RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ALDO BRESSAN

Sull'integrabilità del problema di De Saint Venant nei solidi cristallini

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 23 (1954), p. 435-448

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1954__23__435_0>

SULL' INTEGRABILITÀ DEL PROBLEMA DI DE SAINT VENANT NEI SOLIDI CRISTALLINI

Nota (*) *di* ALDO BRESSAN (*a Padova*)

Nella memoria di G. GRIOLI « Sul problema di De Saint Venant nei solidi cristallini »[1]), si considerano, fra l'altro, quelli dotati di tre piani di simmetria cristallografica, pei quali sono nulle certe dieci costanti di elasticità e, basandosi su una proprietà di minimo di un certo funzionale, si determina un procedimento d'integrazione del problema, che fornisce gli sforzi.

In questa nota dimostro che se si abbandona l'ipotesi suddetta e si considera un solido cilindrico omogeneo cristallino del tutto generico, il problema di De Saint Venant porta ad un sistema di equazioni incompatibili.

Se però le caratteristiche cristalline, la forma della sezione e la sollecitazione agente soddisfano a particolari condizioni, tale incompatibilità non si presenta.

In questa nota determino appunto i casi eccezionali di compatibilità, e osservo che in uno di essi la soluzione può ottenersi applicando ancora il metodo citato mentre negli altri essa si presenta in forma più semplice e di più facile determinazione.

(*) Pervenuta in Redazione il 7 Giugno 1954.

1) G. GRIOLI, *Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova*, Anno XXI, N. 2.

1. Premesse generali.

Sia C un solido elastico cilindrico omogeneo, di altezza h riferito alla sua terna centrale d'inerzia (o, x_1, x_2, x_3) di cui l'asse x_3 sia parallelo alle generatrici. Indico con X_{rs} $(r, s = 1, 2, 3)$ le caratteristiche di tensione, con R_r e $M_r (r = 1, 2, 3)$ le componenti secondo gli assi, del risultante e del momento risultante rispetto ad O delle forze esterne agenti sulla base $x_3 = h$, con $n_1, n_2, n_3 = 0$ i coseni direttori della normale interna alla superficie laterale σ di C e uso il soprassegno per indicare il valore medio in una sezione normale A, del cilindro C, di una funzione di x_1, x_2.

Posto

$$(1) \qquad \rho_i^2 = \frac{1}{A}\int x_i^2 dA, \quad (i=1, 2);$$

$$R_i^* = \frac{R_i}{\rho_i^2 A}; \quad X_r = X_{rr}; \quad X_{r+3} = X_{r+2, r+1},$$

la soluzione del problema di De Saint Venant, tenuto conto del particolare sistema cartesiano di riferimento è rappresentata [1]) dalle caratteristiche $X_1, X_2, ..., X_6$ per cui è

$$(2) \qquad X_1 = X_2 = X_6 = 0 \qquad \text{in } C$$

$$(3) \qquad X_3 = X_3'(x_1, x_2) \cdot x_3 + X_3''(x_1, x_2) \qquad \text{in } C$$

$$(4) \qquad X_3' = -(R_1^* x_1 + R_2^* x_2) \qquad \text{in } C$$

$$(5) \qquad \frac{\partial X_5}{\partial x_1} + \frac{\partial X_4}{\partial x_2} + X_3' = 0 \qquad \text{in } C$$

$$(6) \qquad X_5 n_1 + X_4 n_2 = 0 \qquad \text{in } \sigma$$

e posto

$$(7) \qquad F_r = m_{r3} X_3'' + m_{r4} X_4 + m_{r5} X_5 \qquad (r = 1, 2, ..., 6)$$

sono soddisfatte le equazioni:

$$(8) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 F_3}{\partial x_2^2} = -m_{43} R_2^* \quad ; \quad \dfrac{\partial^2 F_3}{\partial x_1^2} = -m_{53} R_1^* \\[2ex] \dfrac{\partial^2 F_3}{\partial x_1 \partial x_2} = -\dfrac{1}{2}(m_{43} R_1^* + m_{53} R_2^*) \end{cases}$$

---

[1]) G. Grioli. Loco citato.

