

RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

CESARINA MARCHIONNA TIBILETTI

**Una rappresentazione topologica delle
curve di una superficie**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 26 (1956), p. 18-35

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1956__26__18_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1956, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UNA RAPPRESENTAZIONE TOPOLOGICA DELLE CURVE DI UNA SUPERFICIE

Nota (*) di CESARINA MARCHIONNA TIBILETTI (a Milano)

1. - Una superficie $\Phi(x, y, z) = 0$ ¹⁾ algebrica d'ordine μ , non passante per il punto improprio Z_∞ dell'asse z , e il relativo piano μ -plo $z = z(x, y)$ vengono topologicamente definiti dando la Riemanniana $\pi - \varphi$ del piano (proiettivo complesso) (x, y) forato lungo la curva $\varphi(x, y) = 0$, diramante il piano μ -plo stesso, accompagnata dal sistema delle sostituzioni (sui μ valori di z) collegate ai vari cicli del gruppo di Poincaré della $\pi - \varphi$ ²⁾.

Appare come presumibile a priori che in questa rappresentazione della Φ possa inserirsi quella di una curva appartenente alla Φ , data mediante la sua proiezione (da Z_∞), $f(x, y) = 0$ ³⁾, sul piano π , coincidente per esempio con $z = 0$: ma subito si incontrano difficoltà in quanto il cilindro $f(x, y) = 0$ sega la Φ secondo una curva f^* , che in generale deve presumersi riducibile in varie componenti ciascuna delle quali ha per proiezione (semplice o multipla) la curva $f(x, y) = 0$ (del piano $z = 0$).

Scopo del presente lavoro è l'analisi approfondita di questa possibile rappresentazione delle curve tracciate su Φ .

Si darà dapprima una descrizione di tale rappresentazione topologica, in forma astratta.

(*) Pervenuta in Redazione il 2 Maggio 1956.

Indirizzo dell'A.: Istituto matematico dell'Università, Milano.

1) Che indicheremo poi brevemente con Φ .

2) Cfr. [4], [7] — vedi la bibliografia alla fine della nota — o anche il cap. VIII di O. ZARISKI, *Algebraic Surfaces*. Ergebnisse der Mathematik (1935).

3) Indicheremo poi brevemente con f la curva $f(x, y) = 0$.

In seguito, a determinare concretamente il modello topologico della Φ , verrà assunta la relativa treccia diramante $T(\varphi)$ ⁴ cui viene congiunta la treccia della curva f , cioè verrà assunta la treccia complessiva $T(\sigma)$ della curva unica (ancorchè spezzata) $\sigma = \varphi + f$.

Anzi, a questo proposito, si dovrà introdurre un *ampliamento* del solito concetto di *treccia* di una curva ψ per mettere in evidenza le proprietà della ψ in relazione alla sua immersione nello spazio topologico dato dal piano proiettivo complesso forato lungo una data curva χ (cfr. n. 3) ⁵.

Si dovrà anche introdurre un secondo concetto nuovo, quello di *ciclo di una treccia* (cfr. n. 3).

Si perverrà allora abbastanza facilmente a trovare le singole componenti f_i^* della f^* , e a precisare quella che passi per un certo punto di Φ (con proiezione su f).

Per ciascuna componente (che risulta rappresentata sulla curva multipla $f(x, y) = 0$) si possono allora determinare i punti di diramazione (su f) della corrispondente funzione $z(x, y)$ e conseguentemente il genere.

Si conclude il lavoro con alcuni esempi (per ovvie ragioni di brevità relativi a casi semplicissimi) che mostrano il concreto valore delle considerazioni svolte.

2. - Per le superficie Φ , che considereremo, facciamo la sola ipotesi che esse siano irriducibili e che la relativa curva di diramazione φ risulti semplice (cioè dia luogo a scambi per la funzione $z(x, y)$). Indichiamo con m l'ordine di Φ .

Poi, fissato in $\pi - \varphi$ un generico punto Ω , chiamiamo con z_1, z_2, \dots, z_μ i valori (diversi) che $z(x, y)$ assume in Ω .

Data la superficie Φ restano (teoricamente) determinati i cicli del gruppo di Poincaré di $\pi - \varphi$, le relazioni topologiche esistenti fra essi e le sostituzioni che essi operano sui μ va-

⁴ Cfr. n. 1 di [6] e anche il n. 1 di C. MARCHIONNA TIBILETTI, *La irregolarità di un piano multiplo dedotta dalla treccia diramante*, Rend. Acc. Lincei, s. VII, 18 (1955).

⁵ Nella nostra applicazione la ψ sarà la curva f e la χ la curva di diramazione φ .

lori z_s ($s = 1, \dots, \mu$), sostituzioni costituenti il gruppo di monodromia Γ . Secondo le osservazioni di Enriques⁶⁾ e Zariski⁷⁾, per avere tale modello topologico, basta assegnare un sistema di cicli contenuti in una sezione piana (generica) di $\pi - \varphi$ (ad esempio la sezione col piano $x = 0$), legati da certe « relazioni generatrici » e le relative sostituzioni.

Notiamo però che tali relazioni generatrici, e perciò il modello in questione, risultano noti comodamente quando si dia la treccia algebrica della curva φ ⁸⁾.

Osserviamo ancora che queste rappresentazioni topologiche danno, insieme alla Φ iniziale, anche altre superficie Φ' ottenibili da Φ con una trasformazione birazionale, che si riduce ad un'omologia (con centro in Z_∞) per le Φ' non passanti per Z_∞ , cioè per le superficie che abbiamo supposto trattare nel presente lavoro⁹⁾.

