RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ALDO GHIZZETTI

Sulla convergenza dei procedimenti di calcolo, degli integrali definiti, forniti dalle formule di quadratura

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 26 (1956), p. 201-222

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1956__26__201_0>

SULLA CONVERGENZA DEI PROCEDIMENTI DI CALCOLO, DEGLI INTEGRALI DEFINITI, FORNITI DALLE FORMULE DI QUADRATURA (⁰)

Nota (*) *di* ALDO GHIZZETTI (*a Roma*)

SUNTO. - *Dopo aver richiamato, da un precedente lavoro, una teoria generale delle formule di quadratura ed avervi apportati alcuni complementi, si determinano i casi in cui tali formule forniscono un procedimento di calcolo convergente.*

Introduzione.

In un precedente lavoro [1]) ho richiamato l'attenzione su un metodo generale per costruire formule di quadratura e ne ho mostrate alcune applicazioni [2]). Mi propongo in questa Nota di studiare sotto quali condizioni tali formule siano atte a fornire procedimenti convergenti di calcolo degli integrali definiti.

Nel § 1 riespongo in breve il sopraddetto metodo che conduce a quelle che chiamo *formule elementari di quadratura* per integrali del tipo $\int_a^b f(x)g(x)dx$ con $g(x)$ funzione fissa (*peso*) sommabile in (a, b).

(*) Pervenuta in Redazione il 2 ottobre 1956.

Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università, Roma.

⁰) Lavoro eseguito presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

1) Vedi A. GHIZZETTI, *Sulle formule di quadratura*, Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano, Vol. XXVI, 1954-55.

2) Altre applicazioni e complementi vari si possono trovare in A. GHIZZETTI, *Lezioni di Analisi Superiore* (Teoria dell'approssimazione lineare), Libreria Eredi Virgilio Veschi, Roma, 1955-56, Cap. VI.

Nel § 2, per mezzo di una suddivisione in parti dell'intervallo (a, b), passo dalle formule elementari ad altre che chiamo *formule generalizzate di quadratura*. Sono queste le formule che devono essere applicate per il calcolo numerico dell'integrale considerato. Si tratta di vedere se esse siano *convergenti*, ossia se il loro resto $\rho(f)$ tenda a zero quando vi tende la massima ampiezza δ degli intervalli di suddivisione.

Nel § 3 si studia la questione nel caso particolare $g(x) \equiv 1$; si dimostra che il $\lim\limits_{\delta \to 0} \rho(f)$ esiste sempre finito e si individuano subito le formule di quadratura convergenti. Quelle non convergenti possono essere modificate e trasformate in altre convergenti, se si prescinde da un caso eccezionale, ben precisato, in cui si hanno formule del tutto inutilizzabili.

Nel § 4 si passa al caso generale di $g(x)$ non costante. Non si possono più avere risultati esaurienti come nel § precedente, perchè il resto $\rho(f)$ in generale non tende ad alcun limite. Tuttavia basta avere una certa precauzione nel costruire la formula di quadratura per ottenere sempre la convergenza di essa.

§ 1. - Formule elementari di quadratura.

Sia (a, b) un fissato intervallo *limitato*. Indicheremo con $L(a, b)$ la classe delle funzioni sommabili (secondo Lebesgue) in (a, b); con $C^n(a, b)$ [oppure $AC^{(n)}(a, b)$] quella delle funzioni dotate in (a, b) di derivata n-esima continua [oppure assolutamente continua].

Consideriamo un integrale del tipo $\int\limits_a^b f(x) g(x) dx$, vale a dire con un *peso* fisso $g(x)$ e supponiamo $f(x) \in AC^{n-1}(a, b)$, $g(x) \in L(a, b)$. Fissati in (a, b) un certo numero m di punti $x_1, x_2, \ldots, x_m$ (con $a \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_m \leq b$), chiameremo *formula elementare di quadratura* (relativa al predetto integrale e con i *punti fondamentali* $x_1, x_2, \ldots, x_m$) ogni formula del tipo

$$(1,1) \qquad \int\limits_a^b f(x) g(x) dx = \sum_{h=0}^{n-1} \sum_{i=1}^{m} A_{hi} f^{(h)}(x_i) + R(f),$$

sotto la condizione che esista un operatore differenziale lineare di ordine n:

$$E = \sum_{k=0}^{n} a_k(x) \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} \tag{1,2}$$

con

$$a_k(x) \in C^{n-k}(a, b) \quad ; \quad a_0(x) \neq 0 \quad \text{in } (a, b), \tag{1,3}$$

in modo tale che la $E(f) = 0$ (quasi ovunque) implichi $R(f) = 0$.

In base a (1,3) si può considerare l'*operatore aggiunto* di E, cioè

$$E^* = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} a_k(x) \; ; \tag{1,4}$$

assieme a questo avremo occasione di considerare anche questi altri operatori:

$$E_r^* = \sum_{k=0}^{r} (-1)^{r-k} \frac{d^{r-k}}{dx^{r-k}} a_k(x) \quad , \quad (r = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{1,5}$$

Si dimostra [3]) che dalla (1,1) restano univocamente determinati $m-1$ integrali $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_{m-1}(x)$ dell'equazione differenziale

$$E^*(\varphi) = g(x) \tag{1,6}$$

che, assieme ai due $\varphi_0(x)$, $\varphi_m(x)$ individuati dalle condizioni iniziali

$$\varphi_0^{(h)}(a) = 0 \quad , \quad \varphi_m^{(h)}(b) = 0 \qquad (h = 0, 1, \ldots, n-1), \tag{1,7}$$

permettono di esprimere i coefficienti A_{hi} ed il resto $R(f)$ della (1,1) stessa nel modo seguente

$$A_{hi} = [E^*_{n-h-1}(\varphi_i - \varphi_{i-1})]_{x=x_i} \; , \; R(f) = \sum_{i=0}^{m} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) E(f) dx \; (^4). \tag{1,8}$$

---

[3]) Vedi J. RADON, *Restausdrücke bei Interpolations-und Quadraturformeln durch bestimmte Integrale*, Monatshefte für Mathematik und Physik, 42, 389-396 (1935); A. GHIZZETTI, loc. cit. in [1]).

[4]) Conveniamo di porre $x_0 = a$, $x_{m+1} = b$.

Viceversa [5]), comunque si fissino $m-1$ integrali $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \dots, \varphi_{m-1}(x)$ della (1,6) e si calcolino corrispondentemente i coefficienti A_{hi} ed il funzionale lineare $R(f)$ secondo le (1,8), si ottiene, sostituendo in (1,1), una formula elementare di quadratura.

