RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

L. LESIEUR

Sur les idéaux irréductibles d'un demi-groupe

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 24 (1955), p. 29-36

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1955__24__29_0>

SUR LES IDEAUX IRREDUCTIBLES D'UN DEMI-GROUPE

Nota (*) *di* L. Lesieur (*a Poitiers*)

Introduction. - Un demi-groupe est un ensemble muni d'une opération associative: la multiplication. Cette condition définit donc une structure algébrique très vaste comprenant des cas particuliers aussi généraux que les structures de groupe, d'anneau, de treillis [1]). Nous considérons ici un demi-groupe abélien D, c'est-à-dire à opération commutative, et possédant un élément unité. Un idéal de D est une partie I permise dans D pour l'opération, donc telle que: $\alpha \in I$ entraine $\zeta\alpha \in I$ pour tout $\zeta \in D$. On peut alors introduire dans D une condition portant sur les idéaux de D, par exemple la condition de chaine ascendante: toute chaine croissante d'idéaux est finie, ou la condition de chaine descendante affaiblie: toute chaine décroissante minorée est finie. Dans le cas des idéaux d'un anneau, ces deux conditions ne sont pas indépendantes: la deuxième entraine la première. Il n'en est pas de même dans le cas des idéaux d'un demi-groupe; cependant, les résultats que nous avons en vue sont valables quelle que soit l'une ou l'autre de ces conditions supposée remplie. Le résultat principal est l'extension aux demi-groupes d'un théorème que W. Gröbner a établi dans le cas des idéaux d'un anneau commutatif Noe-

---

(*) Pervenuta in Redazione il 13 settembre 1954.

[1]) Les propriétés générales des demi-groupes ont été étudiées en France par P. Dubreil dans sa « Contribution à la théorie des demi-groupes » [1], et par ses élèves.

therien [2] : pour qu'un idéal q soit $\cap$-irréductible [2]), il faut et il suffit qu'il soit primaire et qu'il n'existe aucun idéal primaire entre q et $q:p$; p désignant le radical de q. Au moyen de la théorie des treillis résidués, j'ai déjà démontré que q doit être primaire ([3], § 8); je complète ici ce résultat antérieur en donnant la condition nécessaire et suffisante énoncée plus haut.

1. - Le treillis T_D des idéaux d'un demi-groupe commutatif satisfaisant à la condition de chaine ascendante ou à la condition de chaine descendante affaiblie peut être considéré comme un demi-groupe réticulé résidué entier T satisfaisant à l'une de ces conditions; si c'est la condition de chaine descendante affaiblie, on remarque en outre que T est faiblement $\cap$-continu, propriété qui intervient pour l'existence de la décomposition d'un idéal quelconque comme intersection d'un nombre fini d'éléments $\cap$-irréductibles ([3], §5).

Rappelons d'abord un théorème établi dans [3], § 6:

THÉORÈME DE STRUCTURE : *Si p est un élément premier minimal $\geq a$, il existe un élément primaire minimum $\bar{a} \geq a$ ayant p pour élément premier associé. On a:*

$$\bar{a} = a : l \quad , \quad l \nleq p$$

et $\bar{a}$ est l'élément maximum parmi les éléments de la forme $a : x$, où $x \nleq p$.

Si q est un élément primaire admettant p pour élément premier associé, p est un élément premier minimal $\geq a$ pour tout a tel que $q \leq a \leq p$, c'est-à-dire pour tout élément a du segment $S = [q, p]$. Le théorème de structure montre donc l'existence d'une application $a \to \bar{a}$ du segment S sur l'ensemble $\bar{S}$ des éléments primaires de ce segment. Cette application est une application de fermeture algébrique, c'est-à-dire qu'elle vérifie les propriétés suivantes:

1° $\bar{a} \geq a$ (extensivité)
2° $a \geq b$ entraine $\bar{a} \geq \bar{b}$ (isotonie)
3° $\bar{\bar{a}} = \bar{a}$ (idempotence).

---

[2]) q est $\cap$-irréductible si l'on ne peut avoir: $q = q_1 \cap q_2$, avec $q_1 > q$, $q_2 > q$.