Naturalmente la nostra trattazione è invariante rispetto a tali omologie.

Ora ci proponiamo di *rappresentare nel precedente modello topologico le curve di Φ* .

Sia f_1^* una curva data, irriducibile, di Φ ; tale curva viene proiettata da Z_∞ in una curva piana f , del piano (x, y) di ordine n e genere p .

Partendo dalla precedente f_1^* su Φ appare come generico il caso in cui la $z(x, y)$ (definita da Φ) limitata ai punti della f risulti una funzione riducibile in due, di cui una ad un sol valore in relazione ad f_1^* , ed un'altra a $\mu - 1$ valori rappresentante una ulteriore curva f_2^* di Φ , tagliata in $\mu - 1$ punti dalle secanti per Z_∞ .

⁶⁾ Cfr. [4].

⁷⁾ Cfr. [7], o anche il cap. VIII di O. ZARISKI, *Algebraic Surfaces* l. c.

⁸⁾ Cfr. n. 3 di [5]. Tale treccia diramante non solo è sempre determinabile teoricamente ma, in molti casi, e per ampie categorie di curve, è stata costruita effettivamente o si può facilmente costruire (cfr. ad esempio [3] e [6]).

⁹⁾ Questa ipotesi, che le nostre superficie Φ non passino per Z_∞ , è introdotta per semplificare l'esposizione: il rimuoverla porterebbe a semplici varianti.

Tuttavia dobbiamo considerare come generale il caso in cui la f è proiezione da Z_∞ , oltre che della curva f_1^* anche di altre curve (irriducibili, di Φ) f_2^*, \dots, f_ν^* .

Ciò posto, veniamo alla rappresentazione delle f_i^* : consideriamo in $\pi - \varphi$ l'insieme dei punti della Riemanniana di f che indichiamo con $f - P_\varphi$ (ove P_φ è il complesso dei punti di φ che stanno anche su f), assumiamo in $f - P_\varphi$ un'origine Ω_1 ¹⁰) e scegliamo una linea (aperta) l che colleghi Ω con Ω_1 (porremo poi Ω , Ω_1 ed l nel piano $x = 0$).

Ogni determinazione z_s ($s = 1, \dots, \mu$) di $z(x, y)$ in Ω , per prolungamento analitico lungo l (da Ω ad Ω_1), diventa una determinazione della $z(x, y)$ in Ω_1 , che chiamiamo z_{1s} (assumendo uguali l'indice di z_s e il secondo indice di z_{1s}).

Ora consideriamo un ciclo \bar{g}_f uscente da Ω_1 e giacente in $f - P_\varphi$; un ciclo g_f ottenuto percorrendo successivamente il cammino l da Ω ad Ω_1 , un ciclo \bar{g}_f , e il cammino l^{-1} da Ω_1 ad Ω scambia i valori z_s secondo una sostituzione S_f . Le sostituzioni S_f legate ai vari g_f costituiscono un sottogruppo Γ_f di Γ , che, per generalità, dobbiamo supporre intransitivo.

Le z_{1s} (in Ω_1) per i cicli \bar{g}_f si scambiano ovviamente secondo un gruppo $\bar{\Gamma}_f$, isomorfo a Γ_f . Precisamente tali $\bar{\Gamma}_f$ e Γ_f coincidono se considerati come gruppi di sostituzioni sugli indici s di z_s e z_{1s} e precisamente $\bar{\Gamma}_f$ è il trasformato di Γ_f con l'operazione — sulle z_s — relativa al cammino $l = \Omega\Omega_1$. Le z_{1s} per le sostituzioni di $\bar{\Gamma}_f$ risultano divise in sistemi di intransitività che chiamiamo separatamente con $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_\nu$ e tutti insieme con Σ .

Ciò indica che la $z(x, y)$, quando la si pensi come funzione dei punti della sola curva f (e non dell'intero piano x, y) si spezza in ν funzioni $z^{(i)}(x, y)$ ciascuna delle quali ha in Ω_1 i valori z_{1s} contenuti rispettivamente in uno dei sistemi Σ_i ($i = 1, \dots, \nu$).

Ognuna delle funzioni $z^{(i)}(x, y)$ dà luogo ad una curva irriducibile f_i^* di Φ (che si proietta da Z_∞ in f).

¹⁰) Si potrebbe anche scegliere l'origine Ω coincidente con Ω_1 . Questo modo di procedere può sembrare, a priori, il più semplice; a posteriori invece è risultato più utile distinguere le due origini.

Notiamo anzi che *una sola determinazione* z_1 , della $z(x, y)$ *definisce il sistema* Σ_1 *cui appartiene, cioè un punto solo di* f_i^* *(in corrispondenza al quale si può assumere* Ω_1 *) definisce il relativo* Σ_1 .

3. - Per procedere conviene premettere un'estensione del concetto di treccia algebrica e alcune ulteriori considerazioni sulle trecce che possono essere interessanti per loro stesse, in quanto utili anche per altri problemi.

a) Fino ad ora la treccia di una curva ψ algebrica è stata costruita pensando la curva immersa nel piano proiettivo complesso π (delle variabili x e y) e mettendo pertanto in evidenza i punti critici della funzione $y(x)$ definita dalla ψ .

Per qualche problema (come, per esempio, quello che è oggetto del presente lavoro) può essere necessario rappresentare sulla treccia anche altri punti P notevoli della curva ψ , che risultano intersezioni di ψ con un'altra curva χ del piano π .