Tutto ciò si stabilisce come conseguenza della formula di Green relativa agli operatori E, E^*, cioè in sostanza per mezzo di un opportuno gioco di integrazioni per parti, senza far uso alcuno di procedimenti di interpolazione. Le formule di quadratura classica corrispondono al caso particolare $E = \dfrac{d^n}{dx^n}$.

È opportuno per il seguito fissare un'espressione per i considerati integrali $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_{m-1}(x), \varphi_m(x)$ della (1,6). Indicato con $K(x, s)$ il nucleo risolvente di Cauchy relativo all'operatore E^*, si ha intanto in base alle (1,7):

$$(1,9) \qquad \varphi_0(x) = \int_a^x K(x, s) g(s) ds \quad , \quad \varphi_m(x) = -\int_x^b K(x, s) g(s) ds .$$

Per quanto riguarda gli altri integrali $\varphi_i(x)$, $(i = 1, 2, \dots, m-1)$, li rappresenteremo sempre nel modo seguente

$$(1,10) \qquad \varphi_i(x) = \frac{1}{2}[\varphi_0(x) + \varphi_m(x)] + \sum_{r=1}^{n} c_{ir} \psi_r(x) , \qquad (i = 1, 2, \dots, m-1),$$

ove le c_{ir} sono costanti arbitrarie e $[\psi_1(x), \dots, \psi_n(x)]$ un sistema fondamentale di integrali dell'equazione $E^*(\psi) = 0$.

§ 2. - Formule generalizzate di quadratura.

Da ogni formula elementare si può dedurre una *formula generalizzata di quadratura* seguendo il classico procedimento di suddividere l'intervallo (a, b) in un certo numero ν di intervalli parziali mediante i punti

$$(2,1) \qquad a = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{\nu-1} < \alpha_\nu = b$$

---

[5]) Vedi A. GHIZZETTI, loc. cit. in [1]).

e di applicare successivamente la formula elementare ai singoli intervalli parziali.

Ciò è immediato nel caso particolare $g(x) \equiv 1$. Infatti, posto

$$\delta_j = \alpha_j - \alpha_{j-1} \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ \nu), \tag{2,2}$$

ed osservato che si può scrivere

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=1}^{\nu} \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f(\xi)d\xi = \sum_{j=1}^{\nu} \frac{\delta_j}{b-a} \int_a^b f\left(\alpha_{j-1} + \delta_j \frac{x-a}{b-a}\right)dx, \tag{2,3}$$

l'applicazione della (1,1) [con $g(x) \equiv 1$] a questi ultimi integrali fornisce

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=1}^{\nu} \frac{\delta_j}{b-a} \left\{ \sum_{h=0}^{n-1} \sum_{i=1}^{m} A_{hi} \left[\frac{d^h}{dx^h} f\left(\alpha_{j-1} + \delta_j \frac{x-a}{b-a}\right)\right]_{x=x_i} + \right.$$
$$\left. + R\left[f\left(\alpha_{j-1} + \delta_j \frac{x-a}{b-a}\right)\right] \right\},$$

donde la *formula generalizzata* che si voleva ottenere

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{h=0}^{n-1} \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\delta_j}{b-a}\right)^{h+1} A_{hi} f^{(h)}\left(\alpha_{j-1} + \delta_j \frac{x_i - a}{b-a}\right) + \rho(f) \tag{2,4}$$

col resto $\rho(f)$ espresso da

$$\rho(f) = \sum_{j=1}^{\nu} \frac{\delta_j}{b-a} R\left[f\left(\alpha_{j-1} + \delta_j \frac{x-a}{b-a}\right)\right].$$

Tenendo conto della seconda delle (1,8) e dell'espressione (1,2) dell'operatore E, si può porre $\rho(f)$ sotto la forma

$$\rho(f) = \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{m} \left(\frac{\delta_j}{b-a}\right)^{n-k+1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) a_k(x) f^{(n-k)}\left(\alpha_{j-1} + \delta_j \frac{x-a}{b-a}\right)dx. \tag{2,5}$$

Invece il procedimento non è più immediato nel caso generale, cioè quando il peso $g(x)$ *non sia costante,* giacchè, scritta la formula analoga della (2,3):

$$(2,6)\qquad \int_a^b f(x)g(x)dx = \sum_{j=1}^{\nu} \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f(\xi)g(\xi)d\xi =$$

$$= \sum_{j=1}^{\nu} \frac{\delta_j}{b-a} \int_a^b f\left(\alpha_{j-1} + \delta_j \frac{x-a}{b-a}\right) g\left(\alpha_{j-1} + \delta_j \frac{x-a}{b-a}\right) dx$$

non è possibile applicare la formula elementare (1,1) a questi ultimi integrali, perchè in essi figura un peso diverso da $g(x)$.

La difficoltà può essere superata nel modo seguente. Si osservi che, posto

$$(2,7)\qquad \lambda_j = \frac{\delta_j}{b-a}\ ,\quad \mu_j = \frac{\alpha_{j-1} - a\dfrac{\delta_j}{b-a}}{1 - \dfrac{\delta_j}{b-a}}\ ,\quad (j = 1, 2, \ldots.\ \nu)\ ,$$

risulta

$$g\left(\alpha_{j-1} + \delta_j \frac{x-a}{b-a}\right) = g[\lambda_j x + (1-\lambda_j)\mu_j],$$

$$0 < \lambda_j \leq 1 \quad , \quad a \leq \mu_j \leq b\ ,$$

cosicchè sarebbe possibile passare da (2,6) ad una formula generalizzata qualora si avesse a disposizione una formula elementare per l'integrale

$$\int_a^b f(x)g[\lambda x + (1-\lambda)\mu]dx\ ,$$

ove figura un peso dipendente da due parametri λ, μ variabili nell'insieme

$$(2,8)\qquad T(0 < \lambda \leq 1 \quad ; \quad a \leq \mu \leq b)\quad {}^{6}).$$

[6]) Si sarebbe potuto scrivere più semplicemente $\int_a^b f(x)g(\lambda x + \mu)dx$, mantenendo (λ, μ) nel triangolo $0 < \lambda \leq 1$, $a(1-\lambda) \leq \mu \leq b(1-\lambda)$, ma allora non sarebbe immediatamente visibile che per $\lambda = 1$ il peso $g(\lambda x + \mu)$ deve ridursi a $g(x)$.

