RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIOVANNI BATTISTA RIZZA

Sulla struttura delle algebre di Clifford

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 23 (1954), p. 91-99

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1954__23__91_0>

SULLA STRUTTURA DELLE ALGEBRE DI CLIFFORD

Nota (*) *di* Giovanni Battista Rizza (*a Genova*)

1. — Tra i diversi indirizzi che si presentano nelle ricerche tendenti all'estensione della teoria delle funzioni di ordinaria variabile complessa al caso di funzioni nelle algebre ipercomplesse è notevole quello, ben noto, aperto dai lavori di Gr. C. Moisil e di R. Fueter.

Tali Autori hanno preso come punto di partenza la considerazione delle funzioni nell'algebra dei quaternioni e, più in generale, nelle algebre di Clifford.

Un sistema di equazioni differenziali, generalizzazione formale delle classiche condizioni di monogeneità di Cauchy, definisce, in queste algebre, le funzioni oggetto di studio, le quali di solito sono denominate *funzioni regolari.*

La teoria delle funzioni regolari è stata in seguito sviluppata da Fueter e da altri Autori, sia con riferimento alle algebre dette, sia nel caso di un'algebra del tutto generale [1]).

Tuttavia, per quanto si riferisce alle funzioni in un'algebra generale, mentre sono state ottenute complete generalizzazioni del primo teorema integrale di Cauchy, non è stata ancora stabilita una equivalente generalizzazione della formula integrale di Cauchy.

Formule integrali di tipo Cauchy, per le funzioni regolari, sono state finora ottenute soltanto nell'algebra dei quater-

---

(*) Pervenuta in Redazione il 24 ottobre 1953.

1) Si veda p. es. il mio lavoro [1] (cfr. la bibliografia in fine), ove si troveranno anche indicazioni sui lavori di Moisil, di Fueter e di altri.

nioni e nelle algebre di CLIFFORD. Ma già nel caso delle algebre di CLIFFORD le formule stabilite hanno carattere assai particolare, in quanto la variabile indipendente si suppone variare, anzichè in tutta l'algebra, in un opportuno sistema lineare subordinato.

Ora, come altra volta ho osservato, il problema della determinazione di una formula del tipo detto in un'algebra ipercomplessa è, in generale, connesso con la varietà dei divisori dello zero dell'algebra.

Perciò, allo scopo di stabilire formule integrali generali, si presenta come fondamentale il problema preliminare della determinazione della distribuzione dei divisori dello zero.

A tale problema, con riferimento alle algebre di CLIFFORD, è dedicato il presente lavoro, nel quale riesco a precisare tale distribuzione, nonchè a chiarire completamente la struttura delle algebre considerate. Nel n. 2 è dato l'enunciato dei risultati ottenuti, che possono forse presentare qualche interesse già nel quadro strettamente algebrico.

Mi riservo di trarne in un prossimo lavoro le conseguenze per la teoria delle funzioni regolari, cui sopra accennavo.

2. — Le algebre di CLIFFORD che consideriamo, nel seguito indicate con $C_n (n \geq 1)$, sono algebre reali di ordine 2^n, dotate di modulo e, per $n \neq 1$, non commutative [2]). In particolare, come risulterà subito, le algebre di CLIFFORD C_1, C_2 coincidono rispettivamente con l'algebra complessa ordinaria e con l'algebra dei quaternioni.

L'algebra di CLIFFORD C_n è definita dal sistema fondamentale di unità:

$$1, \; i_{j_1}, \; i_{j_1 j_2}, \; \dots, \; i_{j_1 j_2 \dots j_n} ; \tag{1}$$

e dalle relazioni:

$$i_{j_1} i_{j_2} = i_{j_1 j_2}, \; i_{j_1} i_{j_2} i_{j_3} = i_{j_1 j_2 j_3}, \; \dots, \; i_{j_1} \dots i_{j_n} = i_{j_1 \dots j_n}, \tag{2}$$

---

[2]) Per le nozioni fondamentali sulla teoria delle algebre ved. p. es. G. SCORZA [3].

$$i_{j_h}^2 = -1 \quad , \quad i_{j_h} i_{j_k} + i_{j_k} i_{j_h} = 0\,; \tag{3}$$

dove il simbolo 1 indica il modulo dell'algebra ed $j_1 < j_2 < \ldots < j_n$ sono interi qualunque scelti tra 1, ..., n.