Considerata la treccia $T(\psi + \chi)$ della curva (unica anche se riducibile) spezzata in ψ e χ isoleremo in questa l'insieme (ordinato) dei tratti relativi ai punti critici di ψ ed ai punti P_χ comuni a ψ e χ . Questo insieme di tratti costituisce la *treccia* $T(\psi - P_\chi)$, *ampliata rispetto alla solita treccia* $T(\psi)$ *di* ψ , *che mette in evidenza anche i punti di* ψ *staccati dalla curva* χ .

La $T(\psi - P_\chi)$ viene a rappresentare la curva ψ come contenuta nello spazio topologico costituito dal piano π forato secondo la curva ψ .

b) Sia data una curva (piana) ψ e sia T una sua treccia, eventualmente anche ampliata¹¹⁾ (costruita con le solite convenzioni). Chiamiamo *arco* di treccia la parte τ di un filo contenuto in un tratto di T , parte che si immagina percorsa da uno (considerato nei vari casi come primo) all'altro estremo (essendo posti questi estremi su due setti adiacenti)¹²⁾.

¹¹⁾ Cfr. il comma *a*) di questo stesso paragrafo.

¹²⁾ Tale parte τ di filo è descritta da un y_i quando x descrive un cappio λ di π_x .

Notiamo che il punto di ψ di coordinate $x = 0$ ed $y = y_r$ (essendo $x = 0$ l'origine dei capi costruttori di T appartenenti al piano π_r) viene rappresentato sulla treccia sopra ciascuno dei suoi setti in una medesima posizione (che indichiamo ancora con y_r). Allora diciamo che due *archi di una treccia* (anche non appartenenti a tratti consecutivi) sono *connessi* quando il secondo estremo (concepito come coppia x, y) di uno di essi coincide col primo estremo dell'altro.

Indichiamo con il nome *insieme connesso di archi di treccia* un insieme ordinato di archi tali che due archi consecutivi sono connessi¹³⁾.

Un insieme connesso di archi di treccia si dirà *chiuso* se anche il primo e l'ultimo arco vengono connessi nei loro estremi rimasti liberi. Chiameremo col nome di *ciclo di una treccia* un tale insieme connesso chiuso di archi di treccia: questo nome di ciclo è giustificato dal fatto che i suddetti insiemi chiusi di archi rappresentano cicli della Riemanniana di ψ ¹⁴⁾.

4. - Vogliamo ora *determinare, nel precedente modello topologico, (cfr. n. 2) le curve di Φ che si proiettano (da Z_∞) in una curva piana f data.*

A tal fine, *diamo il modello topologico di Φ mediante la treccia diramante $T(\varphi)$ ed inoltre assegnamo la treccia $T(\sigma)$ della curva $\sigma = \varphi + f$ composta dalle curve φ ed f .*

Premettiamo la nomenclatura necessaria.

¹³⁾ Avvertiamo che l'ordine dei tratti in cui vengono qui presi gli archi consecutivi può non essere quello dei successivi tratti della treccia e che in un insieme connesso di archi uno stesso tratto può comparire più volte in posizioni diverse e con archi uguali o diversi.

¹⁴⁾ Tali cicli della treccia rappresentano cicli della Riemanniana della curva ψ che risultano ora dati da vari archi anche non consecutivi, sulla treccia T (ma connessi sulla Riemanniana di ψ) similmente a quanto accade sul modello della Riemanniana di ψ costituito da un poligono di $4p$ lati, ove pure un ciclo è rappresentato da una somma di archi di linee sconnessi sul modello (e connessi sulla Riemanniana di ψ). Cfr. ENRIQUES, CHISINI, *Teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, vol. I, cap. III, n. 38, Bologna (1924).

Chiamiamo x_σ i punti critici della funzione $y = y(x)$ definita da σ , segnati nel piano π_x della variazione complessa x : essi sono dati precisamente dai punti x_φ critici della $y(x)$ definita da φ , dai punti critici x_f della $y(x)$ definita da f e dai punti $x_{\varphi f}$ ascisse delle intersezioni di φ ed f . Indichiamo con O un'origine, generica ma fissata, sul piano π_x (data per esempio, da $x = 0$) e con λ i soliti cappi (orientati) uscenti da O ed avvolgenti i suddetti punti critici x_σ , che servono per costruire la treccia $T(\sigma)$ ¹⁵). Distinguiamo tali cappi con i nomi λ_φ , λ_f , e $\lambda_{\varphi f}$ in relazione ai punti critici x_φ , x_f , $x_{\varphi f}$ che essi avvolgono; i corrispondenti tratti della treccia verranno chiamati t_φ , t_f , $t_{\varphi f}$.

Precisamente: i tratti t_φ (presi nell'ordine in cui si trovano su $T(\sigma)$) danno la treccia $T(\varphi)$ della curva φ , quando da essi si tolgano i fili di f , ed analogamente i tratti t_f (ordinati come in $T(\sigma)$ ed a prescindere dai fili di φ) danno la treccia $T(f)$ della curva f . Infine, per le considerazioni del n. 3 a), l'insieme dei tratti t_f e $t_{\varphi f}$ (presi nell'ordine in cui si trovano in $T(\sigma)$) dà la treccia ampliata $T(f - P_\varphi)$.