Ma una tale formula si costruisce immediatamente col metodo descritto nel § 1. Propriamente, considerata l'equazione differenziale [cfr. (1,6)]:

$$E^*(\varphi) = g[\lambda x + (1 - \lambda)\mu]$$

e di essa i seguenti integrali [cfr. (1,9) e (1,10)]:

$$(2,9) \qquad \varphi_0(x\,;\ \lambda,\ \mu) = \int_a^x K(x,\ s) g[\lambda s + (1 - \lambda)\mu] ds\,,$$

$$\varphi_m(x\,;\ \lambda,\ \mu) = -\int_x^b K(x,\ s) g[\lambda s + (1 - \lambda)\mu] ds\,,$$

$$(2,10) \qquad \varphi_i(x\,;\ \lambda,\ \mu) = \frac{1}{2}\,[\varphi_0(x\,;\ \lambda,\ \mu) + \varphi_m(x\,;\ \lambda,\ \mu)] + \\ + \sum_{r=1}^{n} c_{ir}(\lambda,\ \mu)\psi_r(x), \qquad (i = 1, 2, \dots, m-1)\,,$$

ove le funzioni $c_{ir}(\lambda,\ \mu)$ possono essere fissate ad arbitrio, si perviene alla formula elementare [cfr. (1,1)]:

$$(2,11) \qquad \int_a^b f(x) g[\lambda x + (1 - \lambda)\mu] dx = \sum_{h=0}^{n-1} \sum_{i=1}^{m} A_{hi}(\lambda,\ \mu) f^{(h)}(x_i) + R(f\,;\ \lambda,\ \mu),$$

con [cfr. (1,8)]:

$$(2,12) \qquad A_{hi}(\lambda,\ \mu) = [E^*_{n-h-1}\,\{\varphi_i(x\,;\ \lambda,\ \mu) - \varphi_{i-1}(x\,;\ \lambda,\ \mu)\}]_{x=x_i}\,,$$

$$(2,13) \qquad R(f\,;\ \lambda,\ \mu) = \sum_{i=0}^{m} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i(x\,;\ \lambda,\ \mu) E(f) dx\,.$$

Occorre però stabilire qualche restrizione nella scelta delle funzioni $c_{ir}(\lambda,\ \mu)$ che figurano in (2, 10). Intanto si vede facilmente che $\varphi_0(x;\ \lambda,\ \mu)$, $\varphi_m(x;\ \lambda,\ \mu)$ e loro derivate (rispetto a x) fino all'ordine $n-1$ sono funzioni continue di λ, μ nell'insieme T e che si ha, uniformemente rispetto a x e μ variabili in $(a,\ b)$:

$$\lim_{\lambda \to 1} \varphi_0^{(h)}(x;\ \lambda,\ \mu) = \varphi_0^{(h)}(x) \quad , \quad \lim_{\lambda \to 1} \varphi_m^{(h)}(x;\ \lambda,\ \mu) = \varphi_m^{(h)}(x)\,, \\ (h = 0,\ 1, \dots,\ n-1)\,,$$

ove $\varphi_0(x)$, $\varphi_m(x)$ sono le funzioni (1,9). Noi imporremo che di analoga proprietà godano anche gli altri integrali $\varphi_1(x), \dots, \varphi_{m-1}(x)$ definiti da (2, 10) e perciò faremo la seguente ipotesi:

A) *le funzioni* $c_{ir}(\lambda, \mu)$ *che figurano in* (2,10) *sono continue in* T *e si ha* $c_{ir}(1, \mu) = c_{ir}$, *ove le* c_{ir} *sono le costanti che compaiono in* (1,10).

Dalle (2,12) e (2,13) si trae allora che $A_{hi}(\lambda, \mu)$ e $R(f; \lambda, \mu)$ (per ogni fissata f) sono funzioni di λ, μ continue in T e che per $\lambda \to 1$ la formula elementare (2,11) si riduce con continuità alla (1,1), uniformemente rispetto a μ variabile in (a, b).

Ma è opportuno fare anche un'altra ipotesi suggerita dal fatto che, posto $K = \max\limits_{a \leq x, s \leq b} | K(x, s) |$, dalle (2,9) si trae

$$\left.\begin{array}{l} | \varphi_0(x; \lambda, \mu) | \\ | \varphi_m(x; \lambda, \mu) | \end{array}\right\} \leq K \int_a^b | g[\lambda s + (1 - \lambda)\mu] | \, ds = \frac{K}{\lambda} \int_{\lambda a + (1-\lambda)\mu}^{\lambda b + (1-\lambda)\mu} | g(t) | \, dt ,$$

onde, per l'assoluta continuità dell'integrale della funzione sommabile g, si può affermare che

$$\lim_{\lambda \to 0} \lambda \varphi_0(x; \lambda, \mu) = 0 \quad , \quad \lim_{\lambda \to 0} \lambda \varphi_m(x; \lambda, \mu) = 0,$$

uniformemente rispetto a x e μ variabili in (a, b) [7]). È opportuno fare in modo che della stessa proprietà godano anche gli altri integrali $\varphi_i(x; \lambda, \mu)$ espressi da (2, 10) e a tale scopo faremo quest'altra ipotesi:

B) *le funzioni* $c_{ir}(\lambda, \mu)$ *sono tali da aversi* $\lim\limits_{\lambda \to 0} \lambda c_{ir}(\lambda, \mu) = 0$ *uniformemente rispetto a* μ *variabile in* (a, b).

Con ciò possiamo scrivere che sussiste la

$$\lim_{\lambda \to 0} \lambda \varphi_i(x; \lambda, \mu) = 0 \quad , \quad (i = 0, 1, \dots, m - 1, m) \tag{2,14}$$

uniformemente per x *e* μ *variabili in* (a, b).

Resta dunque inteso che la *formula elementare* (2,11) col

---

7) Si tenga presente che per $\lambda = 0$ si perde in generale la continuità di $\varphi_0(x; \lambda, \mu)$, $\varphi_m(x; \lambda, \mu)$, come è evidente dalle (2,9).

resto (2,13) *si intende costruita sotto le ipotesi A e B*, vale a dire in modo da ridursi per $\lambda \to 1$ alla formula (1,1) da cui siamo partiti ed in modo che valga la (2,14) [8]).