Il en résulte que l'ensemble S des éléments primaires du segment $[q, p]$ est fermé pour l'intersection et qu'il constitue un sous-demi-treillis complet de S pour l'intersection. Ce n'est pas un sous-treillis de S, mais il forme en tant qu' ensemble ordonné un treillis complet $\bar{S}$, dont nous allons donner les principales propriétés. Nous désignerons les opérations d'union et d'intersection dans $\bar{S}$ par les symboles $\vee$ et $\cap$, celles de S et T étant notées $\cup$ et $\cap$. Si $a_\alpha \in S$, on a la relation immédiate:

$$\vee a_\alpha = \overline{\cup a_\alpha}. \tag{1}$$

PROPRIÉTÉ 1. - *Les résiduels $q : m$ $(m \nleq q)$ sont des éléments de $\bar{S}$.*

Soit en effet $a = q : m$, avec $m \nleq q$. On a donc $ma \leq q$, d'où $a \leq p$ puisque q est primaire et p son élément premier associé. Il en résulte $a \in S$. D'après le théorème de structure, on a $\bar{a} = a : l$, avec $l \nleq p$. On en déduit:

$$\bar{a} = q : ml = (q : l) : m = q : m = a$$

PROPRIÉTÉ 2. - *$\bar{S}$ vérifie la loi de $\cap$-distributivité générale.*

On veut démontrer la relation:

$$a \cap (\vee b_\alpha) = \vee (a \cap b_\alpha).$$

Pour cela, il suffit d'établir:

$$a \cap (\vee b_\alpha) \leq \vee (a \cap b_\alpha).$$

Or on a d'après la relation (1) et le théorème de structure:

$$\vee b_\alpha = \overline{\cup b_\alpha} = (\cup b_\alpha) : l \quad ; \quad l \nleq p.$$

Comme a est primaire avec p pour élément associé, on peut écrire $a = a : l$, d'où:

$$a \cap (\vee b_\alpha) = (a : l) \cap [(\cup b_\alpha) : l] = [a \cap (\cup b_\alpha)] : l$$

et, puisque S est lui-même $\cap$-distributif général:

$$a \cap (\vee b_\alpha) = (\cup (a \cap b_\alpha)) : l$$

c'est-à-dire, d'après le théorème de structure:

$$a \cap (\vee b_\alpha) \leq \vee (a \cap b_\alpha).$$

On démontre de même que la modularité et l'$\cap$-continuité de S entrainent celles de $\bar{S}$. Ce résultat s'applique alors au treillis des idéaux d'un anneau commutatif noethérien.

La propriété suivante fait intervenir les idéaux principaux de D, c'est-à-dire les multiples d'un élément de D.

PROPRIÉTÉ 3. - *a étant un idéal principal $\leq' p$, on a dans $\bar{S}$:*

$$\overline{q \cup a} \succ \overline{q \cup pa}$$

c'est-à-dire: il n'existe aucun idéal primaire entre $\overline{q \cup pa}$ et $\overline{q \cup a}$.

D'après le théorème de structure, on peut prendre

$$\overline{q \cup a} = (q \cup a) : l.$$

Si q' est un idéal primaire tel que

$$\overline{q \cup pa} \leq q' \leq \overline{q \cup a}$$

on a

$$q'l \leq q \cup a \quad , \quad l \nleq' p,$$

d'où

$$q \leq q \cup q'l \leq q \cup a$$

et, le treillis T étant distributif, donc modulaire:

$$q \cup q'l = (q \cup q'l) \cap (q \cup a) = q \cup [(q \cup q'l) \cap a].$$

Comme a est principal, on peut écrire [3]):

$$(q \cup q'l) \cap a = xa.$$

Supposons $x \nleq' p$. On en déduit $xa \leq q \cup q'l \leq q \cup q' \leq q'$, d'où q' étant primaire, $a \leq' q'$. Il en résulte $q \cup a \leq q'$ et $\overline{q \cup a} \leq q'$, c'est-à-dire

$$q' = \overline{q \cup a}.$$

Supposons $x \leq' p$. On en déduit $xa \leq' pa$ et

$$q \cup q'l = q \cup xa \leq q \cup pa$$

---

[3]) Pour les propriété abstraites des éléments principaux dans un demi-groupe entier réticulé résidué, voir [3], & 8.

d'où :

$$q'l \leq q \cup pa \leq \overline{q \cup pa}.$$

Comme $l \trianglelefteq\!\!\leq p$ et $\overline{q \cup pa} \in \overline{S}$, on a alors :

$$q' \leq \overline{q \cup pa} \quad \text{et} \quad q' = \overline{q \cup pa}.$$

PROPRIÉTÉ 4. - *n étant un entier, le segment $q : p^{n-1} \leq$ $\leq x \leq q : p^n$ de $\overline{S}$ est un treillis de Boole fini.*

