RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

LUCIEN GODEAUX

Construction de surfaces algébriques dont le diviseur de Severi est quelconque

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 26 (1956), p. 10-17

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1956__26__10_0>

CONSTRUCTION DE SURFACES ALGÉBRIQUES DONT LE DIVISEUR DE SEVERI EST QUELCONQUE

Note (*) *de* LUCIEN GODEAUX (*à Liége*).

Dans le second des beaux mémoires qu'il a consacré à la théorie de la base des courbes tracées sur une surface algébrique [1]), M. Severi a montré qu'il pouvait exister, sur certaines surfaces algébriques, des systèmes linéaires distincts dont les multiples suivant un certain entier appartiennent à un même système linéaire; il en a déduit l'existence d'un nouveau caractère des surfaces algébriques: le diviseur σ. La surface d'Enriques, du sixième ordre, passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre, a le diviseur $\sigma = 2$. Il est bien connu que sur cette surface, existent des systèmes linéaires distincts dont les doubles appartiennent à un même système linéaire. Nous avons observé que la raison de cette propriété est la suivante: La surface Φ d'Enriques, de genres $p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$, est l'image d'une involution du second ordre, privée de points unis, appartenant à une surface F de genres $p_a = P_4 = 1$ [2]). Un système linéaire $|C|$ de courbes tracées sur la surface F contient en général deux systèmes linéaires partiels $|C_1|$, $|C_2|$ appartenant à l'involution et à ces systémes correspondent sur Φ deux systèmes linéaires distincts $|\Gamma_1|$, $|\Gamma_2|$ tels que $2\Gamma_1 \equiv 2\Gamma_2$.

(*) Pervenuta in Redazione l'11 aprile 1956.

Indirizzo dell'A.: Quai Orban, 37, Liége (Belgio).

1) F. SEVERI, *La base minima pour la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique* (Annales de l'Ecole Normale Supérieure, 1908, pp. 449-468).

2) F. ENRIQUES, *Un'osservazione relativa alle superficie di bigenere 1* (Rendiconto Accad. Bologna, 1907-1908, pp. 40-45).

Cette observation nous a conduit à la construction de surfaces de diviseur de Severi quelconque [3]). Considérons une surface F contenant une involution cyclique d'ordre p, sans points unis. Nous pouvons construire sur F un système linéaire $|C|$ contenant $k(1 < k \leq p)$ systèmes linéaires partiels $|C_1|$, $|C_2|, \ldots, |C_k|$ appartenant à l'involution. A ces systèmes correspondent sur une image Φ de l'involution des systèmes linéaires $|\Gamma_1|, |\Gamma_2|, \ldots, |\Gamma_k|$ distincts, mais tels que

$$|p\Gamma_1| = |p\Gamma_2| = \ldots = |p\Gamma_k|.$$

Le diviseur σ de Severi de Φ est donc multiple de p et en général, si F est de diviseur $\sigma = 1$, celui de Φ est $\sigma = p$.

Il convient toutefois de remarquer que l'on n'obtient pas nécessairement par ce procédé les surfaces les plus générales de diviseur de Severi p; on consultera sur ce point un beau travail du regretté Comessatti [4]).

Dans cette note, nous rappelons rapidement la démonstration de notre théorème, nous en montrons l'application dans le cas où p est quelconque, puis nous considérons le cas $p = 2$. Nous montrons que si, dans les équations d'une surface de Steiner ou d'une surface de Veronese, on remplace les coordonnés courantes par des formes algébriques du second degré, on obient des surfaces de diviseur $\sigma = 2$.

1. - Considérons une surface algébrique F contenant une involution cyclique I, d'ordre p, privée de points unis. Nous pouvons construire sur F un système linéaire complet $|C|$ contenant k systèmes linéaires partiels $|C_1|, |C_2|, \ldots, |C_k|$ $(1 < k \leq p)$ appartenant à l'involution.

Désignons par Φ une surface image de l'involution I. Sur

---

[3]) *Sur certaines surfaces algébriques de diviseur supérieur à l'unité.* (Bull. de l'Académie des Sciences de Cracovie, 1914, pp. 362-368).

[4]) A. COMESSATTI, *Sulle superficie multiple cicliche* (Rendiconti del Seminario Matematico della Univ. di Padova, 1930, pp. 1-45). Voir aussi A. ANDREOTTI, *Recherches sur les surfaces irrégulières* (Mémoires in-8° de l'Acad. roy de Belgique, 1952, fasc. 7).

cette surface, aux systèmes $|C_1|$, $|C_2|$, ..., $|C_k|$ correspondent des systèmes linéaires complets $|\Gamma_1|$, $|\Gamma_2|$, ..., $|\Gamma_k|$ distincts.