Nei nn. 3, 4, 5 dimostrerò che:

I. - *L'algebra di* CLIFFORD $C_n (n \geq 2)$ *è somma diretta di* 2^{n-2} *algebre isomorfe all'algebra dei quaternioni.*

II. - *I divisori dello zero di* C_n *costituiscono, nell'*S_{2^n} *rappresentativo,* 2^{n-2} *spazi lineari* $(2^n - 4)$*-dimensionali per l'origine.*

3. — Cominciamo col provare i teoremi I, II per $n = 3$ (il caso $n = 2$ è banale). All'uopo proponiamoci da prima di determinare i divisori dello zero dell'algebra C_3.

Indicate con 1, i_1, i_2, $i_{12} = i_1 i_2$ le ordinarie unità dell'algebra dei quaternioni, ogni ipercomplesso x di C_3 può scriversi:

$$x = \alpha_1 + \alpha_2 i_3\,, \tag{4}$$

con α_1, α_2 quaternioni.

Se $x \neq 0$ è un divisore dello zero di C_3 [3]), esisterà un ipercomplesso non nullo $y = \beta_1 + \beta_2 i_3$ tale che:

$$xy = (\alpha_1 + \alpha_2 i_3)(\beta_1 + \beta_2 i_3) = 0\,. \tag{5}$$

Ricordiamo ora che un quaternione generico q può scriversi:

$$q = q' + q'' i_2\,, \tag{6}$$

essendo q', q'' numeri dell'algebra complessa ordinaria di unità 1, i_1.

Ciò premesso, ponendo:

$$\widehat{q} = \overline{q'} - \overline{q''} i_2\,, \tag{7}$$

con $\overline{q'}$, $\overline{q''}$ complessi coniugati di q', q'', si ha immediatamente, nell'algebra C_3, la relazione:

$$i_3 q = \widehat{q} i_3\,. \tag{8}$$

---

[3]) Poichè C_3 è dotata di modulo i divisori dello zero destri e sinistri coincidono.

Si verifica subito che l'operazione che fa passare da q a $\widehat{q}$ ha carattere involutorio ed è distributiva rispetto alla somma e al prodotto.

Dalla (5) seguono allora le uguaglianze:

$$\alpha_1\beta_1 - \alpha_2\widehat{\beta}_2 = 0 \quad , \quad \alpha_2\beta_1 + \alpha_1\widehat{\beta}_2 = 0 , \tag{9}$$

o le equivalenti:

$$\alpha_1\beta_1 - \alpha_2\widehat{\beta}_2 = 0 \quad , \quad \widehat{\alpha}_2\beta_1 + \widehat{\alpha}_1\widehat{\beta}_2 = 0 . \tag{10}$$

Poichè per ipotesi è: $x \neq 0$, $y \neq 0$ risulta:

$$\alpha_1 \neq 0 \quad , \quad \alpha_2 \neq 0 \quad , \quad \beta_1 \neq 0 \quad , \quad \beta_2 \neq 0 .$$

Infatti il supporre nulla una delle α, o delle β, conduce, a causa delle (9), ad $y = 0$, $x = 0$ rispettivamente.

Si moltiplicano ora a sinistra le (10), per $\alpha_1^{-1} \neq 0$, $\alpha_2^{-1} \neq 0$ risp.; sottraendo e dividendo per $\widehat{\beta}_2 \neq 0$, si perviene alla:

$$\widehat{\alpha}_2^{-1}\widehat{\alpha}_1 + \alpha_1^{-1}\alpha_2 = 0 ,$$

dalla quale, moltiplicando a sinistra per $\widehat{\alpha}_2$ e a destra per α_2^{-1}, si ottiene:

$$\widehat{\alpha}_1\alpha_2^{-1} + \widehat{\alpha}_2\alpha_1^{-1} = 0 . \tag{11}$$

Indicata con $N(\alpha_h) = |\alpha'_h|^2 + |\alpha''_h|^2$ $(h = 1, 2)$ la *norma* del quaternione $\alpha_h = \alpha'_h + \alpha''_h i_2$ si ha, come è noto:

$$\alpha_h^{-1} = \frac{\bar{\alpha}'_h - \alpha''_h i_2}{N(\alpha_h)} = \frac{\bar{\alpha}_h}{N(\alpha_h)} \qquad (h = 1, 2) , \tag{12}$$

ove $\bar{\alpha}_h = \bar{\alpha}'_h - \alpha''_h i_2$.

