RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

EMILIO GAGLIARDO

Un criterio di eguale continuità per funzioni di due variabili

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 26 (1956), p. 148-167

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1956__26__148_0>

UN CRITERIO DI EGUALE CONTINUITÀ PER FUNZIONI DI DUE VARIABILI

Nota (*) *di* EMILIO GAGLIARDO (*a Napoli*)

Nello studio di un problema al contorno per equazioni alle derivate parziali di tipo parabolico in n variabili [1]) mi sono imbattuto in una questione di compattezza di un insieme di funzioni rispetto a particolari tipi di convergenza *quasi* uniforme, quando si suppongano limitati gli integrali di certe potenze di alcune (e non tutte) tra le derivate dei primi due ordini.

In questa Nota, riferendomi esclusivamente a funzioni di due variabili, stabilisco un criterio il quale, in ipotesi leggermente più restrittive di quelle dei criteri citati, assicura la compattezza rispetto alla convergenza uniforme.

Come applicazione di tale criterio si deduce che la soluzione del problema al contorno di cui si è fatto cenno, nel caso particolare di due variabili risulta continua nel suo dominio di definizione [2]).

1. - Il risultato principale di questa Nota è il seguente:

[1.I] *Sia D il dominio del piano (x, y) definito dalle limitazioni*:

$$D \equiv \{ y_0 \leq y \leq y_1 \quad , \quad \varphi(y) \leq x \leq \psi(y) \}, \qquad (\varphi(y) < \psi(y)) \tag{1.1}$$

(*) Pervenuta in Redazione il 29 aprile 1956.
Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università Napoli.

1) E. GAGLIARDO, *Problema al contorno per equazioni differenziali lineari di tipo parabolico in n variabili.* Ricerche di Matematica, 5, 169-205, (1956).

2) Cfr. 1) n. 11, p. 204.

le funzioni $\varphi(y)$, $\psi(y)$ *essendo hölderiane d'ordine* $\lambda > 1/3$ *per* $y_0 \leq y \leq y_1$.

Sia $\{u_n(x, y)\}$ *una successione di funzioni continue con le derivate* $\dfrac{\partial u_n}{\partial x}\ \dfrac{\partial u_n}{\partial y}\ \dfrac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}$ *in D, ed ivi equilimitate:* $|u_n(x, y)| \leq M$; *esistano due costanti positive* α, A *tali che si abbia, per ogni* n:

$$\iint_D \left[\left|\frac{\partial u_n}{\partial y}\right|^{1+\alpha} + \left|\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}\right|^{1+\frac{1}{\alpha}}\right] dxdy \leq A, \qquad (0 < \alpha \leq 1). \tag{1.2}$$

Le funzioni $u_n(x, y)$ *sono allora egualmente hölderiane in D, e dunque la successione* $\{u_n(x, y)\}$ *è compatta rispetto alla convergenza uniforme in D.*

L'utilità di questo criterio di compattezza si presenta nello studio di problemi ove le variabili indipendenti hanno differenti uffici (ad esempio, come si è detto, nello studio delle equazioni alle derivate parziali di tipo parabolico).

La validità del criterio [1.I], per tutti i valori di α, $(0 < \alpha \leq 1)$, è legata in modo essenziale alla natura del dominio D: ad esempio esso *non* è valido (almeno per generici valori di α) se le funzioni $\varphi(y)$, $\psi(y)$ sono soltanto hölderiane di ordine 1/3, (cfr. n. 6 esempio 1), oppure se la $\varphi(y) < \psi(y)$ è sostituita dalla $\varphi(y) \leq \psi(y)$ (n. 6 esempio 2), e *non* è valido per un generico dominio piano D quantunque regolare, (n. 6 esempio 3).

Nel caso particolare $\alpha = 1$ sussiste però il seguente teorema:

[1.II] *Sia D un dominio del piano* (x, y) *la cui frontiera sia una curva chiusa semplice a tangente lipschitziana* [3]).

Sia $\{u_n(x, y)\}$ *una successione di funzioni continue con le derivate* $\dfrac{\partial u_n}{\partial x}\ \dfrac{\partial u_n}{\partial y}\ \dfrac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}$ *in D, ed ivi equilimitate:* $|u_n(x, y)| \leq M$;

---

[3]) o, più generalmente, hölderiana (di un qualsiasi ordine).

esista una costante positiva A tale che si abbia, per ogni n:

$$\iint_D \left[\left| \frac{\partial u_n}{\partial y} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} \right|^2 \right] dxdy \leq A . \tag{1.3}$$

La successione $\{ u_n(x, y) \}$ è allora compatta rispetto alla convergenza uniforme in D.

Tale criterio *non* è però valido se la curva frontiera di D è dotata soltanto di tangente variabile con continuità (cfr. n. 6 esempio 4).

Ci si può infine domandare se, volendo stabilire l'eguale continuità delle funzioni $u_n(x, y)$, l'ipotesi della loro equilimitatezza non possa essere soppressa o sostituita con altra meno restrittiva. A tale quesito rispondono i seguenti teoremi di cui il secondo, come vedremo, è conseguenza quasi immediata del primo.

[1.III] *Sia D un dominio del tipo* (1.1) *ove le funzioni $\varphi(y)$, $\psi(y)$ siano hölderiane di ordine $\lambda > 1/2$.*

Sia $\{ u_n(x, y) \}$ una successione di funzioni continue con le derivate $\frac{\partial u_n}{\partial x}$, $\frac{\partial u_n}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}$ in D; esistano due costanti positive α, A tali che si abbia, per ogni n:

$$\iint_D \left[\left| \frac{\partial u_n}{\partial x} \right|^{\max\left[1+\alpha,\, 1+\frac{1}{\alpha}\right]} + \left| \frac{\partial u_n}{\partial y} \right|^{1+\alpha} + \left| \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} \right|^{1+\frac{1}{\alpha}} \right] dxdy \leq A. \tag{1.4}$$

$(\alpha > 0)$, [4])

Le funzioni $u_n(x, y)$ sono allora egualmente continue in D.

Questo criterio *non* è valido se le funzioni $\varphi(y)$, $\psi(y)$ sono soltanto hölderiane di ordine $1/2$ (cfr. n. 6 esempio 5).

[1.IV] *Nelle stesse ipotesi del teorema precedente, in luogo della* (1.4) *si può supporre verificata la* (1.2) *unitamente ad*

---

[4]) dove la costante α, a differenza di quanto si è supposto per la (1.2), può anche assumere valori maggiori di 1.

una limitazione del tipo:

$$\iint_D |u_n(x, y)|^{1+\frac{1}{\alpha}} dxdy < M \tag{1.5}$$ [5])

(*dove* α *è la stessa costante che figura nella* (1.2)).