e

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 F_1}{\partial x_2^2}+\dfrac{\partial^2 F_2}{\partial x_1^2}-\dfrac{\partial^2 F^6}{\partial x_1 \partial x_2}=0 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1}\left[\dfrac{\partial F_5}{\partial x_2}-\dfrac{\partial F_4}{\partial x_1}\right]=-2m_{13}R_2^*+m_{63}R_1^* \\ \dfrac{\partial}{\partial x_2}\left[\dfrac{\partial F_5}{\partial x_2}-\dfrac{\partial F_4}{\partial x_1}\right]=2m_{23}R_1^*-m_{63}R_2^* \end{cases}$$

che traducono le condizioni di congruenza di De Saint Venant; le X_4, X_5 non dipendono da x_3; e inoltre valgono le relazioni integrali:

$$(10)\qquad \overline{X_{r3}}=-\frac{R_r}{A}\ (r=1,\ 2)\quad ;\quad \overline{X_3''}=-\frac{R_3}{A}$$

$$(11)\qquad \overline{x_2X_{33}}=-\frac{M_1}{A}\quad ;\quad \overline{x_1X_{33}''}=\frac{M_2}{A}$$

$$(12)\qquad \overline{x_1X_{23}}-\overline{x_2X_{13}}=-\frac{M_3}{A}.$$

I^* sia l'insieme delle coppie di funzioni X_4, X_5 soddisfacenti le equazioni: (5), (6), (10), (12).

Poichè le (8) determinano F_3 a meno di un polinomio di primo grado, il problema è risolto appena si sia determinata la (X_4, X_5) appartenente a I^* e soddisfacente alla (9,1) in quanto X_3' è nota e X_3'' si esprime, per (7), mediante F_3, X_4, X_5.

2. Un'integrazione sulle ultime due equazioni di congruenza.

Integrando le (8) si ha:

$$(13)\qquad F_3=-\frac{m_{34}}{2}R_2^*x_2^2-\frac{m_{53}}{2}R_1^*x_1^2-$$
$$-\frac{1}{2}\left[m_{43}R_1^*+m_{53}R_2^*\right]x_1x_2+ax_1+bx_2+C$$

con a, b, c costanti arbitrarie.

Da (3), (4) e (7) segue

$$X_3 = -(R_1^* x_1 + R_2^* x_2) x_3 + \frac{1}{m_{33}} \{ F_3 - m_{34} X_4 - m_{35} X_5 \}. \tag{14}$$

Per il seguito pongo

$$\mu_{rs} = \frac{m_{rs}}{m_{33}} \quad \text{e} \quad \alpha_{rs} = (m_{rs} - \mu_{3s} m_{rs}) = m_{rs} - \frac{m_{3r}\, m_{3s}}{m_{33}} \tag{15}$$

con

$$\alpha_{rs} = \alpha_{sr}. \tag{16}$$

Per (15) le (7), ricavatane X_3'', divengono

$$F_r = \mu_{r3} F_3 + \alpha_{r4} X_4 + \alpha_{r5} X_5 \qquad (r = 1, 2, \ldots, 6) \tag{17}$$

con F_3 espressa da (13).

Le (9,2), (9,3) divengono di conseguenza

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\alpha_{54}\frac{\partial X_4}{\partial x_2} + \alpha_{55}\frac{\partial X_5}{\partial x_2} - \alpha_{44}\frac{\partial X_4}{\partial x_1} - \alpha_{45}\frac{\partial X_5}{\partial x_1}\right] = \\ &\quad = -\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\mu_{53}\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \mu_{43}\frac{\partial F_3}{\partial x_1}\right] + m_{63} R_1^* - 2 m_{13} R_2^* = \\ &\quad = \left(m_{63} - \frac{\mu_{53}}{2} m_{43}\right) R_1^* - \left(\frac{\mu_{53}}{2} m_{53} + 2 m_{13}\right) R_2^* = \lambda_2 \\ &\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\alpha_{54}\frac{\partial X_4}{\partial x_2} + \alpha_{55}\frac{\partial X_5}{\partial x_2} - \alpha_{44}\frac{\partial X_4}{\partial x_1} - \alpha_{45}\frac{\partial X_5}{\partial x_1}\right] = \\ &\quad = -\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\mu_{53}\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \mu_{43}\frac{\partial F_3}{\partial x_1}\right] + 2 m_{23} R_1^* - m_{63} R^*_2 = \\ &\quad = \left(2 m_{23} - \frac{\mu_{43}}{2} m_{43}\right) R_1^* + \left(\frac{3}{2}\mu_{53} m_{43} - m_{63}\right) R_2^* = \lambda_3 . \end{aligned} \right. \tag{18}$$