Ciò posto, riprendiamo la (2,6); da essa in virtù di (2,11) possiamo trarre

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \sum_{j=1}^{\nu} \frac{\delta_j}{b-a} \left\{ \sum_{h=0}^{n-1} \sum_{i=1}^{m} A_{hi}(\lambda_j,\ \mu_j) \left[\frac{d^h}{dx^h} f\left(\alpha_{j-1} + \delta_j \frac{x-a}{b-a}\right)\right]_{x=x_i} + R\left[f\left(\alpha_{j-1} + \delta_j \frac{x-a}{b-a}\right);\ \lambda_j,\ \mu_j\right] \right\}$$

e pervenire così alla *formula generalizzata* [9]):

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{h=0}^{n-1} \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\delta_j}{b-a}\right)^{h+1} A_{hi}(\lambda_j,\ \mu_j) f^{(h)}\left(\alpha_{j-1} + \delta_j \frac{x_i-a}{b-a}\right) + \rho(f), \tag{2,15}$$

---

8) Vale la pena di osservare che il modo più semplice di realizzare le ipotesi A e B è di scegliere $c_{ir}(\lambda,\ \mu) = c_{ir}$. Da (2,9), (2,10), (2,12), si trae allora

$$A_{h1}(\lambda,\ \mu) = -\frac{1}{2}\int_a^b [E^*_{n-h-1}\{K(x,\ s)\}]_{x=x_1}\, g[\lambda s + (1-\lambda)\mu]ds + \sum_{r=1}^{n} (c_{1r} \qquad)[E^*_{n-h-1}\{\psi_r(x)\}]_{x=x_1}$$

$$A_{hi}(\lambda,\ \mu) = \sum_{r=1}^{n} (c_{ir} - c_{i-1,\ r})[E^*_{n-h-1}\{\psi_r(x)\}]_{x=x_i}$$
$$(i = 2,\ 3, \ldots,\ m-1),$$

$$A_{hm}(\lambda,\ \mu) = -\frac{1}{2}\int_a^b [E^*_{n-h-1}\{K(x,\ s)\}]_{x=x_m}\, g[\lambda s + (1-\lambda)\mu]ds + \sum_{r=1}^{n} (\ - c_{m-1,\ r})[E^*_{n-h-1}\{\psi_r(x)\}]_{x=x_m},$$

onde si ottiene, in pari tempo, il vantaggio che nella (2,11) soltanto i coefficienti $A_{h1}(\lambda,\ \mu)$, $A_{hm}(\lambda,\ \mu)$ dipendono effettivamente da λ, μ, mentre i rimanenti sono costanti coi medesimi valori che avevano nella (1,1).

9) Si tenga presente che in questa formula λ_j, μ_j, sono dati da (2,7).

con

$$\rho(f)=\sum_{j=1}^{\nu}\frac{\delta_j}{b-a}\,R\left[f\left(\alpha_{j-1}+\delta_j\,\frac{x-a}{b-a}\right);\ \lambda_j,\ \mu_j\right],$$

vale a dire, per le (2,13) e (1,2):

$$(2,16)\quad \rho(f)=\sum_{j=1}^{\nu}\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{m}\left(\frac{\delta_j}{b-a}\right)^{n-k+1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\varphi_i(x;\lambda_j,\mu_j)a_k(x)f^{(n-k)}\left(\alpha_{j-1}+\right.$$

$$\left.+\,\delta_j\,\frac{x-a}{b-a}\right)dx\,.$$

Si tratta ora di studiare la convergenza o meno delle formule ottenute (2,4) e (2,15), nel senso precisato nell'introduzione.

Aggiungiamo qualche osservazione su quanto precede.

OSSERVAZIONE 1ª - Si noti la grandissima generalità delle formule di quadratura qui considerate. Esse dipendono da vari elementi arbitrari [punti fondamentali: operatore E; integrali $\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_{m-1}(x)$ della $E^*(\varphi)=g$] e quindi possono dar luogo ad innumerevoli casi particolari, che comprendono tutte le formule di quadratura note [si veda la bibliografia del lavoro citato in [1]) e gli esempi del lavoro citato in [2])].

OSSERVAZIONE 2ª - La scelta degli elementi arbitrari di cui sopra è però molto limitata da considerazioni di ordine pratico È ovvio, per esempio, che l'operatore E deve essere scelto in modo che l'equazione differenziale $E^*(\varphi)=g$ si possa integrare in termini finiti e non solo per quadrature (che sarebbero dello stesso tipo di quelle per cui vogliamo costruire la formula). Può bastare anzi la conoscenza di un solo integrale $\varphi_1(x)$ di tale equazione, potendosi sempre eliminare la considerazione dei due integrali fissi $\varphi_0(x)$, $\varphi_m(x)$, scegliendo $x_1=a$ e $x_m=b$ [come risulta subito dalle (1,8)]. Si noti poi che un dato integrale $\int_a^b F(x)dx$, con $F(x)\in L(a,\,b)$, può in infiniti modi essere scritto nella forma $\int_a^b f(x)g(x)dx$ con $f(x) \in AC^{n-1}(a, b)$, $g(x) \in$ $\in L(a, b)$, onde in generale non sarà difficile scegliere g ed E in modo da realizzare le predette condizioni.

OSSERVAZIONE 3ª - Non ci siamo occupati di integrali estesi ad intervalli *illimitati*, giacchè, con opportune sostituzioni, questi possono sempre ridursi ad integrali estesi ad intervalli limitati. Ciò però introduce in generale delle singolarità nella funzione integranda ed è appunto per questo che, negli integrali qui considerati, abbiamo messo un peso $g(x)$ da supporsi soltanto sommabile.

§ 3. - Studio del resto nel caso $g(x) \equiv 1$.

Consideriamo la formula generalizzata (2,4) il cui resto $\rho(f)$ è espresso da (2,5) e, posto

(3,1) $$\delta = \max_{j=1,2,\dots,\nu} \delta_j ,$$

dimostriamo i seguenti teoremi:

I. - *Per ogni* $f(x) \in AC^{n-1}(a, b)$, *il resto* $\rho(f)$ *della formula generalizzata* (2,4) *gode della proprietà espressa dalla*

(3,2) $$\lim_{\delta \to 0} \rho(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \cdot \rho(1) .$$

DIM. - Partendo dalla (2,5), scriviamo $\rho(f) = \rho_0(f) + \rho_1(f)$ con

(3,3) $$\rho_0(f) = \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{m} \left(\frac{\delta_j}{b-a}\right)^{n-k+1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) a_k(x) f^{(n-k)}\left(\alpha_{j-1} + \delta_j \frac{x-a}{b-a}\right) dx ,$$

$$(3,4)\qquad \rho_1(f) = \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{i=0}^{m} \frac{\delta_j}{b-a} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) a_n(x) f\left(\alpha_{j-1} + \delta_j \frac{x-a}{b-a}\right) dx.$$