Sul piano della variabile complessa y siano $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ ed y_1, y_2, \dots, y_n i punti che danno i valori della $y(x)$ definita rispettivamente da φ ed f in $x = 0$: indichiamo con $\pi_y(0)$ tale piano della variabile y . Sono i suddetti punti η_j ($j = 1, \dots, m$) ed y_r ($r = 1, \dots, n$) che, quando x descrive i precedenti cappi λ , muovendosi (in una col piano $\pi_y(x)$ della variabile y che li contiene) generano i fili della treccia $T(\sigma)$.

L'origine Ω su $\pi - \varphi$, indicata nel n. 2, l'assumiamo ora nel punto $x = 0$ ed $y = \infty$ (punto che sta su tutti i piani $x = \text{cost.}$).

Chiamiamo poi con $\gamma(\eta_j)$ i cappi di $\pi_y(0)$ intorno ai punti η_j ($j = 1, \dots, m$) aventi origine in Y_∞ ¹⁶), disposti parallelamente all'asse immaginario e supposti tutti provenienti dalla sua parte negativa: tali cappi operano con sostituzioni S (note) sulle fissate determinazioni z_1, z_2, \dots, z_y della $z(z, y)$ — in Ω —.

¹⁵) Cfr. n. 3 di [1].

¹⁶) Cfr. [2] a pag. 767.

Scegliamo l'origine Ω_1 su $f - P_\varphi$ (cfr. n. 2) nel punto di coordinate $x = 0$ ed $y = y_1$, e scegliamo il cammino $l = \Omega\Omega_1$, sul piano $\pi_y(0)$, parallelo all'asse immaginario, in modo analogo ai suddetti cappi $\gamma(\eta_j)$; il cammino l varierà, come i cappi $\gamma(\eta_j)$ ¹⁷⁾ quando il piano $\pi_y(0)$ — per generare la treccia $T(\sigma)$ — si muove parallelamente a se stesso, divenendo un generico piano $\pi_y(x)$.

In seguito sarà utile considerare sul piano $\pi_y(0)$ dei cammini l_r ($r = 1, \dots, n$) analoghi ad l , paralleli all'asse immaginario, che vanno da Y_∞ ad uno qualsiasi dei punti y_r (porremo $l_1 = l$)¹⁸⁾.

Le determinazioni z_{1s} ($s = 1, \dots, \mu$) sono state ottenute (cfr. n. 2) rispettivamente dalle z_s per prolungamento analitico lungo $l = l_1$; analogamente indichiamo ora con z_{rs} la determinazione della $z(x, y)$ in $x = 0, y = y_r$ ottenuta prolungando la z_s (in Ω) lungo l_r . Notiamo esplicitamente che il primo indice r di z_{rs} è uguale a quello dell'ordinata y_r del punto $x = 0, y = y_r$ in cui viene calcolata la z_{rs} stessa, il secondo indice s è quello della z_s da cui z_{rs} proviene per prolungamento analitico lungo l_r .

Con questa nomenclatura una determinazione z_{hs} diventa la determinazione z_{ks} (con lo stesso indice s) per il cammino ottenuto percorrendo successivamente l_h^{-1} ed l_k .

Tutti i μn valori z_{rs} ($r = 1, \dots, n; s = 1, \dots, \mu$) sono le determinazioni, in $x = 0$ della $z(x, y)$ pensata come funzione del punto della f , cioè come funzione $z = z(x, y(x))$, della x , oltre che direttamente, anche tramite la $y = y(x)$ definita da f .

5. Diamo ora alcuni teoremi semplici ma essenziali.

TEOREMA 1. *Ogni ciclo della Riemanniana $f - P_\varphi$ di origine Ω_1 , si riduce ad un ciclo della treccia $T(f - P^\varphi)$.*

¹⁷⁾ Cfr. [2].

¹⁸⁾ Possiamo sempre pensare, data la genericità di Ω , che due punti y_r del piano $\pi_y(0)$ non stiano mai sulla stessa parallela all'asse immaginario. Così i vari l_r , su $\pi_y(0)$, risultano distinti.

Per la dimostrazione di tale teorema notiamo che ogni ciclo C di $f - P_\phi$, uscente da Ω_1 , quando si consideri lungo esso solo la variazione della x , dà luogo ad un ciclo C_x del piano π_x ¹⁹).

Ora un tale C_x è riducibile ad una somma di certi cappi λ_f e $\lambda_{\phi f}$ percorsi successivamente in un certo ordine. Tenendo conto anche della variazione della y su C (a partire da $y = y_1$ in $\pi_y(0)$) lo stesso ciclo viene rappresentato dal percorso di un punto F di f che parte da y_1 e si muove successivamente — sui vari piani $\pi_y(x)$ — nei tratti t_f e $t_{\phi f}$ corrispondenti ai suddetti cappi λ_f e $\lambda_{\phi f}$.

Ora il percorso di F in ciascuno dei suddetti tratti è dato da un filo della treccia $T(f - P_\phi)$ relativo alla f e ciò per la stessa definizione di treccia.

Viceversa un ciclo della treccia $T(f - P_\phi)$ dà un ciclo C di $f - P_\phi$.

TEOREMA 2. *Quando un punto F descrive un arco di treccia, appartenente ad un tratto t_f o $t_{\phi f}$, che collega un punto y_h con un punto y_k (k eventualmente anche uguale ad h) i valori z_{h_s} di z si mutano nei valori z_{k_s} , secondo una sostituzione sui secondi indici s , definita dai fili di ψ che risultano tagliare la linea $l = \Omega F$.*

Ciò dipende dal fatto che quando un filo di ϕ viene a tagliare il cammino $l = \Omega F$ al cammino stesso si somma un ciclo infinitesimo intorno a un filo di ϕ ²⁰).

