Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova

Mario Volpato

Sulle condizioni sufficienti per la continuità (di ordine n) di un funzionale di ordine $n+1$

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 26 (1956), p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1956__26__1_0>

SULLE CONDIZIONI SUFFICIENTI PER LA CONTINUITÀ (DI ORDINE n) DI UN FUNZIONALE DI ORDINE $n+1$

Nota (*) di MARIO VOLPATO (*a Ferrara*)

È noto [1]) che se $Q(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)})$ è una funzione continua insieme con le derivate parziali $Q'_x, Q'_y, Q'_{y'}, \ldots, Q'_{y^{(n-1)}}$ nell'intervallo

$$R: a \leq x \leq b; \quad y_1^{(i)} \leq y^{(i)} \leq y_2^{(i)}, \quad (i = 0, 1, \ldots, n; \ y^{(0)} = y),$$

dello spazio reale euclideo ad $n+2$ dimensioni, l'integrale

$$\mathfrak{J}[y(x)] = \int_a^b Q[x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)]\, y^{(n+1)}(x) dx \tag{1}$$

è un funzionale continuo (di ordine n) nella classe $\mathfrak{K}$ delle delle funzioni $y(x)$ con derivata n-esima assolutamente continua in (a, b) e tali che

$$y_1^{(i)} \leq y^{(i)}(x) \leq y_2^{(i)}, \quad (i = 0, 1, \ldots, n; \ y^{(0)} = y). \tag{2}$$

(*) Pervenuta in Redazione il 4 giugno 1956.
Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università, Ferrara.

1) Si vegga: S. CINQUINI, *Sopra una condizione sufficiente per la semicontinuità dei problemi variazionali di ordine n*, Annali di Matematica Pura ed Applicata, serie IV, tomo XV, (1937), pp. 77-86; M. PICONE, *Analisi Superiore*, Corso di lezioni tenute all'Università di Roma nell'anno accademico 1940-41, (litografato D.U.S.A.) n. 70, pp. 142-152.

Valendomi di alcuni miei recenti risultati sulla formula di Green[2]), in questa Nota dimostro il seguente

TEOREMA. - *Sia*:

I) *$Q(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)})$ una funzione, reale di variabili reali, definita in R, ivi limitata, misurabile rispetto ad $y^{(n)}$ e continua rispetto a $(x, y, y', .., y^{(n-1)})$ per quasi tutti i valori di $y^{(n)}$ in $(y_1^{(n)}, y_2^{(n)})$.*

Inoltre:

II) *esistano $n+1$ funzioni $\mathfrak{L}(u)$, $L_0(u)$, $L_1(u)$, ..., $L_{n-1}(u)$ non negative e sommabili (secondo Lebesgue) in $y_1^{(n)} \leq u \leq y_2^{(n)}$ tali che per quasi tutti i valori di u dell'intervallo $(y_1^{(n)}, y_2^{(n)})$ si abbia*:

$$(3) \qquad \begin{aligned} |Q(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, u) - Q(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}', \dots, \bar{y}^{(n-1)}, u)| \leq \\ \leq \mathfrak{L}(u)\,|x-\bar{x}| + L_0(u)\,|y-\bar{y}| + L_1(u)\,|y'-\bar{y}'| + \\ + \dots + L_{n-1}(u)\,|y^{(n-1)} - \bar{y}^{(n-1)}|, \end{aligned}$$

$(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, u)$; $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}, \dots, \bar{y}^{(n-1)}, u)$ essendo punti di R.

In tali ipotesi l'integrale $\mathfrak{J}[y(x)]$ è un funzionale continuo (di ordine n) nella classe $\mathcal{K}$.

Faccio presente che nel caso particolare in cui sia $n = 0$, questo mio risultato interferisce con uno analogo stabilito da S. Faedo[3]) e successivamente generalizzato da G. Darbo[4]).

1. - Proviamo anzitutto che *se $y(x)$ è una qualsivoglia funzione della classe $\mathcal{K}$, allora la funzione*

$$(4) \qquad Q[x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x), y^{(n)}(x)]\, y^{(n+1)}(x)$$

---

[2]) M. VOLPATO, *Sulla formula di Green nell'ambito delle funzioni continue rispetto ad una e misurabili rispetto ad un'altra variabile*, Rend. Accad. Naz. Lincei, serie VII, vol. XX, (1956), Nota I, pp. 30-37; Nota II, pp. 161-167; Nota III, p. 299-306.