Posto

$$\left\{ \begin{aligned} &P_3 = x_2^2 + e_{31} x_1 + e_{32} x_2 + e_{30} \\ &\text{e} \\ &P_4 = x_2^2 + b_{41} x_1^2 + e_{41} x_1 + e_{42} x_2 + e_{40} \end{aligned} \right. \tag{19}$$

(con i coefficienti costanti arbitrarie), le (18) equivalgono a

$$(20)\qquad \alpha_{54}\frac{\partial X_4}{\partial x_2}+\alpha_{55}\frac{\partial X_5}{\partial x_2}-\alpha_{44}\frac{\partial X_4}{\partial x_1}-\alpha_{45}\frac{\partial X_5}{\partial x_1}-\frac{\lambda_2}{2}\frac{\partial P_3}{\partial x_1}-\frac{\lambda_3}{2}\frac{\partial P_4}{\partial x_2}=k\,,$$

con k costante arbitraria e λ_2 e λ_3 lineari omogenei in R_1^* e R_2^*.

3. Incompatibilità nello schema di approssimazione di De Saint Venant per un solido cristallino omogeneo generico.

Tenuto conto del significato delle m_{rs}, si riconosce con facilità essere

$$(21)\qquad \Delta=\begin{vmatrix}\alpha_{44} & \alpha_{45}\\ \alpha_{54} & \alpha_{55}\end{vmatrix}=\frac{\begin{vmatrix}m_{33} & m_{34} & m_{35}\\ m_{43} & m_{44} & m_{45}\\ m_{53} & m_{54} & m_{55}\end{vmatrix}}{m_{33}}>0\,;\quad \alpha_{44}>0\,;\quad \alpha_{55}>0.$$

Posto

$$(22)\qquad f(X_4,\,X_5,\,R_1,\,R_2,\,k,\,x_1,\,x_2)=\alpha_{44}X_4^2+\alpha_{55}X_5^2+2\alpha_{45}X_4X_5+$$
$$+(\lambda_2P_3-2kx_1)X_4-(\lambda_3P_4+k_1x_2)X_5+C(x_1x_2).$$

Ne segue, con procedimento analogo a quello di loco citato a nota [1]), che la condizione di minimo del funzionale

$$(23)\qquad I=\int_A f(X_4,\,X_5,\,R_1,\,R_2,\,k,\,x_1,\,x_2)dA$$

al variare di X_4, X_5, nell'insieme I^*, equivale al sistema — che chiamerò V^* — di tutte le equazioni del problema di De Saint Venant, esclusa la (9,1).

Anzi il carattere definito positivo della parte quadratica della f [vedi (21)] assicura l'unicità della soluzione del sistema V^*.

Ne segue che *il problema di De Saint Venant ha soluzione* [unica e ottenibile con il procedimento esposto in loco citato in nota [1])] *se e solo se la soluzione di V^* soddisfa anche alla* (9,1).

Si constata facilmente che la (9,1), in base a (13), (17), (15) può scriversi

$$\alpha_{14}\frac{\partial^2 X_4}{\partial x_2{}^2}+\alpha_{15}\frac{\partial^2 X_5}{\partial x_2{}^2}+\alpha_{24}\frac{\partial^2 X_4}{\partial x_1{}^2}+\alpha_{25}\frac{\partial^2 X_5}{\partial x_1{}^2}-\tag{24}$$

$$-\alpha_{64}\frac{\partial^2 X_4}{\partial x_1\partial x_2}-\alpha_{65}\frac{\partial^2 X_5}{\partial x_1\partial x_2}+K^*=0$$