Pertanto, indicata con S la sostituzione sulle determinazioni z_s (in Ω) portata dal suddetto filo di ϕ , nel punto²¹) in cui taglia $l = \Omega F$, le determinazioni z_{r_s} di z relative ad F si mutano secondo una sostituzione che opera sui secondi indici come la S sugli indici delle z_s .

¹⁹) In sostanza C_x è una proiezione di C sul piano della variabile complessa x .

²⁰) Cfr. per esempio [4] e [2].

²¹) Come è noto, ciascun punto della $T(\phi)$ è concepito come centro di un cappio cui è legata una sostituzione sulle z che cambia quando il cappio stesso, spostandosi, è tagliato da un altro filo della $T(\phi)$ stessa.

TEOREMA 3. *Tutti e soli i valori z_{1i} della $z(x, y)$ legati al punto Ω_1 di $f - P_{\zeta}$ e relativi ad una stessa curva irriducibile f_i^* di Φ , che si proietta da Z_{∞} in f , sono quelli che si mutano gli uni negli altri percorrendo tutti i cicli della treccia $T(f - P_{\zeta})$ aventi origine e termine in y_1 .*

Tale proposizione segue ovviamente dai teoremi 1 e 2 in quanto i cicli della treccia $T(f - P_{\zeta})$ in esame costituiscono un sistema completo (che può servire da base) per tutti i cicli di $f - P_{\zeta}$ uscenti da Ω_1 .

6. - Vogliamo ora indicare come si possa procedere praticamente alla determinazione dei suddetti sistemi di intransitività Σ_i ($i = 1, \dots, \nu$) legati ad y_1 , quando siano date la treccia diramante $T(\varphi)$ e la treccia $T(\sigma)$.

a) Per esempio si può fissare un sistema (base) di $2p$ cicli Riemanniani C_f (indipendenti) di f , uscenti da Ω_1 : ciò risulta facile a partire dalla treccia $T(\varphi)$ soprattutto nei casi in cui la $T(f)$ è data in relazione ad una forma canonica del gruppo di monodromia della $y(x)$ definita da f^{22} .

Si devono considerare poi i cicli $C_{\zeta f}$ di f , uscenti da Ω_1 (e nulli su f) che circondano rispettivamente ciascuno dei punti P_{ζ} di φ che stanno su f .

Il modo di operare di tali cicli $C_{\zeta f}$, uscenti da Ω_1 , si rileva dall'esame (in base al teorema 2) dei soli tratti $t_{\zeta f}$ di $T(\sigma)$. Per precisare in che consiste questo esame notiamo che in un tratto $t_{\zeta f}$ vi è un filo di f tale che, una volta tolto, i rimanenti fili del tratto risultano non avere più alcuna torsione fra loro. Tale filo di f corrisponde al ramo della curva f stessa che si incontra con φ nel punto P_{ζ} definitorie del suddetto tratto $t_{\zeta f}$ ed ha entrambi gli estremi (sui due setti di $t_{\zeta f}$) in un punto y_r (con lo stesso indice r).

Chiamiamo con τ_r l'arco dato dal precedente filo di f considerato entro lo stesso tratto $t_{\zeta f}$.

22) In questo ordine di idee cfr. per esempio: C. MARCHIONNA TIBILETTI, *Treccie relative a forme canoniche del gruppo di monodromia*, Rend. Ist. Lombardo, 88 (1955).

Quando $y_r = y_1$ il relativo arco τ_1 dà un ciclo $C_{\varphi f}$, quando poi $y_r \neq y_1$ l'arco τ_r dà un ciclo $\bar{C}_{\varphi f}$ circondante un punto P_φ (e nullo su f) ma non uscente da Ω_1 . In quest'ultimo caso per avere un effettivo ciclo $C_{\varphi f}$ occorre prendere successivamente i cammini l_1^{-1} , l_r , τ_r , l_r^{-1} , l_1 . Però, dato il modo in cui è stata fissata la nomenclatura, il ciclo $\bar{C}_{\varphi f}$ opera sui secondi indici delle z_{rs} (fermo restando il primo indice) così come opera $C_{\varphi f}$ sui secondi indici delle z_{1s} . In ogni caso i suddetti archi τ_r relativi ai vari tratti t_r danno il modo di operare di tutti i cicli $C_{\varphi f}$.

I precedenti cicli C_f e $C_{\varphi f}$ formano una base di $f - P_\varphi$; pertanto per avere i sistemi di intransitività Σ_i basta rilevare dalla treccia come essi operano sulle μ determinazioni z_{1s} (in y_1).

b) Qualora, per la forma data della $T(f)$, fosse scomodo ricercare una base dei cicli di $f - P_\varphi$ alla ricerca dei precedenti sistemi Σ_i si può procedere nel modo seguente.

Consideriamo le suddette μn determinazioni z_{rs} ($r = 1, \dots, n$; $s = 1, \dots, \mu$) e tutti gli archi forniti dai vari tratti di $T(f - P_\varphi)$. In base al teorema 2 rileviamo dall'andamento di tali archi (in relazione al loro percorso ed ai fili di φ che si avvolgono ad essi) le corrispondenti sostituzioni sulle z_{rs} . L'insieme I di queste sostituzioni genera (per prodotto) il gruppo G (imprimitivo ed intransitivo, in generale) di tutte le sostituzioni sulle z_{rs} per i cammini di $f - P_\varphi$. Dal modo di operare dell'insieme I (o meglio del gruppo G) otteniamo i sistemi di intransitività Σ_i legati ad y_1 .