Posto

$$\max_{\substack{a \leq x \leq b \\ i=0,1,\dots,m}} |\varphi_i(x)| = H \ ; \ \max_{a \leq x \leq b} |a_k(x)| = A_k \ , \ (k = 0, 1, \dots, n-1) \, ,$$

dalla (3,3) si ricava

$$|\rho_0(f)| \leq H \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{k=0}^{n-1} A_k \left(\frac{\delta_j}{b-a}\right)^{n-k+1} \sum_{i=0}^{m} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left| f^{(n-k)} \left(\alpha_{j-1} + \delta_j \frac{x-a}{b-a}\right) \right| dx =$$

$$= H \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{k=0}^{n-1} A_k \left(\frac{\delta_j}{b-a}\right)^{n-k+1} \int_a^b \left| f^{(n-k)}\left(\alpha_{j-1} + \delta_j \frac{x-a}{b-a}\right) \right| dx =$$

$$= H \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{k=0}^{n-1} A_k \left(\frac{\delta_j}{b-a}\right)^{n-k} \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} | f^{(n-k)}(\xi) | \, d\xi \leq$$

$$\leq H \sum_{k=0}^{n-1} A_k \left(\frac{\delta}{b-a}\right)^{n-k} \sum_{j=1}^{\nu} \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} | f^{(n-k)}(\xi) | \, d\xi$$

ed infine

$$(3,5)\qquad |\rho_0(f)| \leq H \frac{\delta}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} A_k \left(\frac{\delta}{b-a}\right)^{n-k-1} \int_a^b | f^{(n-k)}(\xi) | \, d\xi \, ,$$

onde si può affermare che

$$(3,6)\qquad \lim_{\delta \to 0} \rho_0(f) = 0 \, .$$

La (3,4) si può scrivere

$$\rho_1(f) = \frac{1}{b-a} \sum_{i=0}^{m} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) a_n(x) \cdot \sum_{j=1}^{\nu} \delta_j f\left(\alpha_{j-1} + \delta_j \frac{x-a}{b-a}\right) \cdot dx$$

e siccome

$$\lim_{\delta \to} \sum_{j=1}^{\nu} \delta_j f\left(\alpha_{j-1} + \delta_j \frac{x-a}{b-a}\right) = \int_a^b f(\xi) d\xi ,$$

uniformemente per $a \leq x \leq b$, si deduce:

$$\lim_{\delta \to 0} \rho_1(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \cdot \sum_{i=0}^{m} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) a_n(x) dx . \tag{3,7}$$

D'altra parte se nella (2,5) si pone $f(x) \equiv 1$, si ottiene

$$\rho(1) = \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{i=0}^{m} \frac{\delta_j}{b-a} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) a_n(x) dx = \sum_{i=0}^{m} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) a_n(x) dx , \tag{3,8}$$

cosicchè da (3,6) e (3,7) segue la tesi (3,2).

II. - *Condizione necessaria e sufficiente affinchè risulti* $\lim_{\delta \to 0} \rho(f) = 0$, *qualunque sia* $f(x) \in AC^{n-1}(a, b)$ *è che sia* $\rho(1) = 0$, *vale a dire che la formula di quadratura* [*generalizzata* (2,4) *o elementare* (1,1) *ove si ponga* $g(x) \equiv 1$] *sia esatta per* $f(x) \equiv 1$. *La condizione si può anche esprimere sotto la forma*

$$\sum_{i=1}^{m} A_{0i} = b - a. \tag{3,9}$$

DIM. - La prima affermazione segue subito dal teor. I. Se si pone $f(x) \equiv 1$ nella (2,4) [oppure nella (1,1) scritta con $g(x) \equiv 1$ osservando che per (1,8) e (3,8) risulta $R(1) = \rho(1)$] si ottiene

$$b - a = \sum_{i=1}^{m} A_{0i} + \rho(1), \tag{3,10}$$

donde la seconda affermazione.

III. - *Se* $a_n(x) \equiv 0$, *cioè se nel prefissato operatore differenziale lineare* E *non figura il termine di ordine zero, di guisa che si possa porre*

$$E = \sum_{k=0}^{n-p} a_k(x) \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} \quad , \quad [\text{con } 1 \leq p \leq n \; ; \; a_{n-p}(x) \not\equiv 0] , \tag{3,11}$$

allora si ha senz'altro $\lim\limits_{\rho \to 0} \rho(f) = 0$ *e più precisamente*

$$\rho(f) = O(\delta^p) \quad , \quad (\text{per } \delta \to 0), \tag{3,12}$$

qualunque sia $f(x) \in AC^{n-1}(a, b)$.

DIM. - Riprendendo la dimostrazione del teor. I, si ha, nelle ipotesi attuali, $\rho_1(f) = 0$, $\rho(f) = \rho_0(f)$, $A_k = 0$ per $k > n - p$, cosicchè la (3,5) può essere sostituita dalla

$$|\rho(f)| \leq H \frac{\delta}{b-a} \sum_{k=0}^{n-p} A_k \left(\frac{\delta}{b-a}\right)^{n-k-1} \int_a^b |f^{(n-k)}(\xi)| \, d\xi =$$

$$= H \left(\frac{\delta}{b-a}\right)^p \sum_{k=0}^{n-p} A_k \left(\frac{\delta}{b-a}\right)^{n-p-k} \int_a^b |f^{(n-k)}(\xi)| \, d\xi$$

che implica la (3,12) [10]), c.d.d.

Conviene ora esaminare più da vicino il caso $a_n(x) \not\equiv 0$. Poniamo

$$S_0 = \sum_{i=1}^{m} A_{0i} \tag{3,13}$$

ed osserviamo anzitutto che, se $S_0 = b - a$, si ha $\lim\limits_{\delta \to 0} \rho(f) = 0$ (teor. II).