Terminiamo osservando che dalla limitazione:

$$\iint_D \left[\left|\frac{\partial u_n}{\partial x}\right|^{1+\alpha} + \left|\frac{\partial u_n}{\partial y}\right|^{1+\alpha} + \left|\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}\right|^{1+\alpha} \right] dxdy \leq A, \quad (\alpha > 0), \tag{1.6}$$

dalla quale ho dedotto in un precedente lavoro [6]) un particolare tipo di eguale *quasi* continuità, *non* segue in generale (cfr. n. 5 es. 6) l'eguale continuità delle $u_n(x, y)$ [7]).

2. - Ci saranno utili i seguenti lemmi:

[2.I] *Sia* $f(\xi)$ *una funzione definita per* $0 < \xi \leq h$ *ed assolutamente continua in ogni intervallo del tipo* (ε, h), *con* $0 < \varepsilon < h$. *Esistano tre costanti*: $\rho > 0$, $A > 0$, $0 \leq \vartheta < 1$ *tali che si abbia*:

$$\int_{\vartheta\xi}^{\xi} |f'(t)|^{1+\rho} dt \leq A \tag{2.1}$$

per ogni ξ *dell'intervallo* $0 < \xi \leq h$. *La funzione* $f(\xi)$ *può essere allora definita per continuità in* $\xi = 0$, *e soddisfa in* $(0, h)$

---

[5]) dalla quale segue, una volta dimostrata l'eguale continuità, l'equilimitatezza delle $u_n(x, y)$, e pertanto la compattezza rispetto alla convergenza uniforme.

[6]) E. GAGLIARDO, *Un criterio di compattezza per insiemi di funzioni di due variabili*. Ricerche di Matematica, 3, 166-171, (1954).

[7]) Se nella (1.6) si pone, in luogo della derivata seconda pura, la derivata mista, si può invece affermare l'eguale hölderianità delle u_n. La dimostrazione si ottiene immediatamente in base ad un risultato di G. STAMPACCHIA, *Un teorema di calcolo delle variazioni ed applicazioni a problemi al contorno per equazioni alle derivate parziali del tipo iperbolico*. Giornale di Mat. di Battaglini, 78, 81-96, (1948-49).

ad una condizione di Hölder del tipo:

$$|f(\xi'') - f(\xi')| \leq B\, |\xi'' - \xi'|^{\frac{\rho}{1+\rho}}$$

dove la costante B dipende (solo) da ρ, A, ϑ. [8]).

Il teorema è noto per $\vartheta = 0$. Supponendo $\vartheta > 0$ e, per fissare le idee, $0 < \xi' < \xi'' \leq h$ poniamo: $\xi_n = \xi' + \vartheta^n(\xi'' - \xi')$, per $n = 0, 1, \ldots$. Si ottiene allora, osservando che l'intervallo (ξ_{n+1}, ξ_n) è contenuto nell'intervallo $(\vartheta\xi_n, \xi_n)$:

$$|f(\xi'') - f(\xi')| \leq \int_{\xi'}^{\xi''} |f'(t)|\, dt = \sum_n^{0..\infty} \int_{\xi_{n+1}}^{\xi_n} |f'(t)|\, dt \leq$$

$$\leq \sum_n^{0..\infty} \left[\int_{\xi_{n+1}}^{\xi_n} |f'(t)|^{1+\rho} dt\right]^{\frac{1}{1+\rho}} \left[(\vartheta^n - \vartheta^{n+1})(\xi'' - \xi')\right]^{\frac{\rho}{1+\rho}} \leq$$

$$\leq \sum_n^{0..\infty} A^{\frac{1}{1+\rho}} \left[(\vartheta^n - \vartheta^{n+1})(\xi'' - \xi')\right]^{\frac{\rho}{1+\rho}} =$$

$$= (\xi'' - \xi')^{\frac{\rho}{1+\rho}} \left[A^{\frac{1}{1+\rho}}(1 - \vartheta)^{\frac{\rho}{1+\rho}} \sum_n^{0..\infty} \left(\vartheta^{\frac{\rho}{1+\rho}}\right)^n\right].$$

Di qui segue in modo ovvio la tesi.

---

[8]) In base a questo lemma possiamo affermare che una funzione $f(\xi)$, assolutamente continua in ogni intervallo $(\varepsilon, 1)$, con $0 < \varepsilon < 1$, la cui derivata soddisfa ad una limitazione del tipo: $|f'(\xi)| \leq A/\xi^{\alpha}$, $(0 \leq \alpha < 1)$, risulta hölderiana in $(0, 1)$ di ordine $1 - \alpha$, (ed esistono funzioni, soddisfacenti alla detta limitazione, hölderiane al più di tale ordine, ad es. $\xi^{1-\alpha}$). Si osservi che ricorrendo invece nel modo usuale alla disuguaglianza di SCHWARZ-HÖLDER, risultando $f'(\xi)$ sommabile con ogni potenza $< 1/\alpha$, si potrebbe affermare per $f(\xi)$ soltanto l'hölderianità di un qualunque ordine $< 1 - \alpha$.

Una formulazione più generale del lemma [2.I] si ottiene supponendo verificata in luogo della (2.1) la seguente ipotesi: In ogni intervallo I contenuto in $(0, h)$ si possa trovare un intervallo parziale J tale che:

$$\int_J |f'(t)|^{1+\rho}\, dt \leq A \quad ; \quad \text{mis}\, J/\text{mis}\, I \geq k > 1 - 2^{-\frac{1+\rho}{\rho}}$$

[2.II] *Nell'applicazione del lemma precedente ci sarà utile osservare che da una limitazione del tipo:*

$$\int_{\vartheta\xi}^{\xi} | f'(t) |^{1+\sigma} dt \leq \frac{A}{\xi^{\tau}}, \quad (\sigma, A, \tau > 0 ; \quad 0 \leq \vartheta < 1), \tag{2.2}$$

segue:

$$\int_{\vartheta\xi}^{\xi} | f'(t) |^{\frac{1+\sigma}{1+\tau}} dt \leq \left[\int_{\vartheta\xi}^{\xi} | f'(t) |^{1+\sigma} dt \right]^{\frac{1}{1+\tau}} \left[(1-\vartheta)\xi \right]^{\frac{\tau}{1+\tau}} \leq A^{\frac{1}{1+\tau}}(1-\vartheta)^{\frac{\tau}{1+\tau}} = B.$$