con

$$K^*=-\mu_{13}m_{43}R_2{}^*-\mu_{23}m_{53}R_1{}^*+\frac{\mu_{63}}{2}[m_{43}R_1{}^*+m_{53}R_2{}^*],\tag{25}$$

basta pensare alle espressioni delle α_{rs} per riconoscere che in (24) figurano essenzialmente le $m_{ij}(i=1,\ 2,\ 6;\ j=4,\ 5)$, che non intervengono nelle equazioni di V^*. In generale la (24) non può considerarsi come conseguenza di tali equazioni. Si deduce quindi: *Per un cilindro cristallino del tutto generale lo schema di approssimazione di De Saint Venant porta ad un problema analitico incompatibile.*

4. Casi eccezionali di compatibilità nel problema di De Saint Venant.

Constatato che per un sistema cristallino del tutto generale lo schema di approssimazione di De Saint Venant porta ad un sistema di equazioni incompatibile, mi propongo di determinare in quali casi eccezionali tale incompatibilità non sussiste.

Osservo che ricavando la $\dfrac{\partial X_4}{\partial x_2}$ dalla (5), e la $\dfrac{\partial X_5}{\partial x_2}$ dalla (20), sostituendo nella (9,1) resa esplicita in base a (13) e (17) e integrando rispetto a x_1, si ottiene:

$$\alpha_{24}\frac{\partial X_4}{\partial x_1}+\left(\frac{\alpha_{15}\alpha_{44}}{\alpha_{55}}-\alpha_{64}\right)\frac{\partial X_4}{\partial x_2}+\alpha_{25}\frac{\partial X_5}{\partial x_1}+\left(2\frac{\alpha_{45}\alpha_{15}}{\alpha_{55}}-\alpha_{65}-\alpha_{14}\right)\frac{\partial X_5}{\partial x_2}=\tag{26}$$

$$=\left\{\left(\frac{\alpha_{45}\alpha_{15}}{\alpha_{55}}-\alpha_{14}\right)R_2{}^*-\frac{\alpha_{15}}{\alpha_{55}}\lambda_3-k^*\right\}x_1+C_1(x_2)$$

che va associata alla (20).

Tuttavia tenendo conto di (5), le (20) e (26) possono scriversi

$$\text{(27)}\qquad \begin{cases} -\alpha_{44}\dfrac{\partial X_4}{\partial x_1}+\alpha_{55}\dfrac{\partial X_5}{\partial x_2}+2\alpha_{45}\dfrac{\partial X_4}{\partial x_2}=\nu_1 x_1+\nu_2 x_2+k_1 \\[2ex] a_{11}\dfrac{\partial X_4}{\partial x_1}-a_{22}\dfrac{\partial X_5}{\partial x_2}+a_{12}\dfrac{\partial X_4}{\partial x_2}=N_1 x_1+\gamma(x_2) \end{cases}$$

con

$$\text{(28)}\qquad \begin{cases} a_{11}=\alpha_{24} \\[1ex] a_{12}=\dfrac{\alpha_{15}\alpha_{44}}{\alpha_{55}}-\alpha_{64}-\alpha_{25} \\[2ex] -a_{22}=\dfrac{2\alpha_{45}\alpha_{15}}{\alpha_{55}}-\alpha_{65}-\alpha_{14} \\[2ex] \nu_1=\lambda_2+\alpha_{45}R_1^* \quad ; \quad \nu_2=\lambda_3+\alpha_{45}R_2^* \quad ; \quad k_1=k+\lambda_3 e_{31}+\lambda_2 e_{41} \\[1ex] N_1=\left(\dfrac{\alpha_{45}\alpha_{15}}{\alpha_{55}}-\alpha_{14}\right)R_2^*-\alpha_{25}R_1^*-\dfrac{\alpha_{15}}{\alpha_{55}}\lambda_3+k^* \\[2ex] \gamma(x_2)=c_1(x_2)-\alpha_{25}R_2^* x_2 \end{cases}$$

dove $\gamma(x_2)$ è funzione arbitraria poichè lo è $c_1(x_2)$.