[3]) S. FAEDO, *Un nuovo tipo di funzionali continui*, Rend. di Matem. e delle sue applic., serie V, vol. IV (1943), pp. 223-249.

[4]) G. DARBO, *Sulle condizioni sufficienti per la continuità di un integrale*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. XXII, (1953), pp. 134-142.

è (*misurabile e*) *sommabile in* (a, b), di guisa che il funzionale $\mathfrak{J}[y(x)]$ è definito nella classe $\mathcal{K}$.

Proveremo addirittura che *se* $y(x) \in \mathcal{K}$ *e se* $z(x)$ *è una qualsivoglia funzione assolutamente continua in* (a, b) *ivi soddisfacente la*

$$(5) \qquad y_1^{(n)} \leq z(x) \leq y_2^{(n)},$$

allora la funzione

$$(6) \qquad Q[x,\ y(x),\ y'(x), \dots,\ y^{(n-1)}(x),\ z(x)]\, z'(x),$$

è (*misurabile e*) *sommabile in* (a, b).

A tale scopo poniamo

$$(7) \qquad Q^*(x,\ u) = Q(x,\ y(x),\ y'(x),\ \dots,\ y^{(n-1)}(x),\ u)$$

e osserviamo che nel rettangolo

$$R^* :\ a \leq x \leq b\,; \quad y_1^{(n)} \leq u \leq y_2^{(n)}$$

la funzione $Q^*(x,\ u)$ gode delle seguenti proprietà:

a) *è limitata in* R^*;

b) *per ogni fissato* x *di* (a, b) *è misurabile rispetto ad* u, *mentre fissato* u, *quasi ovunque in* $(y_1^{(n)},\ y_2^{(n)})$, *è* (*assolutamente continua, anzi*) *lipschitziana rispetto ad* x *con coefficiente di Lipchitz uguale a*

$$(8) \qquad L(u) = \mathfrak{L}(u) + M_1 L_0(u) + M_2 L_1(u) + \dots + M_n L_{n-1}(u)$$

ove

$$M_i = \max\,(|\,y_1^{(i)}\,|,\ |\,y_2^{(i)}\,|), \quad (i = 1,\ 2, \dots,\ n)\,;$$

c) *la derivata parziale* $Q_x^{*\prime}(x,\ u)$, *che, a norma di* b), *esiste quasi ovunque in* R^* *riuscendovi misurabile, è sommabile in* R^*.

Infatti, a norma dell'ipotesi I) esiste una costante M^* per cui risulta in R

$$(9) \qquad |\,Q(x,\ y,\ y', \dots,\ y^{(n-1)},\ y^{(n)})\,| \leq M^*,$$

e, a norma dell'ipotesi II), si ha

$$(10)\quad | Q^*(x, u) - Q^*(\bar{x}, u) | = | Q(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x), u) -$$
$$- Q(\bar{x}, y(\bar{x}), y'(\bar{x}), \dots, y^{(n-1)}(\bar{x}), u) | \leq \mathfrak{L}(u) | x - \bar{x} | +$$
$$+ L_0(u) \left| \int_{\bar{x}}^{x} y'(t)dt \right| + L_1(u) \left| \int_{\bar{x}}^{x} y''(t)dt \right| + \dots +$$
$$+ L_{n-1}(u) \left| \int_{\bar{x}}^{x} y^{(n)}(t)dt \right| \leq L(u) | x - \bar{x} |,$$

e quindi, quasi ovunque in R^*,

$$(11)\qquad | Q_x^{*\prime}(x, u) | \leq L(u),$$

con $L(u)$ *evidentemente sommabile in* $(y_1^{(n)}, y_2^{(n)})$.

Dalle a), b), c) e dalla (5), a norma dell'osservazione contenuta alla fine del n. 6 della Nota I del loro citato in [2]), segue la sommabilità della funzione (6).