On suppose évidemment n inférieur à l'exposant ρ de q. Soit x un idéal primaire tel que :

$$q : p^{n-1} \leq x \leq q : p^n.$$

L'ideal x étant l'union d'éléments principaux a_α, on a :

$$(2) \qquad x = \cup a_\alpha = \cup\, [(q \cup a_\alpha) \cup (q : p^{n-1})] = \vee\, [\overline{q \cup a_\alpha} \vee (q : p^{n-1})].$$

D'après la propriété 3, $\overline{q \cup a_\alpha} \succcurlyeq \overline{q \cup pa_\alpha}$ Il en résulte, le treillis $\overline{S}$ étant distributif, donc modulaire :

$$(3) \qquad \overline{q \cup a_\alpha} \vee (q : p^{n-1}) \succcurlyeq \overline{q \cup pa_\alpha} \vee (q : p^{n-1}).$$

La relation $a_\alpha \leq q : p^n$ entraine $pa_\alpha \leq p(q : p^n) \leq q : p^{n-1}$. D'où :

$$q \cup pa_\alpha \leq q : p^{n-1} \quad \text{et} \quad \overline{q \cup pa_\alpha} \leq q : p^{n-1}.$$

On a donc :

$$\overline{p \cup pa_\alpha} \vee (q : p^{n-1}) = q : p^{n-1}$$

et les relations (2) et (3) montrent que x est union de points dans le segment considéré $[q : p^{n-1}, q : p^n]$ de $\overline{S}$. Celui-ci étant $\cap$-continu d'après la propriété 2, est alors un treillis géométrique ([4], p. 287). Vérifiant une condition de chaine, c'est de plus un treillis de longueur finie ([4], p. 272). Comme il est distributif, c'est donc un treillis de Boole de longueur finie et par suite un treillis de Boole fini, isomorphe au treillis des parties d'un ensemble fini d'éléments.

Des propriétés précédentes résulte facilement le théorème suivant :

Théorème 1. - *Le treillis $\bar{S}$ est un treillis distributif de longueur finie.*

En effet, d'après la propriété 4, la chaine

$$q < q:p < q:p^2 < \dots < q:p^{n-1} < q:p^n < \dots < q:p^{\rho-1} = p$$

est une suite finie de segments formés par des treillis géométriques distributifs de longueurs λ_1, λ_2, ..., λ_n, ..., $\lambda_{\rho-1}$. Il existe donc une chaine maximale de longueur finie $\lambda = \sum_{n=1}^{\rho-1} \lambda_n$ dans le treillis $\bar{S}$. Celui-ci étant distributif, donc modulaire, le théorème en résulte d'après un résultat classique ([4], p. 88).

Conséquence. - *Le treillis $\bar{S}$ est fini.*

On sait en effet qu'un treillis distributif de longueur finie n'a qu'un nombre fini d'éléments ([5], p. 139).

2. - L'idéal q est l'intersection d'un nombre fini d'éléments $\cap$-irréductibles ([3], § 5). Le treillis T étant distributif, ou seulement modulaire, le rang r ou nombre d'éléments qui interviennent dans une décomposition sans éléments superflus est un invariant de q d'après le théorème de Kurosch-Ore ([4], p. 122). Nous allons déterminer ce nombre r.

Théorème 2. - *Le rang r de q dans sa décomposition en intersection d'éléments $\cap$-irréductibles est égal à la longueur λ_1 du segment $[q, q:p]$ dans le treillis $\bar{S}$.*

Dans le segment $[q, q:p]$ qui est un treillis de Boole fini d'après la propriété 4, l'élément q est l'intersection de λ_1 éléments maximaux m_i

$$q = \bigcap_{i=1}^{\lambda_1} m_i$$

qui forment une décomposition de q sans éléments superflus en éléments $\cap$-irréductibles dans $q:p$. Choisissons, i étant fixé, un élément $a_i \leq p$ maximal parmi ceux qui vérifient $a_i \cap (q:p) = m_i$. Son existence est assurée même dans le cas de la condition de chaine descendante affaiblie en vertu de l'hypothèse que T est faiblement $\cap$-continu [4]). Un tel élément a_i est $\cap$-irréductible, car la relation $a_i = q_1 \cap q_2$, avec $q_1 > a_i$, $q_2 > a_i$, entrainerait $m_i = (q_1 \cap q : p) \cap (q_2 \cap q : p)$, d'où, puisque m_i est $\cap$-irréductible dans $q : p$, $m_i = q_1 \cap q : p$ ou $m_i = q_2 \cap q : p$, ce qui contredirait le choix de a_i maximal.