a) *Primo caso di compatibilità.*

Evidentemente la (27,1) risulta conseguenza della (27,2) se sono soddisfatte le uguaglianze

$$\text{(29)}\qquad \frac{a_{11}}{\alpha_{44}}=\frac{a_{22}}{\alpha_{55}}=-\frac{a_{12}}{2\alpha_{45}}$$

e insieme

$$\text{(30)}\qquad \alpha_{44}[N_1 x_1+\gamma(x_2)]=-\alpha_{24}[\nu_1 x_1+\nu_2 x_2+k_1]$$

da cui

$$\text{(31)}\qquad \begin{cases} \alpha_{44}N_1+\alpha_{24}\nu_1=0 \\[1ex] \gamma(x_2)=-\dfrac{\alpha_{24}}{\alpha_{44}}(\nu_2 x_2+k_1) \end{cases}$$

delle quali solo la prima dà una effettiva condizione [2]) riguardante le m_{rs}, R_1^*, R_2^* mentre la seconda serve per determinare l'arbitraria $\gamma(x_2)$.

Le (29) non sono incompatibili con la condizione $\sum_{r,s=0}^{6} m_{rs} X_r X_s > 0$ per $X_1, X_2, ..., X_6$ non tutte nulle.

Per constatarlo osservo innanzi tutto che le (29) possono scriversi

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{24}\alpha_{55}^2 - (\alpha_{14} + \alpha_{65})\alpha_{44}\alpha_{55} + 2\alpha_{15}\alpha_{45}\alpha_{44} = 0 \\ \alpha_{15}\alpha_{44}^2 - (\alpha_{25} + \alpha_{64})\alpha_{44}\alpha_{55} + 2\alpha_{24}\alpha_{45}\alpha_{55} = 0 \end{array} \right. \tag{32}$$

assumo ad es.

$$m_{33} = m_{44} = m_{55} \quad ; \quad m_{35} = m_{34} < \frac{m_{55}}{3} \tag{33}$$

onde

$$\alpha_{44} = \alpha_{55} > 0. \tag{34}$$

Pongo

$$m_{54} = -\frac{m_{55}}{2} + 3\,\frac{m_{35}}{m_{33}} \cdot \frac{m_{35}}{2}\,. \tag{35}$$

Per (33) e (35) è

$$\alpha_{55} = \frac{m_{33}m_{55} - m_{35}^2}{m_{33}} = -2\,\frac{m_{33}m_{54} - m_{35}^2}{m_{33}} = -2\alpha_{45}\,. \tag{36}$$

Osservo poi che si ha in ogni caso

$$\begin{vmatrix} m_{44} & m_{45} \\ m_{54} & m_{55} \end{vmatrix} > 0$$

e inoltre, come conseguenza di (33), (35), $m_{54} < 0$ mentre, disponendo dei valori di m_{24} e m_{15} è lecito ritenere in particolare $\alpha_{24} = \alpha_{15}$. Ne segue che la (36) implica (32) e quindi le (29)

---

[2]) Si constata, in base a (16) che il primo membro di (31,1) è lineare in R_1^* e R_2^*. Ne segue che in un problema privo di flessione non uniforme la (31, 1) è identicamente soddisfatta.

sono compatibili con l'essere positivi i minori diagonali del discriminante della

$$\sum_{rs=1}^{6} m_{rs} X_r X_s$$

Poichè si è imposto a m_{33} di essere $< \frac{m_{55}}{3}$, l'asserto varrà per continuità anche per valori delle m_{rs} vicini ai precedenti.

b) *Secondo caso di compatibilità.*

Supposte non verificate le (29) e moltiplicando la seconda delle (27) per $-\alpha_{44}$ e la prima per a_{11} e sottraendo; poi la 2ª per α_{55}, la 1ª per $-a_{22}$ e sottraendo; e infine, integrando la prima differenza rispetto a x_1 e la 2ª rispetto a x_2, si ha:

$$(37) \qquad \begin{cases} -D_{12}\dfrac{\partial X_5}{\partial x_2} - D_{13}\dfrac{\partial X_4}{\partial x_2} = P^*(x_1, x_2), \\[2ex] D_{12}\dfrac{\partial X_4}{\partial x_1} - D_{23}\dfrac{\partial X_4}{\partial x_2} = Q^*(x_1, x_2) \end{cases}$$

ove D_{ik} è il minore formato con le colonne i^{ma} e h^{ma} della matrice.

