FABIO MANARESI

Un problema di autovalori

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 23 (1954), p. 343-351

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1954__23__343_0>

UN PROBLEMA DI AUTOVALORI

Memoria (*) *di* FABIO MANARESI (*a Bologna*)

1. - Scopo della presente Memoria è lo studio di un problema di autovalori che comprende due casi particolari trattati l'uno da M. SALVADORI [1]) e l'altro dallo scrivente [2]).

Si consideri l'equazione differenziale lineare omogenea del quart'ordine alle derivate parziali

$$(1) \qquad (\vartheta u_{xy} - \lambda\sigma u)_{xy} - (r u_x + s u_y - \lambda\alpha u)_x -$$
$$- (t u_y + s u_x - \lambda\beta u)_y - \lambda(\sigma u_{xy} + \alpha u_x + \beta u_y + q u) + p u = 0$$

ove:

$\vartheta(x, y)$ è una funzione continua insieme con le derivate parziali prime e seconda mista e positiva in ogni punto di un dominio rettangolare $R \equiv (a_1 \leq x \leq a_2\,,\ b_1 \leq y \leq b_2)$ del piano x, y,

$r(x, y)$, $t(x, y)$, $s(x, y)$ sono funzioni continue in R insieme con la derivata parziale rispetto ad x la prima e rispetto ad y la seconda, con entrambe le derivate parziali prime la terza e tali inoltre che, in ogni punto di R, risulti:

$$r \geq 0, \quad t \geq 0, \quad \begin{vmatrix} r & s \\ s & t \end{vmatrix} \geq 0,$$

(*) Pervenuta in Redazione il 31 maggio 1954.

[1]) M. SALVADORI, *Ricerche variazionali per gli integrali doppi in forma non parametrica*, « Annali della Scuola Normale sup. di Pisa » (Scienze Fis. e Mat.), serie II, vol. V, pp. 51-59 (1936).

[2]) F. MANARESI, *Applicazione di un procedimento variazionale allo studio di una equazione differenziale alle derivate parziali con caratteristiche reali doppie*, « Rend. del Sem. Mat. dell'Università di Padova », vol. XXIII, pp. 163-213 (1954).

$\alpha(x, y)$, $\beta(x, y)$, $\sigma(x, y)$ sono funzioni continue in R insieme con la derivata parziale rispetto ad x la prima e rispetto ad y la seconda, con le derivate parziali prime e seconda mista la terza,

$p(x, y)$, $q(x, y)$ sono funzioni continue in R, delle quali la prima non negativa in ogni punto di R,

λ è un parametro complesso.

Si vuol vedere se esistono valori del parametro λ (autovalori) per cui la (1) ammette una soluzione (autosoluzione o autofunzione) che sia:

A) non identicamente nulla e continua in R insieme con le derivate parziali prime, seconde, terze miste e quarta rispetto ad x, y, x, y,

B) nulla su FR.

Se le funzioni $r(x, y)$, $s(x, y)$, $t(x, y)$, $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y)$, $p(x, y)$ sono identicamente nulle in R, l'esistenza di almeno un autovalore è stata dimostrata da M. SALVADORI con un ragionamento che è una estensione di quello adottato da D. MANGERON [3]) e che si basa sostanzialmente sulla cosiddetta funzione di GREEN.

Il proposto problema di autovalori, con $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y)$, $\sigma(x, y)$ identicamente nulle in R, è stato completamente trattato mediante un procedimento di carattere variazionale che prescinde dalla conoscenza della funzione di GREEN nella Memoria di cui alla nota [2]).

Si mostrerà che il procedimento variazionale suddetto, con talune modificazioni, consente di ottenere il seguente risultato:

I. - *Indicata con* Γ *la classe delle funzioni* $u(x, y)$ *continue in* R *insieme con le derivate parziali prime e seconda*

---

[3]) D. MANGERON, *Sopra un problema al contorno per un'equazione differenziale alle derivate parziali di quart'ordine con le caratteristiche reali doppie*, « Rend. dell'Acc. delle Sc. Fis. e Mat. di Napoli », serie IV, vol. II, pp. 29-40 (1932).

mista e nulle su FR, se il funzionale

$$\iint_R (2\sigma u_{xy} + 2\alpha u_x + 2\beta u_y + qu)u\,dxdy \tag{2}$$

assume in Γ valori di segno opposto, per l'equazione differenziale (1) *esistono una successione non decrescente di autovalori positivi e una successione non crescente di autovalori negativi. Se invece il funzionale* (2) *assume in Γ soltanto valori non negativi, o non positivi, esiste una successione non decrescente di autovalori positivi* (*mentre non vi sono autovalori negativi*), *o corrispondentemente, una successione non crescente di autovalori negativi* (*mentre non vi sono autovalori* positivi).