Dal punto di vista pratico per avere facilmente il modo di operare delle sostituzioni di I (e di G) possiamo procedere come segue.

Rappresentiamo le determinazioni z_{rs} con dei punti disposti in righe e colonne: in una stessa riga sono posti i punti rappresentativi delle z_{rs} cui compete lo stesso valore di r ed in una stessa colonna quelli rappresentativi delle z_{rs} con lo stesso valore di s . Segnamo poi le linee colleganti i punti z_{rs} che man mano vengono mutati gli uni negli altri per i tratti di $T(f - P_\varphi)$ — cioè per le sostituzioni di I —.

Indicheremo precisamente ed useremo tale schema nei successivi esempi (cfr. n. 8).

Risultano appartenere ad uno stesso sistema di intransitività Σ_i , cioè ad una stessa curva f_i^* (di Φ), i valori z_{rs} che vengono congiunti con un cammino ottenuto con le suddette linee colleganti; così dallo schema precedente si rilevano i sistemi di intransitività Σ_i legati ad y_1 .

Il procedimento contiene in sè buone verifiche, infatti quello che succede per y_1 deve accadere anche per ogni altro y_r .

7. - Consideriamo le varie componenti $z^{(i)}(x, y)$ ($i = 1, \dots, \nu$) della funzione $z(x, y)$ definita su f e relative rispettivamente alle varie curve (irriducibili) f_i^* della superficie.

Osserviamo che i punti P_φ comuni alle curve f e φ in cui vi sia un contatto di ordine dispari fra la φ e un ramo (lineare o superlineare) di f non generano su f un punto di diramazione per alcuna delle precedenti funzioni $z^{(i)}(x, y)$.

Allora si tratta di vedere per quale $z^{(i)}(x, y)$ è di diramazione ciascuno dei punti P_φ (che non risultino non diramanti per le regioni suesposte). Ciò appare dall'esame dei corrispondenti tratti $t_{\varphi f}$ di $T(f - P_\varphi)$: se per uno di tali tratti risulta variato l'indice s delle z_{rs} relative ad una certa $z^{(i)}(x, y)$ allora lo stesso tratto dà un punto di diramazione effettiva per la stessa $z^{(i)}(x, y)$ su f .

Dal modello in esame si ottengono così i punti di diramazione su f di ogni $z^{(i)}(x, y)$ e in particolare risulta quando una $z^{(i)}(x, y)$ è senza punti di diramazioni su f .

Le osservazioni precedenti conducono alla *valutazione del genere p_i della f_i^** , tramite la notissima formula di Zeuthen ²³⁾:

$$p_i = h_i(\pi - 1) + 1 + \frac{\delta}{2}$$

ove π è il genere di f , h_i il numero dei valori della $z^{(i)}(x, y)$ su f , δ il numero dei punti di diramazione della stessa $z^{(i)}(x, y)$ e p_i il genere di f_i^* .

²³⁾ Cfr. ad esempio cap. IV, n. 38 di ENRIQUES e CHISINI, *Teoria geometrica, ecc.*, I. c.

A partire dai nostri dati sono noti o conoscibili i numeri π , h_1 e δ .

8. - Diamo ora alcuni esempi di applicazione del criterio indicato nel precedente n. 6.

Nella descrizione relativa a tali casi non ci soffermeremo, per ragioni di brevità, sui particolari costruttivi delle trecce in questione (ne daremo solo qualche cenno, in nota).

a) Sia una quadrica Φ_2 e φ_2 la conica che è sua curva diramante. Consideriamo la curva $\sigma = \varphi_2 + f_3$ ove f_3 è una cubica nodata tritangente alla conica φ_2 .

La fig. 1 dà la relativa treccia $T(\sigma)$ ²⁴.

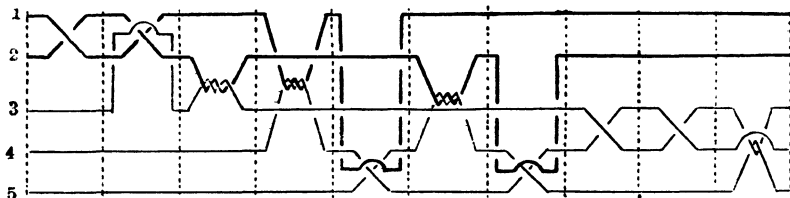


Fig. 1

Precisamente i primi due fili — quelli che escono, all'inizio della treccia, dai punti indicati con 1 e 2 —, presi da soli, danno la treccia della φ_2 ; gli altri tre fili — uscenti dai posti 3, 4, 5 — danno, presi da soli, la treccia della f_3 .

I posti 3, 4, 5 sui vari setti della fig. 1 danno rispettivamente i punti indicati sopra con y_1 , y_2 , y_3 .

Sui fili della treccia $T(\varphi)$, in $T(\sigma)$, sono deposte ²⁵ le sostituzioni (z_1, z_2) relative alle determinazioni della funzione $z = z(x, y)$ data dalla Φ_2 .

Usiamo ora il criterio b) indicato nel precedente n. 6 per trovare le curve di Φ_2 che si proiettano in f .

²⁴) Una tale treccia si costruisce facilmente a partire dalla forma limite data da una conica e tre sue tangenti (Cfr. ad esempio [6], per costruzioni analoghe).