$$(38) \qquad \left\| \begin{matrix} a_{11} & -a_{22} & a_{12} \\ -\alpha_{44} & \alpha_{55} & 2\alpha_{45} \end{matrix} \right\|$$

e

$$(39) \qquad \begin{cases} P^*(x_1, x_2) = \alpha_{44}[N_1 x_1 + \gamma(x_2)] - a_{11}[\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + k_1] \\ Q^*(x_1, x_2) = a_{22}[\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + k_1] + \alpha_{55}[N_1 x_1 + \gamma(x_2)]. \end{cases}$$

Sostituendo in (37,2) a $\frac{\partial X_4}{\partial x_2}$ il valore dato dalla (5) e integrando (37,1) rispetto a x_2 e (37,2), così modificata, rispetto a x_1 si ha

$$(40) \qquad \begin{cases} D_{13}X_4 + D_{12}X_5 = P(x_1, x_2) \\ D_{12}X_4 + D_{23}X_5 = Q(x_1, x_2) \end{cases}$$

ove, posto

$$(41) \qquad \nu_1^* = \nu_1 + \frac{D_{23}R_1^*}{a_{22}} \quad ; \quad \nu_2^* = \nu_2 + \frac{D_{23}R_2^*}{a_{22}} \quad ; \quad \gamma^*(x_2) = \int \gamma(x_2)dx,$$

si ritenga

$$
(42)\quad \begin{cases} P(x_1,\ x_2) = (-\alpha_{44}N_1 + a_{11}\nu_1)x_1x_2 + a_{11}\nu_2\dfrac{x_2^2}{2} - \\ \qquad\qquad - \alpha_{44}\gamma^*(x_2) + a_{11}k_1x_2 + c(x_1) \\ Q(x_1,\ x_2) = (\alpha_{55}N_1 + \alpha_{22}\nu_1^*)\dfrac{x_1^2}{2} + \alpha_{55}\gamma(x_2)\cdot x_1 + \\ \qquad\qquad + a_{22}\nu_2^* x_1x_2 + a_{22}k_1x_1 + d(x_2). \end{cases}
$$

Da (40), tenendo presenti le (10,1) segue

$$
(43)\quad \begin{cases} D_{13}R_2 + D_{12}R_1 = -\displaystyle\int_A P(x_1x_2)dA \\ D_{12}R_2 + D_{23}R_1 = -\displaystyle\int_A Q(x_1,\ x_2)dA \end{cases}
$$

Alle (40) e (43) vanno associate le (12), la (5) e la (6) che può scriversi

$$
(44)\qquad X_4\frac{dx_1}{ds} - X_5\frac{dx_2}{ds} = 0
$$

se $x_1 = x_1(s)$ e $x_2 = x_2(s)$ rappresentano le equazioni parametriche del contorno.

Si supponga

$$
(45)\qquad D_{12} \neq 0\quad ,\quad D = D_{13}D_{23} - D_{12}^2 \neq 0
$$

da (40) segue

$$
(46)\qquad X_4' = \frac{D_{23}P - D_{12}Q}{D}\quad ,\quad X_5 = \frac{D_{13}Q - D_{12}P}{D}.
$$

In base a (46) la (5) diviene

$$
(47)\qquad \frac{\partial}{\partial x_2}(D_{23}P - D_{12}Q) + \frac{\partial}{\partial x_1}(D_{13}Q - D_{12}P) + DX_3' = 0
$$

che posto

$$
(48)\quad \begin{cases} m_1 = DR_1^* + D_{13}(\alpha_{55}N_1 + a_{22}\nu^*) - D_{23}(\alpha_{44}N_1 + a_{11}\nu_1) - D_{12}a_{22}\nu_2^* \\ m_2 = -DR_2^* + D_{13}a_{22}\nu_2^* - D_{23}a_{11}\nu_2 - D_{12}(\alpha_{44}N_1 + a_{11}\nu_1) \\ m_3 = D_{13}\alpha_{55} - D_{23}\alpha_{44} \\ m_0 = (D_{13}a_{22} - D_{23}a_{11})k_1 \end{cases}
$$

può scriversi

$$m_1x_1 + m_2x_2 + m_3\gamma(x_2) - D_{12}\gamma'(x_2) \cdot x_1 - \\ - D_{12}[c'(x_1) + d'(x_2)] + m_0 = 0. \tag{49}$$