Supponiamo ora $S_0 \neq b - a$ e $S_0 \neq 0$. Allora, in virtù di (3,2), (3,10), (3,13) si può scrivere

$$\lim_{\delta \to 0} \rho(f) = \left(1 - \frac{S_0}{b-a}\right) \int_a^b f(x) dx$$

e modificare la formula generalizzata (2,4) nel modo seguente

$$\int_a^b f(x) dx - \left(1 - \frac{S_0}{b-a}\right) \int_a^b f(x) dx =$$

---

10) A prescindere da (3,12), si può anche osservare che $a_n(x) \equiv 0$ significa $E(1) = 0$; ciò implica che nella formula elementare (1,1), scritta con $g(x) \equiv 1$, risulti $R(1) = 0$, onde si ricade nel teor. II.

$$= \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{h=0}^{n-1} \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\delta_j}{b-a}\right)^{h+1} A_{hi} f^{(h)} \left(\alpha_{j-1} + \delta_j \frac{x_i - a}{b-a}\right) + [\rho(f) - \lim_{\delta \to 0} \rho(f)] ;$$

se ne deduce

$$(3{,}14) \quad \int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{S_0} \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{h=0}^{n-1} \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\delta_j}{b-a}\right)^{h+1} A_{hi} f^{(h)} \left(\alpha_{j-1} + \right.$$
$$\left. + \delta_j \frac{x_i - a}{b-a}\right) + \bar{\rho}(f),$$

con

$$(3{,}15) \qquad \bar{\rho}(f) = \frac{b-a}{S_0} [\rho(f) - \lim_{\delta \to 0} \rho(f)] \quad , \quad \lim_{\delta \to 0} \bar{\rho}(f) = 0 .$$

Infine se $S_0 = 0$, si ha $\lim_{\delta \to 0} \rho(f) = \int_a^b f(x)dx$ e quindi la (2,4) non serve a nulla perchè il resto $\rho(f)$ tende all'integrale stesso che si deve calcolare, mentre la parte approssimante tende a zero; si presenta cioè una situazione opposta a quella che si presentava negli altri casi. L'eventualità $S_0 = 0$ rappresenta dunque l'unico caso irrimediabile di non convergenza; tenuto conto di (1,8) e (3,13) tale eventualità si presenta quando

$$\sum_{i=1}^{m} [E^*_{n-1}(\varphi_i - \varphi_{i-1})]_{x=x_i} = 0$$

ed è chiaro che la si può sempre evitare disponendo opportunamente dell'arbitrarietà dei punti fondamentali e degli integrali $\varphi_1(x), \dots, \varphi_{m-1}(x)$ della $E^*(\varphi) = 1$.

Possiamo pertanto concludere col seguente teorema:

IV. - *In relazione alla formula generalizzata di quadratura* (2,4), *conviene distinguere i seguenti quattro casi*:

1°) $a_n(x) \equiv 0$;

2°) $a_n(x) \equiv\!\!\!|\; 0 \quad , \quad S_0 = b - a$;

3°) $a_n(x) \equiv\!\!\!|\; 0 \quad , \quad S_0 \neq b - a \quad , \quad S_0 \neq 0$;

4°) $a_n(x) \equiv\!\!\!|\; 0 \quad , \quad S_0 = 0$.

Nel caso 1°) *e nel caso* 2°) *la formula* (2,4) *converge. Nel* *caso 3°) la (2,4) non converge, ma converge la formula modificata (3,14). Nel caso 4°) la (2,4) non converge e la (3,14) perde significato; è questo l'unico caso in cui la formula di quadratura è inutilizzabile.*

Aggiungiamo qualche osservazione sui teoremi precedenti.

OSSERVAZIONE 1ª - Il teorema III mostra l'opportunità di scegliere operatori E privi del termine di ordine zero; inoltre esso mostra che l'ordine di infinitesimo del resto $\rho(f)$ coincide (in generale) con l'ordine minimo p delle derivazioni che figurano in E. Conviene perciò scegliere p il più alto possibile e *da questo punto di vista sono privilegiate le formule classiche che corrispondono a* $E = \dfrac{d^n}{dx^n}$ (cioè a $p = n$).

OSSERVAZIONE 2ª - La formula elementare è esatta quando $E(f) = 0$. *Ciò non è più vero in generale per la formula generalizzata* perchè questa è stata ottenuta applicando quella elementare alle varie funzioni $f\left(\alpha_{j-1} + \delta_j \dfrac{x-a}{b-a}\right)$ e l'equazione differenziale $E(f) = 0$ non è invariante rispetto ai cambiamenti lineari di variabile $\xi = \alpha_{j-1} + \delta_j \dfrac{x-a}{b-a}$. *Fa evidentemente eccezione il caso classico* $E = \dfrac{d^n}{dx^n}$, in cui la (2,5) diventa

$$(3,16)\quad \rho(f) = \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{i=0}^{m} \left(\frac{\delta_j}{b-a}\right)^{n+1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) f^{(n)}\left(\alpha_{j-1} + \delta_j \frac{x-a}{b-a}\right) dx\,,$$

onde la formula generalizzata è, al pari di quella elementare, esatta per i polinomi di grado $\leq n-1$.

OSSERVAZIONE 3ª - Le considerazioni precedenti possono far ritenere che basti limitarsi alle formule classiche e sia inutile la considerazione di formule di quadratura costruite in relazione ad operatori più generali. In realtà ciò non è perchè quello che conta in pratica è il riuscire a farsi un'idea dell'ordine di grandezza del resto $\rho(f)$ *per quella particolare*

$f(x)$ che si deve integrare. Ora può darsi che per tale $f(x)$ riesca praticamente impossibile ottenere una valutazione del resto (3,16), mentre la cosa può essere più agevole sulla espressione (2,5) quando si siano scelti convenientemente i coefficienti $a_k(x)$ dell'operatore E. In altre parole, il metodo generale che abbiamo descritto permette di tentare *caso per caso* la costruzione di una formula di quadratura che si presti bene ad una valutazione del resto.

§ 4. - Studio del resto nel caso generale.

Consideriamo la formula generalizzata (2,15) col resto $\rho(f)$ espresso da (2,16). È facile persuadersi che in generale non si può più affermare che esista finito il $\lim\limits_{\delta \to 0} \rho(f)$. Infatti, se si tenta una dimostrazione analoga a quella del teor. I del § precedente, si trova ancora $\lim\limits_{\delta \to 0} \rho_0(f) = 0$ (vedi più avanti: teor. I) ma per quanto riguarda

$$\rho_1(f) = \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{i=0}^{m} \frac{\delta_j}{b-a} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i(x\,;\,\lambda_j,\,\mu_j) a_n(x) f\left(\alpha_{j-1} + \delta_j \frac{x-a}{b-a}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{b-a} \sum_{i=0}^{m} \int_{x_i}^{x_{i+1}} a_n(x) \cdot \sum_{j=1}^{\nu} \delta_j \varphi_i(x\,;\,\lambda_j,\,\mu_j) f\left(\alpha_{j-1} + \delta_j \frac{x-a}{b-a}\right) \cdot dx\,,$$

non è più detto che la somma $\sum\limits_{j=1}^{\nu} \ldots$ di tipo riemanniano che in esso compare, tenda ad un limite finito per $\delta \to 0$, perchè, $\lambda_j \to 0$ e, come già si è osservato (vedi nota [7])), le $\varphi_i(x\,;\,\lambda,\mu)$ in generale non sono più continue (e nemmeno limitate) per $\lambda = 0$.