[2.III] *Per una funzione di una variabile: $f(x)$, $x_0 \leq x \leq x_1$, dotata di derivata prima assolutamente continua, sussiste la seguente formula di maggiorazione:*

$$\max | f'(x) | \leq \frac{4}{(x_1 - x_0)^2} \int_{x_0}^{x_1} | f(x) | dx + \int_{x_0}^{x_1} | f''(x) | dx \quad ^{9)} \tag{2.3}$$

Posto: $A = \int_{x_0}^{x_1} | f(x) | dx$, $C = \int_{x_0}^{x_1} | f''(x) | dx$ supponiamo per assurdo che in un punto x_* di (x_0, x_1) si abbia, per fissare le idee:

$$f'(x_*) > \frac{4A}{(x_1 - x_0)^2} + C.$$

Si avrebbe allora di conseguenza in ogni punto x dell'intervallo (x_0, x_1):

$$f'(x) \geq f'(x_*) - \left| \int_{x_*}^{x} f''(x) dx \right| > f'(x_*) - C > \frac{4A}{(x_1 - x_0)^2}$$

---

[9]) Esistono funzioni per le quali in questa maggiorazione vale il segno $=$, ad esempio: $f(x) = x$, $(-1 \leq x \leq 1)$. Analoghe maggiorazioni si trovano in: L. NIRENBERG, *Remarks on strongly elliptic partial differential equations*. Communications on Pure and Applied Mathematics, 8, 648-674, (1955); p. 671-73.

e di qui, detto $\bar{x}$ il punto di minimo per $|f(x)|$, (e cioè l'eventuale — unico — zero di $f(x)$, oppure uno degli estremi dell'intervallo):

$$|f(x)| > \frac{4A}{(x_1-x_0)^2}|x-\bar{x}|.$$

Integrando tra x_0 ed x_1 si otterrebbe:

$$A > \frac{4A}{(x_1-x_0)^2}\cdot\frac{(x_1-\bar{x})^2+(\bar{x}-x_0)^2}{2}$$

ma questa disuguaglianza è assurda, essendo $(x_1-x_0)^2 = [(x_1-\bar{x})+(\bar{x}-x_0)]^2 \leq 2[(x_1-\bar{x})^2+(\bar{x}-x_0)^2]$.

[2.IV] *Nelle stesse ipotesi del lemma precedente, indicando con δ, ε due costanti positive, quest'ultima soggetta alla limitazione: $\varepsilon \leq x_1 - x_0$, si ha inoltre:*

$$(2.4)\quad \max|f'(x)|^{1+\delta} \leq \frac{2^{2+3\delta}}{\varepsilon^{2+\delta}}\int_{x_0}^{x_1}|f(x)|^{1+\delta}dx + 2^\delta\varepsilon^\delta\int_{x_0}^{x_1}|f''(x)|^{1+\delta}dx$$

e introducendo invece il massimo valore assoluto di $f(x)$: $|f(x)| \leq M$:

$$(2.5)\quad \max|f'(x)|^{1+\delta} \leq \frac{2^{2+3\delta}M^{1+\delta}}{\varepsilon^{1+\delta}} + 2^\delta\varepsilon^\delta\int_{x_0}^{x_1}|f''(x)|^{1+\delta}dx.$$

Dalla (2.3) si deduce:

$$\max|f'(x)|^{1+\delta} \leq$$

$$\leq 2^\delta\left[\frac{4^{1+\delta}}{(x_1-x_0)^{2+\delta}}\int_{x_0}^{x_1}|f(x)|^{1+\delta}dx + (x_1-x_0)^\delta\int_{x_0}^{x_1}|f''(x)|^{1+\delta}dx\right].$$

Le (2.4), (2.5) si ottengono applicando questa maggiorazione, anzichè a tutto l'intervallo (x_0, x_1), ad un intervallo parziale, di ampiezza ε, contenente un punto di massimo (assoluto) per $|f'(x)|$.

Dalla (2.5) segue poi immediatamente:

[2.V] *Sia* $\{ u_n(x, y) \}$ *una successione di funzioni definite in un dominio* D *del tipo* (1.1) *e soddisfacenti alle ipotesi esposte in* [1.I]. *Sia* Γ *una curva regolare contenuta in* D *e proiettantesi biunivocamente su di un segmento* (y', y'') *dell'asse* y.

Si ha allora, indicando con ε *una costante positiva tale che* $\varepsilon \leq \min\,(\psi(y) - \varphi(y))$:

$$\int_\Gamma \left|\frac{\partial u_n}{\partial x}\right|^{1+\frac{1}{\alpha}} dy \leq 2^{2+3/\alpha} M^{1+1/\alpha} \frac{y'' - y'}{\varepsilon^{1+1/\alpha}} + 2^{1/\alpha} A \varepsilon^{1/\alpha}. \tag{2.6}$$

3. - Diamo in questo numero la dimostrazione del teorema [1.I].

Per le ipotesi fatte sulla natura del dominio D, indicando con μ una costante tale che $\mu \geq 1/\lambda$, è possibile determinare $h > 0$ in modo che per ogni y_* appartenente, per fissare le idee, all'intervallo $\left(y_0, \frac{1}{2}(y_0 + y_1)\right)$, la regione S definita dalle disuguaglianze:

$$y_* \leq y \leq y_* + h(x - \varphi(y_*))^\mu \quad \text{per} \quad \varphi(y_*) \leq x \leq \frac{1}{2}[\varphi(y_*) + \psi(y_*)]$$

$$y_* \leq y \leq y_* + h(\psi(y_*) - x)^\mu \quad \text{per} \quad \frac{1}{2}[\varphi(y_*) + \psi(y_*)] \leq x \leq \psi(y_*)$$

risulti contenuta nel dominio D. In tal modo, riferendoci per fissare le idee ai valori x di $\left(\varphi(y_*), \frac{1}{2}[\varphi(y_*) + \psi(y_*)]\right)$, e cioè del tipo: $x = \varphi(y_*) + \xi$, con $0 \leq \xi \leq \frac{1}{2}(\psi(y_*) - \varphi(y_*))$, per ogni tale valore di ξ il triangolo $\Delta(\xi)$ di vertici: $(\varphi(y_*) + \xi/2, y_*)$, $(\varphi(y_*) + \xi, y_*)$, $(\varphi(y_*) + \xi, y_* + h\mu\xi^\mu/2^\mu)$ risulta contenuto in (S e di conseguenza in) D: altrettanto può dirsi, dopo una facile verifica, del triangolo $\Delta(\xi, t)$ ottenuto da $\Delta(\xi)$ con una traslazione di ampiezza t nella direzione dell'asse x (nel verso positivo), per $0 \leq t \leq \xi/4$.