Derivando la (49) rispetto a x_1 si ha

$$m_1 - D_{12}[\gamma'x_2) + c''(x_1)] = 0 \tag{50}$$

da cui segue $\gamma'(x_2) = \gamma_0' =$ costante e $c_0''(x_1) = c_0'' =$ costante. Cioè

$$\begin{cases} c(x_1) = c_0'' \dfrac{x_1^2}{2} + c_0'x_1 + c_0 \\ \gamma(x_2) = \gamma_0'x_2 + \gamma_0 \end{cases} \tag{51}$$

ove c_0'' e γ_0' sono legati dalla (50)

Sostituendo ora le (51) nella (49) e derivando rispetto a x_2, si ha

$$m_2 + m_3\gamma_0' - D_{12}d''(x_2) = 0 \tag{52}$$

da cui

$$d''(x_2) = d_0'' = \text{cost.} = \frac{m_2 + m_3\gamma_0'}{D_{12}} \tag{53}$$

cioè

$$d(x_2) = d_0'' \frac{x_2^2}{2} + d_0'x_2 + d_0\,. \tag{54}$$

Sostituendo le (51) e (54) in (49) (che di conseguenza risulta lineare in x_1 e x_2) e annullando i coefficienti di x_1 e x_2 e il termine noto, si ha

$$\begin{cases} m_1 - D_{12}(\gamma_0' + c_0'') \equiv 0 \\ m_2 + m_3\gamma_0' - D_{12}d_0'' \equiv 0 \\ m_3\gamma_0 - D_{12}(c_0' + d_0') + m_0 \equiv 0. \end{cases} \tag{55}$$

la prima delle quali però coincide con la (50).

Per le (51) e (53) le P e Q date da (42) divengono

$$(56)\quad \begin{cases} P(x_1x_2) = c_0'' \dfrac{x_1^2}{2} - (a_{11}\nu_2 + \alpha_{44}\gamma_0') \dfrac{x_2^2}{2} - \\ \quad -(\alpha_{44}N_1 + a_{11}\nu_1)x_1x_2 + c_0'x_1 - (\alpha_{44}\gamma_0 + a_{11}k_1)x_2 - \alpha_{44}\gamma_0^* + c_0 \\ Q(x_1x_2) = (\alpha_{55}N_1 + a_{22}\nu_1^*) \dfrac{x_1^2}{2} + d_0'' \dfrac{x_2^2}{2} + \\ \quad + a_{22}\nu_2^* + \alpha_{55}\gamma_0^1)x_1x_2 + (a_{22}k_1 + \alpha_{55}\gamma_0)x_1 + d_0'x_2 + d_0 . \end{cases}$$

Con tali P e Q le X_4 e X_5 date da (46), con γ_0^* costante arbitraria, soddisfano, oltre le (40), anche la (47) se e solo se le dieci costanti introdotte nella trattazione del problema,

$$(57)\qquad c_0'',\ c_0',\ c_0,\ \gamma_0',\ \gamma_0,\ \gamma_0^*,\ d_0'',\ d_0'\ d_0,\ k_1$$

(K_1 per (48) figurante in m_0), soddisfano le quattro condizioni (50), (52), (55,2), (55,3).