A une courbe C quelconque correspond sur Φ une courbe Γ possédant un certain nombre de points doubles variables, homologues des couples de points de C qui appartiennent à un même groupe de I. A la courbe Γ correspondent sur F, p courbes de $|C|$, transformées les unes dans les autres par la transformation birationnelle de F en soi, génératrice de l'involution I.

Quand la courbe C varie dans le système $|C|$, la courbe Γ varie dans un système rationnel et, par un théorème d'Enriques [5]), les courbes Γ appartiennent totalement a un système linéaire $|\Gamma|$.

Faisons varier C d'une manière continue dans le système $|C|$ et faisons la tendre vers une courbe C_1. La courbe Γ varie d'une manière continue dans $|\Gamma|$ et tend vers une courbe Γ_1 comptée p fois. Il en est de même lorsque l'on remplace C_1 par une courbe C_2, ..., C_k. Nous avons donc

$$\Gamma \equiv p\Gamma_1 \equiv p\Gamma_2 \equiv \ldots \equiv p\Gamma_k .$$

Si la surface F est de diviseur $\sigma = 1$, la surface Φ a le diviseur $\sigma = p$.

2. - Dans un espace linéaire S_R, considérons une homographie cyclique H de période p et désignons par ξ_1, ξ_2, ..., ξ_p ses axes (que pour plus de simplicité nous supposerons au nombre de p), par r_1, r_2, ..., r_p leurs dimensions. Nous avons

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_p + p = R + 1.$$

Si ε est une racine primitive d'ordre p de l'unité, nous pouvons associer à chacun de ces axes une puissance de ε et précisément ε^{i-1} à ξ_i.

Ceci posé considérons $R-2$ hypersurfaces d'ordre p, linéairement indépendantes, transformées en elles-mêmes par

---

[5]) F. ENRIQUES, *Un'osservazione relativa alla rappresentazione parametrica delle curve algebrique.* (Rend. Circolo Matematico di Palermo, 1896, t. X, pp. 30-35).

H. Précisément, nous supposons que, quand on applique à l'équation d'une des hypersurfaces l'homographie H, cette équation se reproduit multipliée par une puissance de ε. Les hypersurfaces ont en commun une surface F, d'ordre p^{R-2}, transformée en soi par H. Cette homographie engendre sur F une involution I d'ordre p.

Nous pouvons supposer sans restriction

$$r_1 \geq 3,\ r_1 + 2 < R,\ r_2 + 2 < R,\ \ldots,\ r_p + 2 < R.$$

Alors, l'involution I sur F est dépourvue de points unis et nous pouvons appliquer le théorème précédent.

Désignons par C_i les courbes découpées sur F par les hyperplans passant par les axes de H sauf par ξ_i. Nous avons ainsi sur F, p systèmes linéaires $|C_1|$, $|C_2|$, ..., $|C_p|$ appartenant à l'involution I.

Rapportons projectivement les courbes C_1 aux hyperplans d'un espace S_{r_1}. Nous obtenons dans cet espace une surface Φ image de l'involution I. Appelons comme plus haut $|\Gamma_1|$, $|\Gamma_2|, \ldots, |\Gamma_p|$ les systèmes linéaires correspondant sur Φ aux systèmes $|C_1|$, $|C_2|$, ..., $|C_p|$; les courbes Γ_1 sont donc les sections hyperplanes de Φ. Cette surface est d'ordre $p^{R-3} = n$ et les courbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_p$ sont d'ordre n. On a

$$p\Gamma_1 \equiv p\Gamma_2 \equiv \ldots \equiv p\Gamma_p$$

et la surface Φ a le diviseur $\sigma = p$.

Le système $|\Gamma| = |p\Gamma_1|$ est découpé sur Φ en général par les hypersurfaces d'ordre p et il existe une hypersurface d'ordre p qui a un contact d'ordre $p-1$ avec Φ en chaque point de chacune des courbes $\Gamma_2, \Gamma_3, \ldots, \Gamma_p$.

3. - Supposons maintenant $p = 2$, $R = 6$, $r_1 = 3$, $r_2 = 2$. Ecrivons les équations de l'homographie H sous la forme

$$x_1' : x_2' : x_3' : x_4' : y_1' : y_2' : y_3' = x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : -y_1 : -y_2 : -y_3 .$$

Si φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 sont des formes algébriques du second degré linéairement indépendantes en x, les équations de F peuvent s'écrire

$$y_2 y_3 = \varphi_1(x_1, x_2, x_3, x_4),\ y_3 y_1 = \varphi_2,\ y_1 y_2 = \varphi_3,\ y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = \varphi_4 .$$

L'équation de la surface Φ est

$$\varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4 = \varphi_2^2\varphi_3^2 + \varphi_3^2\varphi_1^2 + \varphi_1^2\varphi_2^2,$$

c'est-à-dire l'équation de la surface de Steiner où l'on a remplacé les coordonnées par des formes quadratiques.