Indicando con $\Gamma_1 \equiv \Gamma_1(\xi, t)$, $\Gamma_2 \equiv \Gamma_2(\xi, t)$, $\Gamma_3 \equiv \Gamma_3(\xi, t)$ rispettivamente l'ipotenusa del triangolo $\Delta(\xi, t)$, il suo cateto verticale, ed il cateto orizzontale, è possibile per la (1.2) determinare, per ogni n, un valore t_n, con $0 \leq t_n \leq \xi/4$, in modo che:

$$(3.1) \qquad \int\limits_{\Gamma_1+\Gamma_2} \left|\frac{\partial u_n}{\partial y}\right|^{1+\alpha} dy \leq \frac{2A}{\xi/4}, \quad (\Gamma_1 \equiv \Gamma_1(\xi, t_n),\ \Gamma_2 \equiv \Gamma_2(\xi, t_n)),$$ [10]).

Determiniamo inoltre $k > 0$ tale che:

$$k \max \left|\frac{\psi(y) - \varphi(y)}{2}\right|^{\frac{\mu\alpha}{2+\alpha}} \leq \min |\psi(y) - \varphi(y)|.$$

Si avrà allora, potendo scrivere la (2.6) con $\varepsilon = k\xi^{\frac{\mu\alpha}{2+\alpha}}$

$$(3.2) \qquad \int\limits_{\Gamma_i} \left|\frac{\partial u_n}{\partial x}\right|^{1+\frac{1}{\alpha}} dy \leq 2^{2+3/\alpha} M^{1+1/\alpha} \frac{h\mu\xi^{\mu}/2^{\mu}}{k^{1+1/\alpha}\xi^{\mu(1+\alpha)/(2+\alpha)}} +$$

$$+ 2^{1/\alpha} A k^{1/\alpha} \xi^{\mu/(2+\alpha)} = H_1 \xi^{\frac{\mu}{2+\alpha}}, \quad (\Gamma_i \equiv \Gamma_i(\xi, t_n),\ i = 1, 2),$$

e di qui (essendo $0 < \alpha \leq 1$):

$$(3.3) \qquad \int\limits_{\Gamma_i} \left|\frac{\partial u_n}{\partial x}\right|^{2} dy \leq \left[\,\int\limits_{\Gamma_i} \left|\frac{\partial u_n}{\partial x}\right|^{1+\frac{1}{\alpha}} dy\right]^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} \left|h\mu\xi^{\mu}/2^{\mu}\right|^{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} \leq$$

$$\leq H_2 \xi^{\mu\frac{2-\alpha}{2+\alpha}}, \quad (\Gamma_i\, x \equiv \Gamma_i(\xi, t_n),\ i=1, 2).$$

Scrivendo ora per il triangolo $\Delta(\xi, t_n)$ la formula di inte-

---

10) Si ha infatti per la (1.2), posto: $\chi = h\mu\xi^{\mu}/2^{\mu}$, $g = \left|\frac{\partial u_n}{\partial y}\right|^{1+\alpha}$:

$$\int_0^{\xi/4} dt \int\limits_{\Gamma_1(\xi, t)+\Gamma_2(\xi, t)} g(x, y)dy = \int_0^{\xi/4} dt \int_0^{\chi} g\Big(\varphi(y_*) + \xi + t,\ y\Big)dy +$$

$$+ \int_0^{\chi} dy \int_0^{\xi/4} g\Big(\varphi(y_*) + \frac{\xi}{2} + \frac{y}{\chi}\frac{\xi}{2} + t,\ y\Big)dt \leq 2A.$$

grazione per parti:

$$(3.4)\quad \frac{1}{2}\int_{\mathfrak{F}\Delta}\left|\frac{\partial u_n}{\partial x}\right|^2 dx = -\int_{\mathfrak{F}\Delta}\frac{\partial u_n}{\partial x}\frac{\partial u_n}{\partial y}\,dy + \iint_{\Delta}\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}\frac{\partial u_n}{\partial y}\,dxdy \quad ^{11)}$$

si ottiene:

$$\frac{1}{2}\int_{\Gamma_3}\left|\frac{\partial u_n}{\partial x}\right|^2 dx \le \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}\left|\frac{\partial u_n}{\partial x}\right|^2 dx +$$

$$+\left[\int_{\Gamma_1+\Gamma_2}\left|\frac{\partial u_n}{\partial x}\right|^{1+\frac{1}{\alpha}} dy\right]^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}\left[\int_{\Gamma_1+\Gamma_2}\left|\frac{\partial u_n}{\partial y}\right|^{1+\alpha} dy\right]^{\frac{1}{1+\alpha}} +$$

$$+\left[\iint_{\Delta(\xi,t_n)}\left|\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}\right|^{1+\frac{1}{\alpha}} dxdy\right]^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}\left[\iint_{\Delta(\xi,t_n)}\left|\frac{\partial u_n}{\partial y}\right|^{1+\alpha} dxdy\right]^{\frac{1}{1+\alpha}}$$

Di qui, tenendo presente che l'intervallo $(\varphi(y_*)+3\xi/4,\ \varphi(y_*)+\xi)$ è contenuto in $(\varphi(y_*)+\xi/2+t_n,\ \varphi(y_*)+\xi+t_n)$, e osservando che su $\Gamma_1(\xi,\ t_n)$ si ha: $dx = h^{-1}\mu^{-1}2^{\mu-1}\xi^{1-\mu}dy$, si deduce, per le (3.3), (3.2), (3.1), (1.2), una limitazione del tipo:

$$(3.5)\quad \int_{\varphi(y_*)+3\xi/4}^{\varphi(y_*)+\xi}\left|\frac{\partial u_n(x,\ y_*)}{\partial x}\right|^2 dx \le K_1\xi^{1-\mu\frac{2\alpha}{2+\alpha}} + K_2\xi^{\frac{\mu\alpha}{(1+\alpha)(2+\alpha)}-\frac{1}{1+\alpha}} + K_3,$$

$$\left(0\le\xi\le\frac{1}{2}\,[\psi\, y_*) - \varphi(y_*)]\right)$$

dove il secondo membro, scegliendo ad esempio $\mu = 1/\lambda$, [12]),

---

11) La validità di questa formula, in un triangolo Δ interno a D, per una funzione dotata di derivate $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ continue in D, è assicurata dal fatto che una tale funzione può essere approssimata con funzioni più regolari convergenti uniformemente in Δ con le derivate $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$.

essendo per ipotesi $1 \leq 1/\lambda < 3$, $0 < \alpha \leq 1$, può essere maggiorato (uniformemente rispetto ad y_*) con una espressione della forma: K/ξ^τ, con $0 < \tau < 1$.