²⁵) Cfr. il cap. II di [6].

I nomi delle determinazioni della $z(x, y)$ siano fissati come è indicato nel n. 5 e siano precisamente:

$$(I) \quad \begin{array}{ll} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \\ z_{31} & z_{32} \end{array}$$

Ora i due tratti (uguali) 5° e 7° della treccia $T(\sigma)$ — v. fig. 1 — danno, per il teorema 2. la sostituzione $(z_{21}z_{32})(z_{22}z_{31})$ in quanto il filo uscente da y_2 sul primo setto perviene al posto y_3 sul secondo setto essendo avvolto — per un sol giro — da un filo di φ , e il filo uscente da y_3 giunge in y_2 sul secondo setto essendo ancora avvolto — per un giro — da un filo di φ .

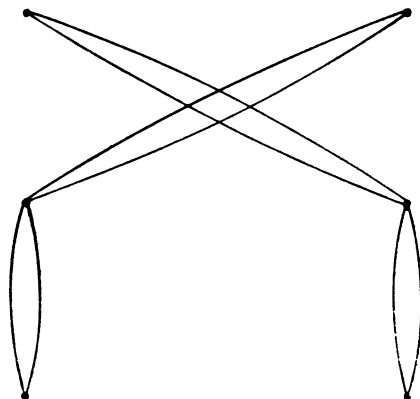


Fig. 2

I tratti (uguali) 8° e 9° danno la sostituzione $(z_{11}z_{21})(z_{12}z_{22})$ in quanto il filo uscente da $y_1[y_2]$ sul primo setto giunge in $y_2[y_1]$ sul secondo setto.

Gli altri tratti t_f e t_{z_f} danno l'identità sulle z_{rs} : precisamente: i tratti 3°, 4° e 6° la danno in virtù del teorema 2 per il numero pari degli avvolgimenti con i fili di φ che compaiono in essi e l'ultimo tratto di $T(\sigma)$ dà pure l'identità perchè in esso non vi sono avvolgimenti con fili di φ ed ogni filo ha la stessa posizione sul primo e sull'ultimo setto.

Segnamo tali risultati nello schema della fig. 2: precisamente in tale schema i punti segnati con un tondino indicano

ordinatamente i valori della tabella (I) e le linee che uniscono due di tali punti indicano le sostituzioni sopra trovate che portano una nell'altra le determinazioni rappresentate dagli stessi due punti.

Sullo schema della fig. 2 si vede subito che i sistemi di intransitività legati al punto y_1 sono due, costituiti ciascuno da un solo elemento. Pertanto la curva f_3 in esame è proiezione di due curve (cubiche gobbe) della quadrica Φ_2 .

OSSERVAZIONE. Possiamo considerare il caso in cui f_3 non ha il punto doppio pur rimanendo tritangente a φ_2 , oppure quello in cui f_3 non è più tangente a φ_2 in tutti i punti comuni.

Le relative trecce ²⁶⁾ differiscono dalla $T(\sigma)$ della fig. 1 nel modo seguente: nell'ipotesi della mancanza del punto doppio l'ultimo tratto è spezzato in due tratti ugualmente canonici corrispondenti ciascuno ad una diramazione semplice; nel caso poi in cui manca uno dei suddetti contatti di f_3 e φ_2 il corrispondente tratto (sia il 3° o il 4° o il 6° della fig. 1) è diviso in due tratti uguali ciascuno rappresentativo di un nodo.

Si verifica subito che in entrambi questi casi è legato ad y_1 un unico sistema di intransitività Σ_i formato dai due elementi z_{11} , z_{12} : cioè la f_3 è allora proiezione di una sestica irriducibile di Φ_2 .

Si vede anche dall'esame della treccia che quando f_3 è di genere 1 e tritangente a φ_2 la $z(x, y)$ definita su f_3 (a due valori) è senza punti di diramazione (i tre punti di contatto di f_3 e φ_2 risultano punti di diramazione apparente).

In questi vari casi si trova subito, in base al n. 7, il genere della sestica di Φ_2 che si proietta in f_3 .

b) Consideriamo la superficie generale Φ_3 del terz'ordine. La treccia $T(\sigma)$ della fig. 3 (disegnata su due righe) è rappresentativa della curva $\sigma = \varphi_6 + f_1$ ove φ_6 è la curva diramante il piano multiplo dato dalla suddetta superficie Φ_3

²⁶⁾ Queste trecce si possono costruire ancora a partire dalla forma limite data da una conica e 3 rette tangenti o no a φ_2 (v. nota ²⁴⁾).

proiettata da un punto (Z_∞) esterno, e la f_1 è una retta bitangente a φ_6 ²⁷⁾.