Considérons l'élément

$$h = \bigcap_{i=1}^{\lambda_1} a_i .$$

On a:

$$h \cap (q : p) = \bigcap_{i=1}^{\lambda_1} (a_i \cap q : p) = \bigcap_{i=1}^{\lambda_1} m_i = q.$$

Il en résulte

$$q \leq h \leq p .$$

Suposons qu'on ait $q < h$. On pourrait alors trouver un entier $n \geq 2$ tel que $h \leq q : p^n$, $h \not\leq q : p^{n-1}$. Pour exclure ce cas on fait appel à la propriété suivante: (Cf. W. Gröbner, [2], p. 202, Satz 1).

Si $h \leq q : p^n$, *avec* $h \not\leq q : p^{n-1}$, *on a* $p^{n-1}h \leq q : p$, *avec* $p^{n-1}h \not\leq q$.

On aurait donc $p^{n-1}h \leq q : p$ et $p^{n-1}h \leq h$, d'où $p^{n-1}h \leq \leq h \cap (q : p)$ c'est-à-dire $p^{n-1}h \leq q$, ce qui est en contradiction avec la relation $p^{n-1}h \not\leq q$.

On a donc obtenu une décomposition

$$q = \bigcap_{i=1}^{\lambda_1} a_i$$

de q en intersection de λ_1 éléments $\cap$-irréductibles. Il reste à montrer que cette décomposition ne possède aucun élément superflu. Si l'on avait par exemple

$$a_1 \geq a_2 \cap \dots \cap a_{\lambda_1}$$

on en déduirait:

$$a_1 \cap q : p = m_1 \geq (a_2 \cap q : p) \cap \dots \cap (a_{\lambda_1} \cap q : p)$$

---

[4]) En effet, l'ensemble des x_α tels que $x_\alpha \cap q : p = m_i$ n'est pas vide quisqu'il contient m_i. Il est inductif en vertu de l'hypothèse que T est faiblement $\cap$-continu: $(q : p) \cap (\cup x_\alpha) = \cup (q : p \cap x_\alpha) = m_i$. Il admet donc un élément maximal d'après le théorème de Zorn.

donc

$$m_1 \geq m_2 \cap m_3 \cap \ldots \cap m_{\lambda 1}$$

ce qui est impossible puisque la décomposition de q au moyen des m_i ne possède pas d'éléments superflus. Le rang r de q est bien égal à λ_1.

Du théorème 2 on déduit immédiatement le suivant:

THÉORÈME 3. - *Pour que q soit $\cap$-irréductible, il faut et il suffit que q soit primaire et qu'il n'existe aucun élément primaire entre q et $q:p$.*

La condition q primaire a été démontrée dans [3], § 8. La condition $q:p > q$ dans $\overline{S}$ est le cas particulier du théorème 2 relatif au cas $r = \lambda_1 = 1$.

Nous avons donc étendu aux idéaux d'un demi-groupe un théorème établi par W. Gröbner pour un idéal d'un anneau noetherien. Mais la démonstration prouve que les théorèmes 2 et 3 sont valables dans les conditions plus générales suivantes déjà rencontrées dans [3] pour la décomposition en éléments primaires:

1. CONDITION (H) - T est un demi-groupe réticulé complet, entier et commutatif, satisfaisant à la condition de chaine ascendante ou à la condition de chaine descendante affaiblie.

2. CONDITION (II) - Tout élément est union d'éléments principaux.

3. T est modulaire et faiblement $\cap$-continu.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] P. DUBREIL: *Contribution à la théorie des demi-groupes*, « Mém. Acad. Sci. de Paris », t. 63, 1941, p. 1-52; « Rendiconti di Matem. », 5e série, *10*, 1951, p. 183-200. « Bull.Soc. Math. de France », *81*, p. 289-306, 1933.

[2] W. GRÖBNER: *Uber irreduzible Ideale in kommut. Ringen*, « Math. Ann., Bd. 110, 1934, p. 197-222. — *Ein irreduzibl. Kriter. für Primärideale in komm. Ringen*, « Monatsch. Math. Osterreich. », *55*, p. 138-1445, 1951.

[3] L. LESIEUR: *Sur les demi-groupes réticulés satisfaisant à une condition de chaine*, « Bull. Soc. Math. de France », 1954, à paraitre.

[4] M. L. DUBREIL - JACOTIN, L. LESIEUR, R. CROISOT: *Leçons sur les treillis...*, « Paris, Cahiers Scient. », 1953.

[5] G. BIRKHOFF: *Lattice theory*, « New York, revised edition », 1948.