È allora soddisfatta per le funzioni

$$f_n(\xi) = u_n(\varphi(y_*) + \xi,\ y_*) \quad , \quad \left(0 \leq \xi \leq \frac{1}{2}[\psi(y_*) - \varphi(y_*)]\right),$$

un'ipotesi del tipo (2.2), con $\vartheta = 3/4$, $1 + \sigma = 2$, $0 < \tau < 1$; se ne deduce per il lemma [2.I] che le funzioni $u_n(x, y_*)$, come funzioni di x, sono egualmente hölderiane per $\varphi(y_*) \leq \leq x \leq \frac{1}{2}[\varphi(y_*) + \psi(y_*)]$. Ragionando in modo analogo si stabilisce l'eguale hölderianità per $\frac{1}{2}[\varphi(y_*) + \psi(y_*)] \leq x \leq \leq \psi(y_*)$, e quindi, in definitiva, in tutto l'intervallo $(\varphi(y_*), \psi(y_*))$.

Tutte le relazioni e i risultati precedenti sono stati stabiliti uniformemente rispetto ad y_* per $y_0 \leq y_* \leq \frac{1}{2}(y_0 + y_1)$; e con analoghe considerazioni vengono estesi a tutto l'intervallo (y_0, y_1).

In altre parole esistono due costanti positive β, B, (facilmente determinabili) [13]), dipendenti solo da α, A e dal dominio D, tali che si abbia, per ogni y di (y_0, y_1) e per ogni n:

$$(3.6) \qquad |u_n(x', y) - u_n(x'', y)| \leq B\,|x' - x''|^\beta, \quad \left(x',\ x'' \in (\varphi(y),\ \psi(y)\right).$$

Dimostriamo ora che le funzioni $u_n(x, y)$ sono egualmente hölderiane in D.

---

[12]) Per ottenere il risultato più preciso si assuma:

$$\mu = \max\left[\frac{(\alpha + 2)^2}{2\alpha^2 + 3\alpha},\ \frac{1}{\lambda}\right], \text{ cfr. } ^{13}).$$

[13]) Con la scelta di μ fatta in [12]) si ha:

$$\beta = \frac{1 - \tau}{2}, \quad \tau = \max\left[\frac{1}{2\alpha + 3},\ \frac{2\alpha}{(2 + \alpha)\lambda} - 1\right].$$

A tale scopo dobbiamo tener presente che le funzioni $\varphi(y)$, $\psi(y)$ soddisfano per ipotesi ad una condizione di Hölder:

$$|\varphi(y') - \varphi(y'')| \leq \Lambda |y' - y''|^\lambda$$

$$|\psi(y') - \psi(y'')| \leq \Lambda |y' - y''|^\lambda$$

e sono tali che: $\varphi(y) < \psi(y)$.

Consideriamo allora, per ogni fissata coppia di valori y', y'' di (y_0, y_1), l'insieme dei valori di x per i quali il segmento di estremi (x, y'), (x, y'') appartiene per intero a D, insieme che — se esiste — è costituito da un intervallo, e lo indicheremo con (X', X''). Gli eventuali valori di x tali che

$$\varphi(y') + \Lambda |y' - y''|^\lambda \leq x \leq \psi(y') - \Lambda |y' - y''|^\lambda$$

oppure tali che

$$\varphi(y'') + \Lambda |y' - y''|^\lambda \leq x \leq \psi(y'') - \Lambda |y' - y''|^\lambda$$

appartengono certamente ad (X', X''); si può allora affermare che se $2\Lambda |y' - y''|^\lambda < \min (\psi(y) - \varphi(y))$, l'intervallo (X', X'') esiste, e gli intervalli $(\varphi(y'), \psi(y'))$, $(\varphi(y''), \psi(y''))$ risultano contenuti in $(X' - \Lambda |y' - y''|^\lambda, X'' + \Lambda |y' - y''|^\lambda)$.

Indicando con ω una costante positiva ≤ 1 determiniamo una costante positiva $\delta \leq 1$ tale che $\delta^\omega \leq \min (\psi(y) - \varphi(y)) - 2\Lambda\delta^\lambda$. Per $|y' - y''| \leq \delta$ l'intervallo (X', X'') esiste e la sua lunghezza è $\geq \delta^\omega$.

Da quanto si è precisato risulta chiaro che se $P'(x', y')$, $P''(x'', y'')$ sono due punti di D aventi distanza $\overline{P'P''} \leq \delta$, risultando: $|x' - x''| \leq \overline{P'P''} \leq (\overline{P'P''})^\omega \leq \delta^\omega$, si possono trovare due valori x_1, x_2 di (X', X''), con $x_2 - x_1 = (\overline{P'P''})^\omega$ e tali che x', x'' appartengano all'intervallo $(x_1 - \Lambda |y' - y''|^\lambda, x_2 + \Lambda |y' - y''|^\lambda)$.

Nell'intervallo (x_1, x_2), di lunghezza $(\overline{P'P''})^\omega$, esiste, per la (1.2), per ogni n, un valore x_n^* tale che:

$$\int_{y'}^{y''} \left| \frac{\partial u_n(x_n^*, y)}{\partial y} \right|^{1+\alpha} dy \leq \frac{A}{(\overline{P'P''})^\omega},$$

Si ha allora, per la (3.6), maggiorando $|x' - x_n^*|$, $|x'' - x_n^*|$

con la lunghezza dell'intervallo $(x_1 - \Lambda \mid y' - y'' \mid^\lambda,\ x_2 + \Lambda \mid y' - y'' \mid^\lambda)$:

$$\begin{aligned} | u_n(x', y') - u_n(x'', y'') | &\leq | u_n(x', y') - u_n(x_n^*, y') | + \\ &+ | u_n(x_n^*, y') - u_n(x_n^*, y'') | + | u_n(x_n^*, y'') - u_n(x'', y'') | \leq \\ &\leq 2B[(\overline{P'P''})^\omega + 2\Lambda \,| y' - y'' |^\lambda]^\beta + \left[\frac{A}{(\overline{P'P''})^\omega}\right]^{\frac{1}{1+\alpha}} \left| y' - y'' \right|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}, \end{aligned}$$

e di qui, maggiorando $| y' - y'' |$ con $\overline{P'P''}$:

$$\begin{aligned} | u_n(x', y') - u_n(x'', y'') | &\leq 2^{\beta+1} B (\overline{P'P''})^{\omega\beta} + \\ &+ 2^{2\beta+1} B \Lambda^\beta (\overline{P'P''})^{\lambda\beta} + A^{\frac{1}{1+\alpha}} (\overline{P'P''})^{\frac{\alpha-\omega}{1+\alpha}}. \end{aligned}$$

Questa relazione, con $\omega < \alpha$, esprime la richiesta eguale hölderianità delle funzioni $u_n(x, y)$, [14]), in quanto la restrizione $\overline{P'P''} \leq \delta$ si elimina facilmente, ad esempio osservando che, essendo le u_n equilimitate: $| u_n(x, y) | \leq M$, si ha, per $\overline{P'P''} > \delta$:

$$| u_n(P') - u_n(P'') | \leq 2M < \left(\frac{2M}{\delta}\right) \overline{P'P''} \tag{3.7}$$

Il teorema [1.I] è così dimostrato.