Il filo uscente dal posto indicato con 7 compete ad f_1 ed i fili uscenti dagli altri posti rappresentano, da soli, la treccia $T(\varphi)$ di φ_6 . Come è noto ²⁸⁾ nei posti 1, 2, 3, 4, 5, 6 sono deposte rispettivamente le sostituzioni

$$(z_1 z_2) \quad (z_1 z_2) \quad (z_2 z_3) \quad (z_2 z_3) \quad (z_2 z_3) \quad (z_2 z_3).$$

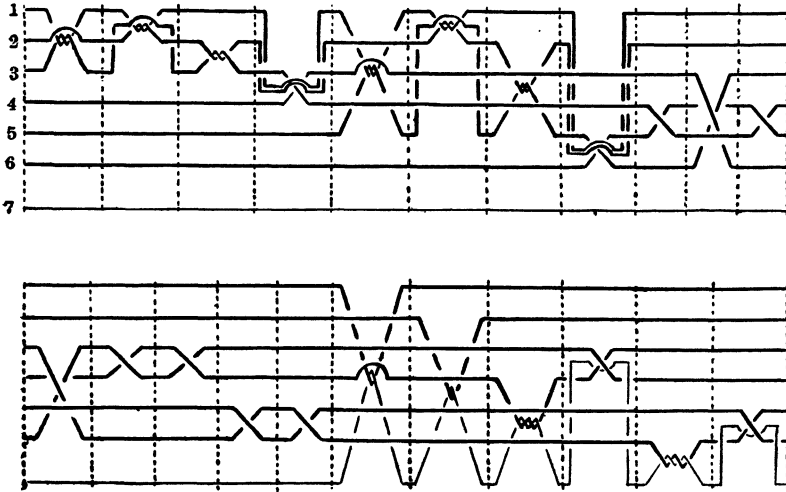


Fig 3

Operiamo anche qui con il criterio b) del n. 6: siano

$$(II) \quad z_{11} \quad z_{12} \quad z_{13}$$

le determinazioni della $z(x, y)$ nel punto $x=0, y=y_1$ (rappresentato sulla fig. 3, nei vari setti, dal posto 7).

Lo schema, analogo a quello dell'esempio a) precedente, è ora rappresentato dalla fig. 4 ove i punti (segnati con toncini) indicano rispettivamente le tre determinazioni di (II)

²⁷⁾ Tale treccia è ottenuta aggiungendo opportunamente a quella di φ_6 (che è nota, cfr. [5] cap. I) un filo rappresentativo di f_1 in modo che la f_1 sia bitangente a φ_6 .

²⁸⁾ Cfr. il cap. II di [6].

Qui in virtù del teorema 2, solo i tratti 17° e 18° operano sulle z_{rs} con sostituzioni diverse dall'identità e precisamente con lo scambio $(z_{11}z_{12})$.

Dall'esame della fig. 4 risulta che i sistemi d'intransitività legati al punto y_1 sono due, dati rispettivamente dalle due determinazioni z_{11} , z_{12} e dall'unica determinazione z_{13} .

La f_1 è pertanto proiezione di una conica e di una retta di Φ_3 .

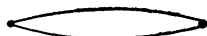


Fig. 4

OSSERVAZIONI. Notiamo (cfr. n. 6) che i punti del piano corrispondenti ai nodi $(17)^2$ e $(27)^2$ della treccia sono effettivi punti di diramazione per la funzione a due valori che dà la suddetta conica di Φ_3 (e ciò per il modo di operare dei relativi tratti $t_{\sigma f}$).

Inoltre, anche qui, come nell'esempio precedente, si vede subito che se la f_1 non è tangente in due punti alla φ_6 (la treccia $T(\sigma)$ risulta allora quella della fig. 3 in cui uno o entrambi i tratti quartultimo e penultimo sono divisi in due ulteriori tratti canonici, uguali, rappresentativi di nodi) il sistema di intransitività legato ad y_1 è costituito da tutte e tre le determinazioni z_{11} , z_{12} , z_{13} della $z(x, y)$.

In queste circostanze la f_1 è solo proiezione di una cubica (piana) di Φ_3 .

In base al n. 7 si vede dall'esame della treccia che quando f_1 è tangente in un punto a φ_6 la suddetta cubica di Φ_3 ha genere 0 e quando la f_1 non è tangente a φ_6 la stessa cubica di Φ_3 ha genere 1²⁹⁾.

²⁹⁾ Nel primo caso si hanno 4 punti di diramazione della funzione $z(x, y)$ definita su f_1 dati rispettivamente, sulla fig. 3, dai tratti 17°, 18° e da uno dei tratti quartultimo o penultimo diviso in due tratti rappresentativi di nodi (come è detto sopra nel testo).

Nel secondo caso, in cui f_1 non è tangente a φ_6 si hanno 6 punti di diramazione dati (sempre sulla fig. 3) dai tratti 17°, 18° e dai tratti quartultimo e penultimo entrambi divisi in due tratti rappresentativi di nodi.

BIBLIOGRAFIA

- [1] O. CHISINI, *Una suggestiva rappresentazione reale per le curve algebriche piane*, Rend. Ist. Lombardo **66** (1933).
- [2] O. CHISINI, *Un teorema d'esistenza dei piani multipli*, note I e II, Rend. Acc. Lincei, s. 6, **19** (1934).
- [3] M. DEDÒ, *Algebra delle trecce caratteristiche: relazioni fondamentali e loro applicazione*, Rend. Ist. Lombardo, **83** (1950).
- [4] F. ENRIQUES, *Sulla costruzione delle funzioni di due variabili possedenti una data curva di diramazione*, Annali di Matematica, s. IV, **1** (1923).
- [5] E. MARCHIONNA, *Sul gruppo fondamentale di una curva algebrica. Applicazioni alle superficie multiple prive di curva diramante*, Annali di Matematica, s. IV, **41** (1955).
- [6] C. MARCHIONNA TIBILETTI, *Trecce algebriche di curve di diramazione: costruzioni ed applicazioni*, Rend. Sem. Matem. di Padova, **24** (1955).
- [7] O. ZARISKI, *On the problem of existence of algebraic functions of two variables possessing a given branch curve*, American Journal of Math., **51** (1929).