Le système $|C_1|$ est découpé par les hyperplans

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 = 0$$

et les courbes Γ_1 sont les sections planes de Φ. Le système $|C_2|$ est decoupé par les hyperplans

$$\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \mu_3 y_3 = 0$$

et les courbes Γ_2 sont découpées sur Φ par les surfaces

$$\mu_1\varphi_2\varphi_3 + \mu_2\varphi_3\varphi_1 + \mu_3\varphi_1\varphi_2 = 0, \tag{1}$$

en dehors des courbes singulières de cette surface.

La surface Φ, d'ordre huit, possède huit points triples

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$$

et trois quartiques gauches doubles

$$\varphi_2 = \varphi_3 = 0, \qquad \varphi_3 = \varphi_1 = 0, \qquad \varphi_1 = \varphi_2 = 0.$$

Les courbes Γ_2 sont d'ordre $4 \cdot 8 - 3 \cdot 4 \cdot 2 = 8$.

La surface F est une surface canonique, c'est-à-dire que le système des sections hyperplanes est le système canonique [6]). Le système canonique de Φ est donc l'un des systèmes $|\Gamma_1|$, $|\Gamma_2|$. Nous avons démontré que le système canonique de Φ est celui des systèmes $|\Gamma_1|$, $|\Gamma_2|$ qui a la dimensions minimum [7]), donc actuellement $|\Gamma_2|$. On voit d'ailleurs que les adjointes d'ordre $8 - 4 = 4$ à Φ sont les surfaces (1). On a donc, pour Φ, $p_a = p_g = 3$, $p^{(1)} = 9$.

---

6) ENRIQUES-CAMPEDELLI, *Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche* (Padova, Cedam, 1932).

7) *Sur les involutions cycliques depourvues de points unis appartenant à une surface algébrique régulière.* (Bull. de l'Acod. roy de Belgique, 1932, pp. 672-679).

La surface Φ est l'enveloppe de la famille de surfaces du quatrième ordre

$$\lambda^2\varphi_2\varphi_3 + 2\lambda(\varphi_2\varphi_3 + \varphi_3\varphi_1 + \varphi_1\varphi_2) + \varphi_1(2\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) = 0.$$

qui passent par les courbes doubles $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = \varphi_4 = 0$ et touchent F le long des courbes Γ_2.

Si, dans l'équation d'une surface de Steiner, on remplace les coordonnées par des formes algébriques du second degré linéairement indépendantes, on obtient une surface du huitième ordre, de genres $p_a = p_g = 3$, $p^{(1)} = 9$ et de diviseur de Severi $\sigma = 2$.

4. - Supposons $p = 2$, $R = 8$, $r_1 = 5$, $r_2 = 2$. L'homographie H a pour équations

$$x_0' : x_1' : \dots : x_5' : y_1' : y_2' : y_3' = x_0 : x_1 : \dots : x_5 : -y_1 : -y_2 : -y_3,$$

et les six équations de la surface F sont

$$y_i y_k = \varphi_{ik}(x_0, x_1, \dots, x_5), \qquad (i, k = 1, 2, 3),$$

où $\varphi_{ik} = \varphi_{ki}$ sont des formes algébriques du second degré linéairement indépendantes.

Les sections hyperplanes C de F ont le genre 129 [8]). Il y a deux systèmes linéaires $|C_1|$, $|C_2|$ appartenant à l'involution I; ils sont découpés par les hyperplans

$$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_5 x_5 = 0,$$

$$\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \mu_3 y_3 = 0.$$

Rapportons projectivement les courbes C_1 aux hyperplans d'un espace S_5. Nous obtenons pour la surface Φ les équations

$$\varphi_{22}\varphi_{33} = \varphi_{23}^2, \qquad \varphi_{33}\varphi_{11} = \varphi_{31}^2, \qquad \varphi_{11}\varphi_{22} = \varphi_{12}^2,$$

$$\varphi_{11}\varphi_{23} = \varphi_{12}\varphi_{31}, \qquad \varphi_{22}\varphi_{31} = \varphi_{23}\varphi_{12}, \qquad \varphi_{33}\varphi_{12} = \varphi_{31}\varphi_{23},$$

c'est-à-dire les équations d'une surface de Veronese où l'on a remplacé les coordonnées par des formes quadratiques.

---

8) ***Sur les courbes et surfaces intersections complètes d'hyperquadriques.*** (Idem., 1944, pp. 262-269).