4. - Per dimostrare il teorema [1.II] ci sarà utile precisare, in un caso particolare, un risultato precedente:

---

[14]) Il risultato più preciso si trova assumendo:

$$\omega = \frac{\alpha}{\alpha\beta + \beta + 1},$$

col valore di β precisato in [13]). In tal modo si vede che le funzioni $u_n(x, y)$ sono egualmente hölderiane di ordine:

$$\min\left[\frac{\alpha\beta}{\alpha\beta + \beta + 1},\ \lambda\beta\right].$$

Ad es. per $\alpha = 1$, $\lambda \geq 5/9$, le funzioni $u_n(x, y)$ risultano hölderiane in D di ordine $2/9$, e, come funzioni della sola x, di ordine $\beta = 2/5$.

[4.I] *Sia* $\{ u_n(x, y) \}$ *una successione di funzioni continue con le derivate* $\frac{\partial u_n}{\partial x}\,\frac{\partial u_n}{\partial y}\,\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}$ *nel rettangolo*:

$$R \equiv \{ x_0 - r\eta \leq x \leq x_0 + r\sqrt{\eta},\ y_0 \leq y \leq y_0 + r\eta \},$$

$$(r > 0,\ 0 < \eta \leq 1/2),$$

ed ivi equilimitate: $|u_n(x, y)| \leq M$.

Esista una costante positiva A *tale che si abbia, per ogni* n:

$$\iint_R \left[\left| \frac{\partial u_n}{\partial y} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} \right|^2 \right] dxdy \leq A. \tag{4.1}$$

Si ha allora:

$$|u_n(x_0, y_0) - u_n(x_0, y_0 + r\eta)| \leq B \sqrt[8]{\eta} \tag{4.2}$$

dove B *indica una costante dipendente* (*solo*) *da* A, M, r.

Introduciamo, a tale scopo, il triangolo $\Delta(t)$ di vertici: $(x_0 - t,\ y_0)$, $(x_0 + r\sqrt{\eta} - t,\ y_0)$, $(x_0 + r\sqrt{\eta} - t,\ y_0 + r\eta)$, i cui lati opposti verranno indicati con $\Gamma_2(t)$, $\Gamma_1(t)$, $\Gamma_3(t)$, e determiniamo, per ogni n, un valore t_n, $(0 \leq t_n \leq r\eta)$ in modo che

$$\int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} \left| \frac{\partial u_n}{\partial y} \right|^2 dy \leq \frac{2A}{r\eta}, \quad (\Gamma_1 \equiv \Gamma_1(t_n),\ \Gamma_2 \equiv \Gamma_2(t_n)). \tag{4.3}$$

Si avrà inoltre, per la (2.6), (con $\alpha = 1$, $\varepsilon = r\sqrt{\eta}$):

$$\int_{\Gamma_i} \left| \frac{\partial u_n}{\partial x} \right|^2 dy \leq 2^5 M^2 r^{-1} + 2Ar\sqrt{\eta},\ (\Gamma_i \equiv \Gamma_i(t_n),\ i = 1, 2). \tag{4.4}$$

Scrivendo la formula (3.4) per il triangolo $\Delta(t_n)$ si ottiene:

$$\int_{\Gamma_3} \left| \frac{\partial u_n}{\partial x} \right|^2 dx \leq \int_{\Gamma_1} \left| \frac{\partial u_n}{\partial x} \right|^2 dx + \sqrt{\int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} \left| \frac{\partial u_n}{\partial x} \right|^2 dy} \sqrt{\int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} \left| \frac{\partial u_n}{\partial y} \right|^2 dy} +$$

$$+ \sqrt{\iint_{\Delta(t_n)} \left| \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} \right|^2 dxdy} \sqrt{\iint_{\Delta(t_n)} \left| \frac{\partial u_n}{\partial y} \right|^2 dxdy}.$$

Di qui, tenendo presente che l'intervallo $(x_0, x_0 + r\sqrt{\eta} - r\eta)$ è contenuto in $\Gamma_3(t_n)$, e osservando che su $\Gamma_1(t_n)$ si ha: $dx = \frac{1}{\sqrt{\eta}}\, dy$, si deduce, per le (4.4), (4.3), (4.1), la seguente limitazione:

$$\text{(4.5)} \qquad \int_{x_0}^{x_0+r\sqrt{\eta}-r\eta} \left|\frac{\partial u_n(x, y_0)}{\partial x}\right|^2 dx \leq 2^5 M^2 r^{-1}/\sqrt{\eta} + 2Ar + \sqrt{2^6 M^2 r^{-1} + 4Ar\sqrt{\eta}}\,\sqrt{2Ar^{-1}/\eta} + A \leq \frac{A_1}{\sqrt{\eta}}$$

ed una analoga limitazione potrà stabilirsi con $y_0 + r\eta$ in luogo di y_0.

Indichiamo ora con x_n^* un valore di $(x_0, x_0 + \frac{r}{3}\eta^{3/4})$, [15]), tale che:

$$\text{(4.6)} \qquad \int_{y_0}^{y_0+r\eta} \left|\frac{\partial u_n(x_n^*, y)}{\partial y}\right|^2 dy \leq \frac{A}{\frac{r}{3}\eta^{3/4}} = \frac{A_2}{\eta^{3/4}}.$$

Si avrà allora:

$$| u_n(x_0, y_0) - u_n(x_0, y_0 + r\eta) | \leq | u_n(x_0, y_0) - u_n(x_n^*, y_0) | +$$
$$+ | u_n(x_n^*, y_0) - u_n(x_n^*, y_0 + r\eta) | + | u_n(x_n^*, y_0 + r\eta) - u_n(x_0, y_0 + r\eta) | \leq$$
$$\leq \left[\int_{x_0}^{x_0+r\sqrt{\eta}-r\eta} \left|\frac{\partial u_n(x, y_0)}{\partial x}\right|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{r}{3}\eta^{3/4}\right]^{\frac{1}{2}} +$$
$$+ \left[\int_{y_0}^{y_0+r\eta} \left|\frac{\partial u_n(x_n^*, y)}{\partial y}\right|^2 dy\right]^{\frac{1}{2}} \left[r\eta\right]^{\frac{1}{2}} +$$
$$+ \left[\int_{x_0}^{x_0+r\sqrt{\eta}-r\eta} \left|\frac{\partial u_n(x, y_0 + r\eta)}{\partial x}\right|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{r}{3}\eta^{3/4}\right]^{\frac{1}{2}},$$

---

15) E' facile verificare che questo intervallo risulta contenuto in $(x_0, x_0 + r\sqrt{\eta} - r\eta)$, (essendo: $\frac{1}{3}\eta^{3/4} < \sqrt{\eta} - \eta$ per $\eta \leq 1/2$).

donde, per la (4.5), valida anche con $y_0 + r\eta$, e per la (4.6) segue la (4.2).

