_{0}^{p-1}{}_i \frac{\partial^{2p-2} u}{\partial x^{2p-2-2i} \partial y^{2i}} \right)^2 + \sum_{1}^{2}{}_i \left(\sum_{0}^{n}{}_h \alpha_{ih} \frac{\partial^n u}{\partial x^{n-h} \partial y^h} \right)^2 + \right.$$

$$+ \sum_{0}^{n-2}{}_k \sum_{0}^{[k/2]}{}_i \left[\left(M_{ik} \frac{\partial^k u}{\partial x^{k-i} \partial y^i} + \frac{\partial^{k+1} u}{\partial x^{k+1-i} \partial y^i} \right)^2 + \right.$$

$$\left. \left. + \left(N_{ik} \frac{\partial^k u}{\partial x^i \partial y^{k-i}} + \frac{\partial^{k+1} u}{\partial x^i \partial y^{k+1-i}} \right)^2 \right] + \sum_{0}^{n-1}{}_k \Psi_k \right\} dxdy = 0$$

dove

$$\Psi_{n-1} = 2\varepsilon\lambda\,\Phi_{n-1} + F_{n-1} - \sum_{i=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]} \left[\left(\frac{\partial^{n-1}u}{\partial x^{n-1-i}\partial y^i}\right)^2 + \left(\frac{\partial^{n-1}u}{\partial x^i\partial y^{n-1-i}}\right)^2\right];$$

$$\Psi_{n-2} = -\,\varepsilon\lambda^2\left(\sum_{i=0}^{p-1} \frac{\partial^{2p-2}u}{\partial x^{2p-2-2i}\partial y^{2i}}\right)^2 + F_{n-2} +$$

$$+\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]}\left[\left(\frac{\partial M_{i,\,n-2}}{\partial x} - M^2_{i,\,n-2}\right)\left(\frac{\partial^{n-2}u}{\partial x^{n-2-i}\partial y^i}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial N_{i,\,n-2}}{\partial y} - N^2_{i,\,n-2}\right)\left(\frac{\partial^{n-2}u}{\partial x^i\partial y^{n-2-i}}\right)^2\right] -$$

$$-\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-3}{2}\right]}\left[\left(\frac{\partial^{n-2}u}{\partial x^{n-2-i}\partial y^i}\right)^2 + \left(\frac{\partial^{n-2}u}{\partial x^i\partial y^{n-2-i}}\right)^2\right];$$

Ψ_{n-j} per $j = 3, \ldots, n-1$, si ottiene da Ψ_{n-2} sopprimendo il primo termine e ponendo $n-j$ al posto di $n-2$;

$$\Psi_0 = F_0 + \left(\frac{\partial M_{00}}{\partial x} - M^2_{00} + \frac{\partial N_{00}}{\partial y} - N^2_{00}\right)u^2.$$

Indichiamo ora con $\overline{\Psi}_k$ la forma binaria di grado $2k$ che si ottiene dalla Ψ_k ponendo $\alpha^i\beta^j$ al posto di $\partial^{i+j}u/\partial x^i\partial y^j$.

Intanto si può scegliere λ in modo che $\overline{\Psi}_{n-1}$ sia semidefinita positiva. Fissato λ, poniamo

$$(11)\qquad \frac{\partial M_{i,n-2}}{\partial x} - M^2_{i,\,n-2} - \mu^2_{i,\,n-2} = 0\,,\quad \frac{\partial N_{i,\,n-2}}{\partial y} - N^2_{i,n-2} - \nu^2_{i,\,n-2} = 0$$

essendo $\mu_{i,\,n-2}$ e $\nu_{i,\,n-2}$ delle costanti positive scelte in modo che

$$-\,\varepsilon\lambda^2\Big(\sum_{i=0}^{p-1}\alpha^{2p-2-2i}\,\beta^{2i}\Big)^2 + \overline{F}_{n-2} +$$

$$+\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]}\left(\mu^2_{i,\,n-2}\,\alpha^{2n-4-2i}\,\beta^{2i} + \nu^2_{i.n-2}\,\alpha^{2i}\,\beta^{2n-4-2i}\right) -$$

$$-\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-3}{2}\right]}\left[\alpha^{2n-4-2i}\,\beta^{2i} + \alpha^{2i}\,\beta^{2n-4-2i}\right]$$

sia semidefinita positiva. Per soddisfare le (11) basta prendere

$$M_{i,n-2} = \mu_{i,n-2} \operatorname{tg} \mu_{i,n-2}(x - x_0) \quad , \quad N_{i,n-2} = \nu_{i,n-2} \operatorname{tg} \nu_{i,n-2}(y - y_0)$$

$$-\frac{\pi}{2\mu_{i,n-2}} < x - x_0 < \frac{\pi}{2\mu_{i,n-2}} \quad , \quad -\frac{\pi}{2\nu_{i,n-2}} < y - y_0 < \frac{\pi}{2\nu_{i,n-2}}$$

(x_0, y_0 costanti)

In particolare si può prendere $\mu_{i,n-2} = \nu_{i,n-2}$.

In modo analogo si determinano successivamente le $M_{i,n-3}$, ..., M_{00} ed $N_{i,n-3}$, ..., N_{00}; le μ_{00} ed ν_{00} si determinano in modo che $F_0/u^2 + \mu_{00}^2 + \nu_{00}^2$ sia sempre positiva.

Pertanto se $\mathfrak{D}$ è interno al rettangolo $-\pi/2\mu \leq x - x_0 \leq \leq \pi/2\mu$, $-\pi/2\nu \leq y - y_0 < \pi/2\nu$ dove $\mu = \max \mu_{ik}$ per $i = 0, 1, ..., \left[\frac{k}{2}\right]$ e $k = 0, 1, ..., n-2$ e $\nu = \max \nu_{ik}$ per $i = 0, 1, ..., \left[\frac{k}{2}\right]$ e $k = 0, 1, ..., n-2$ la (10) sussisterà solo se $u \equiv 0$.

Scegliendo $\mu_{ij} = \nu_{ij}$ si ha dunque che:

Se diam $\mathfrak{D} < \pi/\mu$ *il problema di Dirichlet per la* (1') *ha al più una soluzione.*