2. - Dimostriamo ora il teorema enunciato. Osserviamo intanto che se $y(x)$ ed $y_0(x)$ sono due funzioni della classe $\mathcal{K}$, si ha:

$$(12)\quad \mathfrak{J}[y(x)] - \mathfrak{J}[y_0(x)] =$$
$$= \int_a^b \Big\{ Q[x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x), y^{(n)}(x)] y^{(n+1)}(x) -$$
$$- Q[x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x), y_0^{(n)}(x)] y_0^{(n+1)}(x) \Big\} dx +$$
$$+ \int_a^b \Big\{ Q[x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x), y_0^{(n)}(x)] -$$
$$- Q[x, y_0(x), \dots, y_0'(x), y_0^{(n-1)}(x), y_0^{(n)}(x)] \Big\} y_0^{(n+1)}(x) dx .$$

Il nostro teorema sarà allora acquisito se faremo vedere che, in corrispondenza di un fissato numero $\varepsilon > 0$ arbitrario, esiste un conveniente numero $\sigma(\varepsilon)$ tale che le disuguaglianze

$$(13)\qquad | y^{(i)}(x) - y_0^{(i)}(x) | \leq \sigma(\varepsilon), \quad (i = 0, 1, \dots, n;\ y^{(0)} = y),$$

soddisfatte per ogni x di (a, b), implichino le

$$(14)\qquad \left|\int_a^b \Big\{ Q[x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x), y^{(n)}(x)]\, y^{(n+1)}(x) - \right.$$
$$\left. - Q[x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x), y_0^{(n)}(x)]\, y_0^{(n+1)}(x) \Big\} dx \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$(15)\qquad \left|\int_a^b \Big\{ Q[x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x), y_0^{(n)}(x)] - \right.$$
$$\left. - Q[x, y_0(x), y_0'(x), \dots, y_0^{(n-1)}(x), y_0^{(n)}(x)] \Big\} y_0^{(n+1)}(x)\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

È questo che proveremo nei prossimi numeri.

3. - La (14), che con i simboli introdotti al n. 1 equivale alla

$$(16)\qquad \left| \int_a^b Q^*[x, y^{(n)}(x)]\, y^{(n+1)}(x) dx - \int_a^b Q^*[x, y_0^{(n)}(x)]\, y_0^{(n+1)}(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

è conseguenza, pressochè immediata, del teorema 2 della Nota III del loco citato in [2]. Infatti, le funzioni $Q^*(x, u)$, $y^{(n)}(x)$, $y_0^{(n)}(x)$ soddisfano a tutte le ipotesi di quel teorema e pertanto sussiste la seguente formula di Green

$$(17)\qquad \int_{y_0^{(n)}(b)}^{y^{(n)}(b)} Q^*(b, u) du = \int_{y_0^{(n)}(a)}^{y^{(n)}(a)} Q^*(a, u) du + \int_a^b Q^*[x, y^{(n)}(x)]\, y^{(n+1)}(x) dx -$$
$$- \int_a^b Q^*[x, y_0^{(n)}(x)]\, y_0^{(n+1)}(x) dx + \int_a^b dx \int_{y_0^{(n)}(x)}^{y^{(n)}(x)} Q_x^{*\prime}(x, u) du,$$

che porge immediatamente la disuguaglianza

$$(18)\qquad \left| \int_a^b Q^*[x, y^{(n)}(x)]\, y^{(n+1)}(x)\, dx - \int_a^b Q^*[x, y_0^{(n)}(x)]\, y_0^{(n+1)}(x) dx \right| \leq$$
$$\leq M^* \Big\{ |y^{(n)}(b) - y_0^{(n)}(b)| + |y^{(n)}(a) - y_0^{(n)}(a)| \Big\} + \int_a^b \left| \int_{y_0^{(n)}(x)}^{y^{(n)}(x)} L(u) du \right| dx.$$

Indichiamo ora con $\rho\left[\frac{\varepsilon}{4(b-a)}\right]$ un numero positivo tale che per ogni sottoinsieme H di $(y_1^{(n)}, y_2^{(n)})$ per cui la mis $H < \rho\left[\frac{\varepsilon}{4(b-a)}\right]$, si abbia

$$\int_H L(u)du < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}. \tag{19}$$

Allora, se nelle (13) assumiamo il numero $\sigma(\varepsilon)$ in maniera che sia soddisfatta la

$$\sigma(\varepsilon) < \min\left\{\rho\left[\frac{\varepsilon}{4(b-a)}\right], \frac{\varepsilon}{8M^*}\right\}, \tag{20}$$

la (18) porge subito la (16) e quindi la (14).

4. - Completiamo la dimostrazione, provando ora la (15).