Dalla (11) seguono allora le:

$$\begin{gathered} \frac{\bar{\alpha}_1'\bar{\alpha}_2' - \bar{\alpha}_1''\bar{\alpha}_2''}{N(\alpha_2)} + \frac{\bar{\alpha}_2'\bar{\alpha}_1' - \bar{\alpha}_2''\bar{\alpha}_1''}{N(\alpha_1)} = 0 , \\ \frac{\bar{\alpha}_1'\alpha_2'' + \bar{\alpha}_1''\alpha_2'}{N(\alpha_2)} + \frac{\bar{\alpha}_2'\alpha_1'' + \bar{\alpha}_2''\alpha_1'}{N(\alpha_1)} = 0 . \end{gathered} \tag{13}$$

Poichè, come si è visto, è $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0$, risulta $N(\alpha_1) \neq 0$,

$N(\alpha_2) \neq 0$; quindi la prima delle (13) si riduce semplicemente alla:

$$\alpha_1'\alpha_2' = \alpha_1''\alpha_2''. \tag{14}$$

Possiamo porre:

$$\alpha_1' = \lambda\alpha_2'' \quad , \quad \alpha_1'' = \lambda\alpha_2', \tag{15}$$

con λ complesso ordinario non nullo.

Sostituendo nella seconda delle (13) e semplificando si trova:

$$\bar{\lambda} + \frac{\lambda}{\lambda\bar{\lambda}} = 0,$$

e, in definitiva:

$$\lambda = \pm i_1. \tag{16}$$

Risulta dunque:

$$\alpha_1' = \pm \alpha_2 i_1 \quad , \quad \alpha''_1 = \pm \alpha_2' i_1, \tag{17}$$

valendo simultaneamente i segni superiori o gli inferiori.

Eliminando nelle (9) le $\alpha_h (h = 1, 2)$ si ottiene subito la relazione:

$$\widehat{\beta}_1\beta_2^{-1} + \widehat{\beta}_2\beta_1^{-1} = 0, \tag{11*}$$

di forma analoga alla (11). Ne segue:

$$\beta_1' = \pm \beta_2'' i_1 \quad , \quad \beta_1'' = \pm \beta_2' i_1, \tag{17*}$$

con la stessa avvertenza espressa per la (17) riguardo ai segni.

Da tutto ciò si trae che i divisori dello zero di C_3 sono da ricercarsi tra gli ipercomplessi non nulli:

$$x = \alpha_1 + \alpha_2 i_3 = (\alpha_1' + \alpha_1'' i_2) + (\alpha_2' + \alpha_2'' i_2) i_3,$$

con le α'_h, α''_h $(h = 1, 2)$ soddisfacenti alle (17).

Anzi, come si verifica subito, ogni ipercomplesso del tipo ora detto è un divisore dello zero di C_3. Basta invero osservare che il prodotto di tale ipercomplesso per un qualunque ipercomplesso:

$$y = \beta_1 + \beta_2 i_3 = (\beta_1' + \beta_1'' i_2) + (\beta_2' + \beta_2'' i_2) i_3,$$

con le β'_h, β''_h $(h=1,\ 2)$ soddisfacenti alle (17*), riesce nullo, quando si scelga nelle (17*) il segno opposto a quello scelto nelle (17).

In conclusione *i divisori dello zero di* C_8 *sono gli ipercomplessi non nulli* $x=\alpha_1+\alpha_2 i_2$ *con le* $\alpha_h=\alpha'_h+\alpha''_h i_2$ $(h=1,\ 2)$ *soddisfacenti alle* (17).

Essi, in corrispondenza alla scelta del segno nella (17), *si distribuiscono in due classi, tali che riesce nullo il prodotto di due divisori dello zero appartenenti a classi diverse.*

Nell'S_8 rappresentante la totalità degli ipercomplessi di C_8, i divisori dello zero costituiscono i due S_4 per l'origine di equazioni (17), che, nel seguito, indicheremo con $S_4^{(1)}$, $S_4^{(2)}$.

Riesce così dimostrato, nel caso $n=3$, il teorema II enunciato al n. 2.