Siamo ora in grado di dimostrare il teorema [1.II].

Sia D un dominio la cui frontiera sia una curva chiusa semplice rappresentabile parametricamente, in modo regolare, con funzioni a derivate prime lipschitziane. Un tale dominio gode della proprietà seguente: è possibile determinare una costante positiva r in modo che per ogni punto P di D esista un cerchio $\gamma(P)$ di raggio r, passante per P, ed appartenente per intero a D.

Il teorema [1.II] sarà dimostrato quando avremo fatto vedere che le funzioni u_n sono egualmente continue in un intorno di ogni punto P di D. Se il punto P è interno a D oppure è un punto della frontiera di D ove la tangente *non* è parallela all'asse x, un suo conveniente intorno è del tipo (1.1) e ad esso si può applicare il teorema [1.I]. Resta da esaminare il caso di un punto P della frontiera di D ove la tangente è parallela all'asse x (e la normale interna, per fissare le idee, è diretta verso l'alto). Sia I un intorno di P tale che per ogni punto $Q(\bar{x}, \bar{y}) \in I \cdot D$ il cerchio $\gamma(Q)$ si possa costruire in modo che Q sia un punto della frontiera di $\gamma(Q)$ ove la tangente abbia coefficiente direttivo, in valore assoluto, $\leq 1/3$.

È allora facile verificare, supponendo, per fissare le idee, ≤ 0 il coefficiente direttivo della tangente in Q a $\gamma(Q)$, che per ogni numero positivo $h \leq r$, i rettangoli

$$R_m \equiv \left\{ \bar{x} - \frac{h}{2^m} \leq x \leq \bar{x} + \sqrt{r}\sqrt{\frac{h}{2^m}},\ \bar{y} + \frac{h}{2^m} \leq y \leq \bar{y} + \frac{h}{2^{m-1}} \right\},$$

$$(m = 1, 2, \ldots),$$

risultano contenuti in $\gamma(Q)$, e pertanto in D.

Applicando al generico di essi il lemma [4.I], con $\eta = \dfrac{h}{r 2^m}$, si ottiene:

$$\left| u_n\left(\bar{x}, \bar{y} + \frac{h}{2^m}\right) - u_n\left(\bar{x}, \bar{y} + \frac{h}{2^{m-1}}\right) \right| \leq C \frac{\sqrt[8]{h}}{2^{m/8}}, \quad (m = 1, 2 \ldots),$$

dove C indica una costante dipendente solo da A, M, r; e quindi:

$$|u_n(\bar{x}, \bar{y}) - u_n(\bar{x}, \bar{y} + h)| \leq \left(C \sum_{m}^{1 \ldots \infty} \frac{1}{2^{m/8}}\right) \sqrt[8]{h}.$$

Di qui e dal fatto che, per ogni fissato $h \leq r$, la regione descritta dai punti $(\bar{x}, \bar{y} + h)$ al variare di $(\bar{x}, \bar{y})$ in I, risulta interna al dominio D e pertanto in essa le funzioni $u_n(x, y)$ sono egualmente hölderiane, segue la tesi.

5. - La dimostrazione del teorema [1.III] si ottiene in modo analogo a quanto si è detto al n. 3 per dimostrare il teorema [1.I], salvo alcune modifiche, che vogliamo qui precisare, in quanto le (3.2), (3.3), nelle attuali ipotesi, non sono valide.

Sia Γ una curva regolare proiettantesi biunivocamente sull'asse y, e contenuta in D; supponiamo che siano contenute in D anche le curve $\Gamma(t)$ ottenute da Γ con una traslazione di ampiezza t nella direzione dell'asse x, (nel verso positivo), per $0 \leq t \leq T$.

Sia t_n un valore di $(0, T)$ tale che:

$$\int_{\Gamma(t_n)} \left|\frac{\partial u_n}{\partial x}\right|^2 dy \leq \frac{\iint_D \left|\frac{\partial u_n}{\partial x}\right|^2 dx\,dy}{T} \quad {}^{16})$$

ed analogamente t_n un valore di $(0, T)$ tale che:

$$\int_{\Gamma(t')} \left|\frac{\partial u_n}{\partial x}\right|^{1+\frac{1}{\alpha}} dy \leq \frac{\iint_D \left|\frac{\partial u_n}{\partial x}\right|^{1+\frac{1}{\alpha}} dx\,dy}{T}.$$

---

16) Si tenga presente che, per una funzione $g(x, y)$ continua in D:

$$\int_0^T dt \int_{\Gamma(t)} g(x, y)dy = \iint_{\Theta} g(x, y)dxdy.$$

dove Θ è la regione solcata dalle curve $\Gamma(t)$, per $0 \leq t \leq T$.

Osservando inoltre che, per la formula di Gauss:

$$\int_{\Gamma}\left|\frac{\partial u_n}{\partial x}\right|^2 dy \leq \int_{\Gamma(t_n)}\left|\frac{\partial u_n}{\partial x}\right|^2 dy + 2\iint_D \left|\frac{\partial u_n}{\partial x}\right|\left|\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}\right| dxdy \leq$$

$$\leq \int_{\Gamma(t_n)}\left|\frac{\partial u_n}{\partial x}\right|^2 dy + 2\left[\iint_D \left|\frac{\partial u_n}{\partial x}\right|^{1+\alpha} dxdy\right]^{\frac{1}{1+\alpha}} \left[\iint_D \left|\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}\right|^{1+\frac{1}{\alpha}} dxdy\right]^{\frac{\alpha}{1+\alpha}},$$

$$\int_{\Gamma}\left|\frac{\partial u_n}{\partial x}\right|^{1+\frac{1}{\alpha}} dy \leq \int_{\Gamma(t'_n)}\left|\frac{\partial u_n}{\partial x}\right|^{1+\frac{1}{\alpha}} dy +$$