A tale scopo, determiniamo un numero positivo $\rho\left(\frac{\varepsilon}{12M^*}\right)$ in maniera tale che, per ogni sottoinsieme G di (a, b) per cui la mis $G < \rho\left(\frac{\varepsilon}{12M^*}\right)$, si abbia

$$\int_G |y_0^{(n+1)}(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{12M^*}. \tag{21}$$

Indichiamo poi con $\mathcal{H}(y_0^{(n+1)})$ la porzione di (a, b) ove non esiste oppure è nulla $y_0^{(n+1)}(x)$, e diciamo: $\tau_1, \tau_2, \dots$ una successione di intervalli (chiusi) di (a, b) che ricoprono l'insieme misurabile $\mathcal{H}(y_0^{(n+1)})$ e tale che, posto $T = \bigcup_1^{+\infty}{}_i\tau_i$, si abbia

$$\text{mis}\,[T - \mathcal{H}(y_0^{(n+1)})] < \rho\left(\frac{\varepsilon}{12M^*}\right). \tag{22}$$

Segue allora

$$\left|\int_a^b \left\{Q[x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x), y_0^{(n)}(x)] - \right.\right. \tag{23}$$
$$\left.\left. - Q[x, y_0(x), y_0'(x), \dots, y_0^{(n-1)}(x), y_0^{(n)}(x)]\right\} y_0^{(n+1)}(x)dx\right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{(a,b)-T} |Q[x,\ y(x),\ y'(x), \ldots,\ y^{(n-1)}(x),\ y_0^{(n)}(x)] - \right.$$

$$\left. - Q[x,\ y_0(x),\ y_0'(x), \ldots,\ y_0^{(n-1)}(x),\ y_0^{(n)}(x)]\,|\,|y_0^{(n+1)}(x)|\,dx \right| + \frac{\varepsilon}{6}.$$

Fissiamo comunque una n-upla

$$(24) \qquad (y,\ y', \ldots,\ y^{(n-1)})$$

di numeri reali soddisfacenti le $y_1^{(i)} \leq y^{(i)} \leq y_2^{(i)}$, $(i = 0,\ 1, \ldots,\ n-1;\ y^{(0)} = y)$, e riguardiamo la $Q(x,\ y,\ y', \ldots,\ y^{(n-1)},\ y^{(n)})$ come funzione delle due sole variabili x, $y^{(n)}$. Ripetendo le considerazioni del n. 1, si deduce che, per ogni fissata *n-upla* (24), la funzione

$$(25) \qquad Q[x,\ y,\ y', \ldots,\ y^{(n-1)},\ y_0^{(n)}(x)]\,y_0^{(n+1)}(x)$$

è (misurabile e) sommabile rispetto ad x in $(a,\ b)$. Allora, per ogni fissata n-upla del tipo (24), la funzione

$$(26) \qquad Q[x,\ y,\ y', \ldots,\ y^{(n-1)},\ y_0^{(n)}(x)]$$

è misurabile, rispetto ad x, in $(a,\ b) - \mathcal{H}(y_0^{(n+1)})$, e quindi la funzione

$$(27) \qquad Q_0[x,\ y,\ y', \ldots,\ y^{(n-1)},\ y_0^{(n)}(x)] =$$

$$= \begin{cases} Q[(x,\ y,\ y', \ldots,\ y^{(n-1)},\ y_0^{(n)}(x)] & \text{ove } y_0^{(n+1)}(x) \neq 0, \\ 0 & \text{ove } y_0^{(n+1)}(x) = 0, \end{cases}$$

definita nell'intervallo

$$\overline{R}: a \leq x \leq b \cdot y_1^{(i)} \leq y^{(i)} \leq y_2^{(i)},\ (i = 0,\ 1, \ldots,\ n-1;\ y^{(0)} = y),$$

dello spazio reale euclideo ad $n+1$ dimensioni, è, per ogni fissata n-upla del tipo (24), misurabile rispetto ad x in $(a,\ b)$. Dico che essa è continua rispetto a $(y,\ y', \ldots,\ y^{(n-1)})$, per quasi tutti gli x fissati in $(a,\ b)$. Infatti, diciamo:

N la porzione, di misura nulla, dell'intervallo $(y_1^{(n)},\ y_2^{(n)})$, per ogni fissato $y^{(n)}$ della quale, la $Q(x,\ y,\ y', \ldots,\ y^{(n-1)},\ y^{(n)})$ non è continua rispetto a $(x,\ y,\ y', \ldots,\ y^{(n-1)})$;

E_x l'insieme dei punti x di $(a,\ b)$ per i quali $y_0\ (x)$, appartiene ad N.

Per cose note[5]), attesa l'assoluta continuità di $y_0^{(n)}(x)$, in quasi tutto E_x, risulta $y_0^{(n+1)}(x)=0$. Di qui, dalle (27) e dalla I), segue appunto che per quasi tutti gli x di (a, b) la Q_0 è continua rispetto a $(y, y', \dots, y^{(n-1)})$.