4. — Poichè gli spazi $S_4^{(1)}$, $S_4^{(2)}$ ove si rappresentano i divisori dello zero di C_8 hanno in comune la sola origine, nell'algebra C_8 (d'ordine 8) si possono assumere come nuove unità otto ipercomplessi non nulli quattro dei quali appartengono ad $S_4^{(1)}$ e quattro ad $S_4^{(2)}$, in guisa tale però che gli ipercomplessi di ciascuna quaterna siano tra loro indipendenti.

Ciò posto, in base ad una osservazione del n. 3, sono tutti nulli i prodotti di ciascuna delle prime quattro nuove unità per ciascuna delle seconde.

Le due quaterne di unità generano rispettivamente due sistemi lineari di ordine quattro, i quali, come si riconosce subito, sono due algebre.

L'algebra C_8 è dunque *riducibile,* risultando somma diretta di due algebre del quarto ordine, gli ipercomplessi delle quali si rappresentano in $S_4^{(1)}$, $S_4^{(2)}$ rispettivamente.

Dalle (17) risulta poi subito che *il prodotto di due ipercomplessi non nulli, appartenenti alla stessa classe di divisori dello zero, non può mai essere nullo.* Ne segue che le suddette algebre del quart'ordine sono prive di divisori dello zero; quindi, in base ad un classico risultato, sono *isomorfe all'algebra dei quaternioni* [4]).

---

[4]) Ved. p. es. G. SCORZA [3] p. 397-400.

Con ciò resta senz'altro stabilito il teorema I del n. 2, nel caso $n = 3$.

Per mettere in evidenza la riducibilità di C_3 ed il fatto che le sue componenti irriducibili sono isomorfe all'algebra dei quaternioni, si può eseguire il seguente cambiamento di unità:

$$
\begin{aligned}
&u_0^{(1)} = \frac{i_0 - i_{123}}{2}, \quad u_1^{(1)} = -\frac{i_1 + i_{23}}{2}, \\
&u_2^{(1)} = \frac{i_2 - i_{13}}{2}, \quad u_3^{(1)} = -\frac{i_3 + i_{12}}{2}, \\
&u_0^{(2)} = \frac{i_0 + i_{123}}{2}, \quad u_1^{(2)} = \frac{i_1 - i_{23}}{2}, \\
&u_2^{(2)} = -\frac{i_2 + i_{13}}{2}, \quad u_3^{(2)} = \frac{i_3 - i_{12}}{2};
\end{aligned}
\tag{18}
$$

ove $i_0 = 1$ indica il modulo di C_3.

La tavola di moltiplicazione relativa alle nuove unità si compendia nelle relazioni seguenti:

(19) $(h = 1, 2)$

	$u_0^{(h)}$	$u_1^{(h)}$	$u_2^{(h)}$	$u_3^{(h)}$
$u_0^{(h)}$	$u_0^{(h)}$	$u_1^{(h)}$	$u_2^{(h)}$	$u_3^{(h)}$
$u_1^{(h)}$	$u_1^{(h)}$	$-u_0^{(h)}$	$u_3^{(h)}$	$-u_2^{(h)}$
$u_2^{(h)}$	$u_2^{(h)}$	$-u_3^{(h)}$	$-u_0^{(h)}$	$u_1^{(h)}$
$u_3^{(h)}$	$u_3^{(h)}$	$u_2^{(h)}$	$-u_1^{(h)}$	$-u_0^{(h)}$

$$u_r^{(1)} u_s^{(2)} = u_s^{(2)} u_r^{(1)} = 0 \quad (r, s = 0, 1, 2, 3)\,. \tag{20}$$

Nel seguito le algebre dei quaternioni, componenti irriducibili di C_3, saranno indicate con $C_2^{(1)}$, $C_2^{(2)}$.

5. — Prima di passare alla dimostrazione dei teoremi del n. 2 nel caso generale, ricordiamo che, se A è un'algebra dotata di modulo di ordine n, somma diretta di due algebre $A^{(1)}$, $A^{(2)}$ di ordini n_1, n_2, cioè:

$$A = A^{(1)} \dot{+} A^{(2)} \qquad (n = n_1 + n_2)\,,$$

detti S_n, $S_{n_1}^{(1)}$, $S_{n_2}^{(2)}$, gli spazi ove si rappresentano gli ipercomplessi di A, $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, e V, $V^{(1)}$, $V^{(2)}$, le varietà dei divisori dello zero [5], di A, $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, risp., risulta:

$$V = V^{(1)} \times S_{n_2}^{(2)} + V^{(2)} \times S_{n_1}^{(1)}, \tag{21}$$

nella quale l'operazione di prodotto topologico, indicata con il simbolo $\times$, si intende geometricamente realizzata considerando il luogo degli S_{n_h}, paralleli ad $S_{n_h}^{(h)}$ nei punti di $V^{(k)}$ $(h \neq k;\ h, k = 1, 2)$.