Si potrebbe dare qualche teorema che assicuri l'esistenza del limite mediante opportune ipotesi su $g(x)$, ma abbiamo trovato che non si arriva ad alcun risultato semplice od interessante dal punto di vista applicativo.

Vi è però un modo semplicissimo per assicurare che sia $\lim\limits_{\delta \to 0} \rho(f) = 0$ per ogni $f(x) \in AC^{n-1}(a,\,b)$: *basta limitarsi a prendere in considerazione quelle formule di quadratura che corri-*

spondono ad operatori E privi del termine di ordine zero, cioè del tipo

$$(4,1)\qquad E=\sum_{k=0}^{n-p} a_k(x)\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}\ ,\qquad [\text{con } 1\leq p\leq n\,;\quad a_{n-p}(x)\not\equiv 0].$$

Sussiste infatti il seguente teorema che l'analogo del teorema III del § precedente:

I. - *Se la formula generalizzata di quadratura* (2,15) *è costruita in corrispondenza ad un operatore E del tipo* (4,1), *allora per ogni* $f(x)\in AC^{n-1}(a,b)$ *si ha* $\lim_{\delta\to 0}\rho(f)=0$ *e più precisamente*

$$(4,2)\qquad \rho(f)=o(\delta^{p-1})\quad ,\quad (\text{per } \delta\to 0).$$

DIM. - Si ha per (2,16) e (4,1):

$$(4,3)\ \rho(f)=\sum_{j=1}^{\nu}\sum_{k=0}^{n-p}\sum_{i=0}^{m}\left(\frac{\delta_j}{b-a}\right)^{n-k+1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\varphi_i(x;\lambda_j,\mu_j)a_k(x)f^{(n-k)}\left(\alpha_{j-1}+\delta_j\frac{x-a}{b-a}\right)dx\,.$$

D'altra parte occorre tener presente che, come si è avvertito nel § 2, la formula (2,15) si intende costruita sotto le ipotesi A e B ivi menzionate, dimodochè (per la B) sussiste la (2,14). Perciò, fissato $\varepsilon>0$, esiste un $\delta_\varepsilon>0$ tale che per $0<\lambda<\dfrac{\delta_\varepsilon}{b-a}$ si abbia

$$|\varphi_i(x;\lambda,\mu)|<\frac{\varepsilon}{\lambda}\quad ,\quad (i=0,1,\dots,m;\ a\leq x,\mu\leq b).$$

Quindi, *supponendo già* $\delta<\delta_\varepsilon$ $\left(\text{e quindi } \lambda_j=\dfrac{\delta_j}{b-a}<\dfrac{\delta_\varepsilon}{b-a}\right)$ si ha nella (4,3) $|\varphi_i(x;\lambda_j,\mu_j)|<\dfrac{\varepsilon}{\lambda_j}=\varepsilon\dfrac{b-a}{\delta_j}$, cosicchè, ponendo $A_k=\max_{a\leq x\leq b}|a_k(x)|$, si può scrivere

$$|\rho(f)|<\varepsilon\sum_{j=1}^{\nu}\sum_{k=0}^{n-p}A_k\left(\frac{\delta_j}{b-a}\right)^{n-k}\sum_{i=0}^{m}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\left|f^{(n-k)}\left(\alpha_{j-1}+\delta_j\frac{x-a}{b-a}\right)\right|dx=$$

$$= \varepsilon \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{k=0}^{n-p} A_k \left(\frac{\delta_j}{b-a}\right)^{n-k} \int_a^b \left| f^{(n-k)}\left(\alpha_{j-1} + \delta_j \frac{x-a}{b-a}\right)\right| dx =$$

$$= \varepsilon \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{k=0}^{n-p} A_k \left(\frac{\delta}{b-a}\right)^{n-k-1} \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} | f^{(n-k)}(\xi) | \, d\xi \leq$$

$$\leq \varepsilon \sum_{k=0}^{n-p} A_k \left(\frac{\delta}{b-a}\right)^{n-k-1} \sum_{j=1}^{\nu} \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} | f^{(n-k)}(\xi) | \, d\xi =$$

$$= \varepsilon \left(\frac{\delta}{b-a}\right)^{p-1} \sum_{k=0}^{n-p} A_k \left(\frac{\delta}{b-a}\right)^{n-p-k} \int_a^b | f^{(n-k)}(\xi) | \, d\xi ,$$

e ne segue la (4,2), c.d.d.

Si possono qui ripetere osservazioni del tutto analoghe a quelle fatte alla fine del § precedente. Ma conviene aggiungerne un'altra.

Nella formula generalizzata (2,15) vi è la complicazione della dipendenza dei coefficienti A_{hi} dai valori λ_j, μ_j assunti dai parametri λ, μ in corrispondenza all'adottata suddivisione in parti dell'intervallo (a, b). In generale tale dipendenza è tutt'altro che semplice e può portare a formule complicate, di scarso valore pratico. In tal caso è opportuno valersi della (2,15) non con riferimento ad un'arbitraria legge di suddivisione dell'intervallo (a, b), ma a qualche legge particolare, scelta col criterio di semplificare il più possibile l'espressione dei coefficienti A_{hi}.