$$+\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\iint_D \left|\frac{\partial u_n}{\partial x}\right|^{\frac{1}{\alpha}}\left|\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}\right| dxdy \leq \int_{\Gamma(t'_n)}\left|\frac{\partial u_n}{\partial x}\right|^{1+\frac{1}{\alpha}} dy +$$

$$+\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\left[\iint_D \left|\frac{\partial u_n}{\partial x}\right|^{1+\frac{1}{\alpha}} dxdy\right]^{\frac{1}{1+\alpha}} \left[\iint_D \left|\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}\right|^{1+\frac{1}{\alpha}} dxdy\right]^{\frac{\alpha}{1+\alpha}},$$

si deduce che, *nella sola ipotesi* (1.4), gli integrali:

$$\int_{\Gamma}\left|\frac{\partial u_n}{\partial x}\right|^2 dy \quad , \quad \int_{\Gamma}\left|\frac{\partial u_n}{\partial x}\right|^{1+\frac{1}{\alpha}} dy$$

risultano equilimitati [17]).

Si ottiene allora, seguendo il procedimento esposto al n. 3, in luogo della (3.5), una limitazione il cui secondo membro è del tipo:

$$K'\xi^{1-\mu} + K''\xi^{-\frac{1}{1+\alpha}} + K'''$$

[17]) Supponendo $\alpha < 1$ il primo di essi si può anche, (vantaggiosamente), maggiorare in base al secondo:

$$\int_{\Gamma}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dy \leq \left|\text{mis}\,\Gamma y\right|^{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}\left[\int_{\Gamma}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{1+\frac{1}{\alpha}} dy\right]^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}}$$

dove Γy è la proiezione di Γ sull'asse y. Per $\alpha > 1$ vale naturalmente il fatto contrario.

e pertanto, assumendo $\mu = 1/\lambda$, maggiorabile con una espressione della forma: K/ξ^{τ}, $0 < \tau < 1$, avendo supposto, nell'enunciato del teorema [1.III], $\lambda > 1/2$.

La dimostrazione prosegue inalterata (salvo il diverso ordine di hölderianità), con l'avvertenza che, una volta dimostrata l'eguale hölderianità « in piccolo », per dimostrare l'eguale hölderianità « in grande » ci si può ancora servire della (3.7) anche senza aver supposto equilimitate le funzioni $u_n(x, y)$, in quanto gli incrementi $|u_n(P') - u_n(P'')|$, in conseguenza dell'eguale hölderianità « in piccolo », risultano equilimitati per qualsiasi coppia di punti P', P'' del dominio D.

Per dimostrare il teorema [1.IV] basta osservare che, in base alla (2.4), sussiste per le funzioni $u_n(x, y)$ una formula di maggiorazione del tipo:

$$\iint_D \left|\frac{\partial u_n}{\partial x}\right|^{1+\delta} dxdy \leq A' \iint_D \left|u_n\right|^{1+\delta} dxdy + A'' \iint_D \left|\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}\right|^{1+\delta} dxdy, \quad (\delta > 0),$$

e pertanto l'ipotesi espressa dalle (1.2), (1.5) risulta un caso particolare di quella espressa dalla (1.4), (con $\alpha \leq 1$).

6. - Diamo ora alcuni esempi per dimostrare quanto si è affermato al n. 1 sulla *non* validità dei criteri [1.I], [1.II], [1.III] quando alcune delle ipotesi contenute in essi vengono attenuate.

Esempio 1. $u_n(x, y) = e^{-nx}$, $D \equiv \{ 0 \leq y \leq 1, \sqrt[3]{y} \leq x \leq 2 \}$; pur essendo verificate le ipotesi contenute in [1.I], con $\alpha = 1$, *salvo la*: $\lambda > 1/3$, le funzioni u_n *non* sono egualmente continue in D.

Esempio 2. $u_n(x, y) = e^{-ny}$, $D \equiv \{ 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y)$; pur essendo verificate le ipotesi [1.I], con $\alpha = 1$, *salvo la* $\varphi(y) \neq \psi(y)$, le funzioni u_n *non* sono egualmente continue in D.

Esempio 3. $u_n(x, y) = e^{-ny}$, $D \equiv \{ x^2 + (y-1)^2 = 1 \}$; pur essendo verificate le ipotesi [1.I], con $\alpha = 1/2$, *nel cerchio D, e cioè in un dominio non del tipo* (1.1), le funzioni u_n *non* sono egualmente continue in D.

Esempio 4.

$$u_n(x, y) = \sqrt[n]{y + \frac{1}{n^n}}, \; D \equiv \left\{ -\frac{1}{e} \leq x \leq \frac{1}{e}, \; \left| \frac{x}{\log |x|} \right| \leq y \leq \frac{1}{e} \right\} +$$

$$+ \left\{ x^2 + \left(y - \frac{3}{2e} \right)^2 = \frac{5}{4e^2} \right\}.$$

È facile verificare che le funzioni u_n (equilimitate in D) soddisfano in D ad una limitazione del tipo (1.3): a tale scopo osservando che in D si ha: $\left| \frac{\partial u_n}{\partial y} \right| < \frac{1}{n} y^{\frac{1}{n}-1}$, ci si riduce a dimostrare che l'espressione:

$$\frac{1}{n^2} \int_0^1 \left| \frac{x}{\log x} \right|^{\frac{1}{n}-1} dx$$

è limitata uniformemente rispetto ad n; ora ciò si vede immediatamente con la sostituzione: $t = -\frac{1}{n} \log x$.

Il dominio D è regolare; però nell'intorno del punto (0,0) la tangente, pur variando con continuità, *non* soddisfa ad alcuna condizione di Lipschitz (nè di Hölder). Sono dunque soddisfatte tutte le ipotesi del teorema [1.II], *tranne quella che impone una maggiore regolarità al dominio D*. Le funzioni u_n *non* sono egualmente continue in D.

Esempio 5. $u_n(x, y) = e^{-nx}$, $D \equiv \{ 0 \leq y \leq 1, \; \sqrt{y} \leq x \leq 2 \}$; pur essendo verificate tutte le ipotesi contenute in [1.III], con $\alpha = 2$, *salvo la*: $\lambda > 1/2$, le funzioni u_n *non* sono egualmente continue in D.

Esempio 6. $u_n(x, y) = e^{-nx - n^2 y}$, $D \equiv \{ 0 \leq x \leq 1, \; 0 \leq y \leq 1 \}$; pur essendo verificata la (1.6), con $\alpha = 1/2$, le funzioni u_n *non* sono egualmente continue in D.