Allora, a norma di noti risultati di G. Scorza Dragoni[6]) e G. Stampacchia, in corrispondenza al numero positivo $\delta\left(\frac{\varepsilon}{12M^*}\right)$, esiste una porzione aperta Δ di $\bar{R}$, avente proiezione $\Delta(x)$, sull'asse x, di misura minore di $\rho\left(\frac{\varepsilon}{12M^*}\right)$, tale che nella porzione chiusa $\bar{R}-\Delta$ la funzione $Q_0[x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, y_0^{(n)}(x)]$ sia uniformemente continua rispetto a $(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$. Di qui, osservato che in ogni punto, di $\bar{R}$, per cui $x \in (a, b)-T$, risulta $Q_0[x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, y_0^{(n)}(x)] = Q[x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, y_0^{(n)}(x)]$, attesa la (21), segue

$$
\begin{aligned}
(28)\qquad & \left| \int_{(a,\, b)-T} | Q[x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x), y_0^{(n)}(x)] - \right. \\
& \left. - Q[x, y_0(x), y_0'(x), \dots, y_0^{(n-1)}(x), y_0^{(n)}(x)] \,|\, | y_0^{(n+1)}(x) | \, dx \right| \leq \\
& \leq \left| \int_{(a,\, b)-T-\Delta(x)} | Q_0[x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x), y_0^{(n)}(x)] - \right. \\
& \left. - Q_0[x, y_0(x), y_0'(x), \dots, y_0^{(n-1)}(x), y_0^{(n)}(x)] \,|\, | y_0^{(n+1)}(x) | \, dx \right| + \frac{\varepsilon}{6}.
\end{aligned}
$$

Ora, indichiamo con K un numero positivo soddisfacente le

$$
(29)\qquad \int_a^b | y_0^{(n+1)}(x) | \, dx \leq K,
$$

---

[5]) Cfr. L. TONELLI, *Fondamenti di calcolo delle variazioni*, Zanichelli, Bologna (1921), vol. 1, pag. 176, oppure E. J. MC SHANE, *Integration*, Princeton, p. 213 (1947).

[6]) G. SCORZA DRAGONI, *Un teorema sulle funzioni continue rispetto ad una e misurabili rispetto ad un'altra variabile*, Rendic. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. XVII, (1948), pp. 102-106; G. STAMPACCHIA, *Sopra una classe di funzioni di n variabili*, Ricerche di Matematica, vol. 1, (1952), p. 30.

e osserviamo che se $x \in (a, b) - \Delta(x)$ a se sussistono le

$$(30) \qquad | y^{(i)} - \bar{y}^{(i)} | < \rho\left(\frac{\varepsilon}{12K}\right), \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n-1 \,;\; y^{(0)} = y),$$

con $\rho\left(\frac{\varepsilon}{12K}\right)$ conveniente numero positivo, la uniforme continuità della funzione $Q_0[x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, y_0^{(n)}(x)]$ in $\bar{R} - \Delta$ porge la

$$(31) \qquad | Q_0[x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, y_0^{(n)}(x)] - \\ - Q_0[x, \bar{y}, \bar{y}', \dots, \bar{y}^{(n-1)}, y_0^{(n)}(x)] | < \frac{\varepsilon}{6K}.$$

Allora se assumiamo il numero $\sigma(\varepsilon)$, che figura in (13), in maniera che sia soddisfata anche la

$$(32) \qquad \sigma(\varepsilon) < \rho\left(\frac{\varepsilon}{12K}\right).$$

segue che per ogni $x \in (a, b) - \Delta(x)$, e *a fortiori* per ogni $x \in (a, b) - T - \Delta(x)$, sussiste la

$$(33) \qquad | Q[x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x), y_0^{(n)}(x)] - \\ - Q_0[x, y_0(x), y_0'(x), \dots, y_0^{(n-1)}(x), y_0^{(n)}(x)] | < \frac{\varepsilon}{6K}.$$

Di qui, dalla (29), dalla (28) e dalla (23) segue la (15).
Il nostro teorema è quindi completamente provato.

5. - OSSERVAZIONE. Ricordiamo che l'ipotesi I), da sola, non è sufficiente ad assicurare la continuità di ordine n dell'integrale (1) nella classe $\mathcal{K}$. Si vegga per questo un interessante esempio indicato da Cinquini nel loco citato in [1]).