Diamo un semplice esempio. Assumendo

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \quad ; \quad m = 2,\ x_1 = a,\ x_2 = b \quad ; \quad n = 2,\ E = \frac{d^2}{dx^2}$$

e, come integrale $\varphi_1(x;\ \lambda,\ \mu)$ dell'equazione differenziale $\dfrac{d^2\varphi}{dx^2} = g[\lambda x + (1-\lambda)\mu]$, quello che si annulla nei punti a e

b, vale a dire

$$\varphi_1(x;\ \lambda,\ \mu) = -\int_a^x \frac{(s-a)(b-x)}{b-a} \frac{ds}{\sqrt{G(s;\ \lambda,\ \mu)}} -$$

$$-\int_x^b \frac{(x-a)(b-s)}{b-a} \frac{ds}{\sqrt{G(s;\ \lambda,\ \mu)}} \quad [11],$$

la formula elementare (2,11) diventa, nell'ipotesi che $f(x)$ sia dotata di derivata prima assolutamente continua:

$$(4,4) \qquad \int_a^b \frac{f(x)}{\sqrt{G(x;\ \lambda,\ \mu)}}\, dx = A_{01}(\lambda,\ \mu)f(a) + A_{02}(\lambda,\ \mu)f(b) + R\,,$$

con

$$(4,5) \quad A_{01}(\lambda,\ \mu) = \int_a^b \frac{b-s}{b-a} \frac{ds}{\sqrt{G(s;\ \lambda,\ \mu)}}\,,\ A_{02}(\lambda,\ \mu) = \int_a^b \frac{s-a}{b-a} \frac{ds}{\sqrt{G(s;\ \lambda,\ \mu)}}\,.$$

Calcolando questi due integrali si trovano per i coefficienti della (4,4) delle espressioni alquanto complicate, onde la corrispondente formula generalizzata [cfr. (2, 15)]:

$$(4,6) \qquad \int_a^b \frac{f(x)}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\, dx = \sum_{j=1}^{\nu} \frac{\delta_j}{b-a} [A_{01}(\lambda_j,\ \mu_j)f(\alpha_{j-1}) +$$

$$+ A_{02}(\lambda_j,\ \mu_j)f(\alpha_j)] + \rho\,,$$

scritta in corrispondenza ad un'*arbitraria* suddivisione dell'intervallo $(a,\ b)$, risulterebbe di difficile uso pratico.

Ma, osservato che con la sostituzione $\lambda s + (1-\lambda)\mu = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos t$ le (4,5) diventano

$$A_{01}(\lambda,\ \mu) = \frac{1}{2\lambda^2} \int_{\operatorname{arcos} \beta}^{\operatorname{arcos} \alpha} (\beta - \cos t) dt \quad,\quad A_{02}(\lambda,\ \mu) = \frac{1}{2\lambda^2} \int_{\operatorname{arcos} \beta}^{\operatorname{arcos} \alpha} (\cos t - \alpha) dt.$$

---

11) Per brevità si è posto $G(x;\ \lambda,\ \mu) = [\lambda x + (1-\lambda)\mu - a][b - \lambda x - (1-\lambda)\mu]$. Si noti che con questa scelta di $\varphi_1(x;\ \lambda,\ \mu)$ sono soddisfatte le ipotesi A, B di cui al § 2.

dove si è posto

$$\alpha = \frac{2}{b-a}\left[\lambda a + (1-\lambda)\mu - \frac{a+b}{2}\right],$$

$$= \frac{2}{b-a}\left[\lambda b + (1-\lambda)\mu - \frac{a+b}{2}\right],$$

si vede che, suddividendo l'intervallo (a, b) mediante i particolari punti di divisione

$$\alpha_j = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\frac{(\nu-j)\pi}{\nu}\,, \quad (j = 0, 1, \ldots, \nu), \tag{4,7}$$

risultano per i coefficienti della (4,6) le seguenti espressioni abbastanza semplici

$$\frac{\delta_j}{b-a}A_{01}(\lambda_j, \mu_j) = \frac{1}{2\lambda_j}\int\limits_{(\nu-1)\pi/\nu}^{(\nu-j+1)\pi/\nu}\left|\cos\frac{(\nu-1)\pi}{\nu} - \cos t\right| dt =$$

$$\frac{\dfrac{\pi}{\nu}\cos\dfrac{(\nu-j)\pi}{\nu} - \left[\operatorname{sen}\dfrac{(\nu-j+1)\pi}{\nu} - \operatorname{sen}\dfrac{(\nu-j)\pi}{\nu}\right]}{\cos\dfrac{(\nu-j)\pi}{\nu} - \cos\dfrac{(\nu-j+1)\pi}{\nu}} =$$

$$= \frac{\pi}{2\nu} - \left(\frac{\pi}{2\nu}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2\nu} - 1\right)\operatorname{cotg}\frac{(2j-1)\pi}{2\nu}\,,$$

$$\frac{\delta_j}{b-a}A_{02}(\lambda_j, \mu_j) = \frac{1}{2\lambda_j}\int\limits_{(\nu-1)\pi/\nu}^{(\nu-j+1)\pi/\nu}\left|\cos t - \cos\frac{(\nu-j+1)\pi}{\nu}\right| dt =$$

$$\frac{\left[\operatorname{sen}\dfrac{(\nu-j+1)\pi}{\nu} - \operatorname{sen}\dfrac{(\nu-j)\pi}{\nu}\right] - \dfrac{\pi}{\nu}\cos\dfrac{(\nu-j+1)\pi}{\nu}}{\cos\dfrac{(\nu-j)\pi}{\nu} - \cos\dfrac{(\nu-j+1)\pi}{\nu}} =$$

$$= \frac{\pi}{2\nu} + \left(\frac{\pi}{2\nu}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2\nu} - 1\right)\operatorname{cotg}\frac{(2j-1)\pi}{2\nu}\,.$$

Con una ovvia trasformazione della (4,6) si arriva pertanto alla formula seguente:

$$(4,8)\qquad \int_a^b \frac{f(x)}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\,dx = \frac{1}{2}\gamma_0 f(a) + \sum_{j=1}^{\nu-1}\gamma_j f(\alpha_j) + \frac{1}{2}\gamma_\nu f(b) + \rho$$

con α_j dato da (4,7) e

$$(4,9)\qquad \gamma_j = \frac{\pi}{\nu} + \left(\frac{\pi}{2\nu}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2\nu} - 1\right)\left[\operatorname{cotg}\frac{(2j-1)\pi}{2\nu} - \right.$$

$$\left. - \operatorname{cotg}\frac{(2j+1)\pi}{2\nu}\right] \quad , \quad (j = 0, 1, \ldots, \nu \quad ; \quad \gamma_j = \gamma_{\nu-j}).$$

La (4,8) è esatta quando $f(x)$ è un polinomio di grado ≤ 1. Per brevità omettiamo di scrivere l'espressione del resto ρ della (4,8) [che segue facilmente dalla (2,16)] e ci limiteremo ad osservare che, essendo $\max \delta_j$ dell'ordine di $\frac{1}{\nu}$ (per $\nu \to \infty$), il teorema I fornisce

$$\rho = o\left(\frac{1}{\nu}\right) \quad , \quad (\text{per } \nu \to \infty).$$