Le système $|\Gamma_2|$ est découpé sur Φ par un des systèmes d'hypersurfaces

$$\mu_1\varphi_{11}+\mu_2\varphi_{12}+\mu_3\varphi_{31}=0,$$
$$\mu_1\varphi_{12}+\mu_2\varphi_{22}+\mu_3\varphi_{23}=0,$$
$$\mu_1\varphi_{31}+\mu_2\varphi_{23}+\mu_3\varphi_{33}=0,$$

en dehors d'une fixe. Précisément, le premier système, par exemple, découpe sur Φ les courbes Γ_2 en dehors de la courbe $\varphi_{11}=\varphi_{12}=\varphi_{31}=\varphi_{22}\varphi_{33}-\varphi_{23}^2=0.$

Les courbes Γ_1, Γ_2 ont le genre 65.

Les hypersurfaces du quatrième ordre

$$\mu_1^2\varphi_{11}+\mu_2^2\varphi_{22}+\mu_3^2\varphi_{33}+2\mu_2\mu_3\varphi_{23}+2\mu_3\mu_1\varphi_{31}+2\mu_1\mu_2\varphi_{12}=0$$

touchent Φ le long des courbes Γ_2.

5. - Nous avons démontré ailleurs que la surface F, régulière, a les genres $p_a=p_g=111$ et que les hypersurfaces cubiques découpent, sur F, des courbes canoniques [9]). Observons que les hypersurfaces cubiques de S_8, lineairement indépendantes sont au nombre de 165. Celles qui contiennent F appartiennent au système somme des hyperquadriques passant par F et du système des hyperplans. Il existe donc $165-6\cdot 9=111$ hypersurfaces cubiques linéairement indépendantes ne passant pas par F; elles découpent sur cette surface le système canonique complet.

Si nous désignons par p_a' le genre arithmétique de Φ, nous avons [10])

$$p_a+1=2(p_a'+1),$$

donc $p_a'=55$.

Dans le système canonique de F, il existe deux systèmes appartenant à l'involution I: l'un est le transformé du système canonique de Φ et nous le désignerons par $|K_2|$, l'au-

---

9) *Sur les courbes et surfaces...* (loc. cit.).

10) *Mémoire sur les surfaces algébriques doubles ayant un nombre fini de points de diramation* (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1914, pp. 289-312).

tre sera désigné par $|K_1|$. Le système $|K_2|$ a la dimension 54 et $|K_1|$ a donc la dimension 55.

On voit facilement que les courbes K_1 sont découpées par les hypersurfaces cubiques

$$\psi(x_0, x_1, \dots, x_5) = 0.$$

Les hypersurfaces

(1) $$y_1\chi_1 + y_2\chi_2 + y_3\chi_3 = 0,$$

où les χ sont des formes quadratiques en $x_0, x_1, \dots, x_5$ ne s'annullant pas sur F, découpent sur cette surface les courbes K_2. On voit aisément qu'il y a huit surfaces du système (1), linéairement indépendantes, qui passent par F, car on a, par exemple,

$$y_1\varphi_{22} = y_1 y_2^2 = y_2\varphi_{12}\cdot$$

Les hypersurfaces

$$\begin{aligned} \varphi_{11}\chi_1 + \varphi_{12}\chi_2 + \varphi_{31}\chi_3 &= 0, \\ \varphi_{12}\chi_1 + \varphi_{22}\chi_2 + \varphi_{23}\chi_3 &= 0, \\ \varphi_{12}\chi_1 + \varphi_{23}\chi_2 + \varphi_{33}\chi_3 &= 0 \end{aligned}$$

qui ne contiennent pas Φ découpent ,sur cette surface, le système canonique en dehors d'une courbe fixe. Pour le premier système, par exemple, cette courbe fixe est

$$\varphi_{11} = \varphi_{12} = \varphi_{31} = 0, \qquad \varphi_{22}\varphi_{33} - \varphi_{23}^2 = 0.$$

Les hypersurfaces

$$\varphi_{11}\chi_1^2 + \varphi_{22}\chi_2^2 + \varphi_{33}\chi_3^2 + 2\varphi_{23}\chi_2\chi_3 + 2\varphi_{31}\chi_3\chi_1 + 2\varphi_{12}\chi_1\chi_2 = 0,$$

qui ne contiennent pas Φ, touchent cette surface aux points des courbes canoniques.

Le genre linéaire de F est $p^{(1)} = 9 \cdot 2^6 + 1$, donc celui de Φ est $p^{(1)} = 9 \cdot 2^5 + 1$.

Si, dans les équations d'une surface de Veronese, on substitue aux coordonnées des formes algébriques du second degré linéairement indépendantes, on obtient une surface de genres $p_a = p_g = 55$, $p^{(1)} = 9 \cdot 2^5 + 1$, *de diviseur de Severi* $\sigma = 2$.