La varietà dei divisori dello zero di A è dunque costituita da due varietà distinte per l'origine [6]).

Nel caso particolare dell'algebra $C_3 = C_2^{(1)} \dotplus C_2^{(2)}$, la (21) esprime un risultato già ottenuto al n. 3.

Stabiliamo ora il teorema I del n. 2. A tale scopo procediamo per induzione tra $n-1$ ed n, tenendo presente che, nel caso $n = 3$, il teorema è già stato dimostrato (n. 4).

Ogni ipercomplesso x di C_n può porsi ovviamente nella forma:

$$x = \alpha_1 + \alpha_2 i_n \tag{22}$$

con α_1, α_2 ipercomplessi di C_{n-1}.

Indicate con $C_2^{(h)}$ $(h = 1, \ldots, 2^{n-3})$ le 2^{n-3} algebre dei quaternioni, che, per ipotesi, sono le componenti irriducibili di C_{n-1}, dalla relazione:

$$C_{n-1} = C_2^{(1)} \dotplus \ldots \dotplus C_2^{(2^{n-3})}, \tag{23}$$

seguono le:

$$\alpha_r = \sum_{1}^{2^{n-3}}{}_h\, \alpha_r^{(h)} \qquad (r = 1, 2) \tag{24}$$

con $\alpha_r^{(h)}$ in $C_2^{(h)}$.

---

5) Per semplicità tra i divisori dello zero intenderemo incluso anche lo zero.

6) Ved. p. es. G. B. RIZZA [2], p. 138-9 dove la (21) è stabilita per le algebre complesse, dotate di modulo e commutative. Il risultato più generale che qui occorre, si ottiene con identico ragionamento.

La (22) diviene allora:

$$x = \sum_{h=1}^{2^{n-3}} [\alpha_1^{(h)} + \alpha_2^{(h)} i_n] . \tag{25}$$

Notiamo ora che ciascuno degli ipercomplessi:

$$\alpha_1^{(h)} + \alpha_2^{(h)} i_n \qquad (h = 1, \ldots, 2^{n-3}) \tag{26}$$

appartiene ad un'algebra isomorfa a C_3, che indicheremo con $C_3^{(h)}$, dove l'unità i_n fa le veci della i_3 di cui al n. 3.

Ciò posto, poichè dalla (23) risulta:

$$C_2^{(h)} \cdot C_2^{(k)} = C_2^{(k)} \cdot C_2^{(h)} = 0 \qquad (h \neq k;\ h, k = 1, \ldots, 2^{n-3}) ,$$

si ha anche:

$$C_3^{(h)} \cdot C_3^{(k)} = C_3^{(k)} \cdot C_3^{(h)} = 0 \qquad (h \neq k;\ h, k = 1, \ldots, 2^{n-3}) .$$

Da questa e dalla (25) segue:

$$C_n = C_3^{(1)} \dotplus \ldots \dotplus C_3^{(2^{n-3})}. \tag{27}$$

Infine, indicate con $'C_2^{(h)}$, $''C_2^{(h)}$ le componenti quaternione di $C_3^{(h)}$, si ottiene:

$$C_n = {'C_2^{(1)}} \dotplus {''C_2^{(1)}} \dotplus \ldots \dotplus {'C_2^{(2^{n-3})}} \dotplus {''C_2^{(2^{n-3})}} , \tag{28}$$

che prova l'asserto.

Riesce così dimostrato il teorema generale I enunciato al n. 2.

Il teorema generale II segue poi subito tenuto conto della (21).

BIBLIOGRAFIA

[1] G. B. RIZZA, *Sulle funzioni analitiche nelle algebre ipercomplesse*, Comm. Pont. Ac. Sci., 14, (1950), p. 169.

[2] — — *Contributi alla determinazione di una formula integrale per le funzioni monogene nelle algebre dotate di modulo e commutative*, Rend. di Mat. e Appl. Roma, 5, 11, 1-2 (1952), p. 134.

[3] G. SCORZA, *Corpi numerici e algebre*, (Principato, Messina, 1921).