È facile riconoscere che il sistema (40) e (47) equivale a quello delle (5) e (9). Ne segue che si ha un caso di compatibilità e nello stesso tempo la soluzione del problema di De Saint Venant, espressa da (46) e (14), ogni qualvolta le sei costanti rimaste indeterminate in P e Q, le R_1, R_2, M_3 e le m_{rs}, sono tali da soddisfare le (43), la

$$(58)\qquad \int_A (D_{23}P - D_{12}Q)x_1 dA - \int_A (D_{13}Q - D_{12}P)x_2 dA = - M_3 D$$

traducenti rispettivamente le (10,1) e la (12) e inoltre soddisfino la (44) in corrispondenza alla particolare forma della sezione.

Delle 10 costanti (57), le 6 rimaste finora arbitrarie possono determinarsi mediante le due (43), la (58) e le tre (59). Dopo ciò X_4 e X_5 *soddisfano a tutte le equazioni del problema eccetto quella al contorno* (43). *Con una verifica si può allora decidere se il problema è risolubile o no.*

* *

OSSERVAZIONE. - Se nella (44) si assume come incognita la forma della sezione, per determinare tutte le possibili sezioni vanno anche considerate le

$$(59) \qquad \int_A x_i dA = 0 \ [i = 1,\ 2) ; \quad \int_A x_1 x_2 dA = 0$$

che traducono la condizione che gli assi x_1 e x_2 siano centrali d'inerzia per A.

Si riconosce che se è $R_1 \cdot R_2 \neq 0$, le prime due (59) non sono indipendenti. Infatti da (44) segue

$$X_4 \frac{dx_2}{dn} + X_5 \frac{dx_1}{dn} = 0$$

da cui si ha

$$\int_A \left(\frac{\partial X_4}{\partial x_2} + \frac{\partial X_5}{\partial x_1} \right) dA = 0$$

che per (5) e (4) diviene

$$R_1^* \int_A x_1 dA + R_2^* \int_A x_2 dA = 0.$$

c) *Terzo caso di compatibilità.*

Suppongo adesso

$$(60) \qquad D \neq 0 \quad ; \quad D_{12} = 0 \quad ; \quad D_{13} D_{23} \neq 0.$$

Essendo $D_{12} = 0$, e quindi $\frac{\alpha_{44}}{a_{11}} = \frac{\alpha_{55}}{a_{22}}$, la (37,1) equivale la (37,2) e per la (5) anche le (40) sono equivalenti.

Ne viene

$$(61) \qquad D_{13} X_4 = P(x_1,\ x_2)$$

Si tratta di vedere se e quando le X_4 e X_5 dedotte da (61) e (5), tenuto conto della (60), possono verificare, analogamente a quanto si è fatto per il caso precedente le (27,1), (43), (44) e (58).

d) *Quarto caso di compatibilità.*

Supposte non verificate le (29), sia invece, per una particolare eccezionale [3]) scelta delle m_{rs}

$$D = D_{13} D_{23} - D_{12}^2 = 0 \tag{62}$$

Le (40), tenendo presente che non può essere $D_{12} \cdot D_{13} \cdot D_{23} = 0$ senza ricadere nel primo caso, implicano

$$D_{13} Q - D_{12} P \equiv 0. \tag{63}$$

Si constata facilmente che la (66) si può soddisfare particolareggiando gli elementi arbitrari contenuti in P e Q e non i dati strutturali nelle R_1^*, R_2^*. Anzi si riconosce che nella espressione di P rimangono in definitiva quattro costanti arbitrarie.

Da (40,1) segue

$$X_4 = \frac{P(x_1, x_2) - D_{12} X_5}{D_{13}} \tag{64}$$

che introdotta nella (5) dà

$$D_{13} \frac{\partial X_5}{\partial x_1} - D_{12} \frac{\partial X_5}{\partial x_2} + D_{13} X_3' + \frac{\partial P}{\partial x_2} = 0 \,. \tag{65}$$

La soluzione del problema di De Saint Venant nell'ipotesi (60) è rappresentata dalle (14) e da quella coppia (X_4, X_5) soddisfacente (76), (77) e alle (43), (44), (58), tenuto conto dell'espressione di P, ottenuta conseguentemente al soddisfacimento della (69) e dipendente da quattro costanti arbitrarie.

---

[3]) Si tenga presente che, in base a (15), (28), il valore di D [come pure il verificarsi delle (29) e (45)] dipende esclusivamente dai valori delle m_{rs}