Seguirà un accenno alle principali proprietà degli autovalori e delle autosoluzioni. Si avverte che gli articoli della Memoria di cui alla nota [2]) citati nel seguito verranno indicati coi rispettivi numeri seguiti dalla lettera M.

2. - Ragionando come nel n. 9 M si trae anzitutto che:

I. *Gli autovalori non possono essere che reali e diversi da zero.*

II. *Se λ' è un autovalore e $u'(x, y)$ è un'autofunzione corrispondente, risulta*:

$$\lambda' \iint_R (2\sigma u'_{xy} + 2\alpha u'_x + 2\beta u'_y + qu')u'\,dxdy > 0$$

Da II segue immediatamente che:

III. *Se l'integrale* (2) *assume in Γ soltanto valori non negativi, o non positivi, non esistono autovalori negativi, o corrispondentemente positivi.*

In secondo luogo, indicato, per ogni funzione $u(x, y)$ continua in R insieme con le derivate parziali prime, seconde, terze miste e quarta rispetto ad x, y, x, y, con Lu il primo membro della (1) e procedendo come al n. 1 M a partire dall'identità

$$uLv - vLu = [u\vartheta v_{xy} - v\vartheta u_{xy}]_{xy} - [u_y(\vartheta v_{xy}) - v_y(\vartheta u_{xy})]_x -$$

$$- [u_x(\vartheta v_{xy}) - v_x(\vartheta u_{xy})]_y - [u(rv_x + sv_y) - v(ru_x + su_y)]_x -$$
$$- [u(tv_y + sv_x) - v(tu_y + su_x)]_y - \lambda \{ [u(\sigma v)_y - v(\sigma u)_y]_x +$$
$$+ [(\sigma u)v_x - (\sigma v)u_x]_y \}$$

si riconosce che:

IV. *Per ogni fissato valore del parametro* λ, *le soluzioni della* (1) *verificanti le condizioni* A) *e* B) *del n.* 1 *sono tutte e sole le soluzioni continue in* R *dell'equazione integrale*:

$$u(x, y) = \frac{1}{\vartheta(x, y)} \sum_{1}^{2}{}_{hk} (-1)^{h+k} \frac{(x - a_{3-h})(y - b_{3-k})}{(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)} \Big\{ \int_x^{a_k} [t(\xi, y)(\xi - a_h) -$$
$$- \vartheta_\xi(\xi, y)]u(\xi, y)d\xi + \int_y^{b_k} [r(x, \eta)(\eta - b_k) - \vartheta_\eta(x, \eta)]u(x, \eta)d\eta +$$
$$(3) \quad + \int_x^{a_k}\int_y^{b_k} [2s - \vartheta_{\xi\eta} + (s_\xi + t_\eta)(\xi - a_h) + (s_\eta + r_\xi)(\eta - b_k) -$$
$$- p(\xi - a_h)(\eta - b_k)]ud\xi d\eta + \lambda \int_x^{a_k}\int_y^{b_k} [\sigma + \sigma_\xi(\xi - a_h) + \sigma_\eta(\eta - b_k) +$$
$$+ (\sigma_{\xi\eta} - \alpha_\xi - \beta_\eta + q)(\xi - a_h)(\eta - b_k)]ud\xi d\eta \Big\}.$$

Si noti che, nell'ipotesi che le funzioni $r(x, y)$, $s(x, y)$, $t(x, y)$ siano identicamente nulle in R, nella (1) si può prescindere dalla considerazione delle derivate u_{xx}, u_{yy}, purchè venga in parte rispettato l'ordine di derivazione per le derivate parziali di ordine superiore al secondo: in tal caso peraltro si potrebbe essere indotti a sostituire la condizione A) del n. 1 con l'altra, meno restrittiva, che la $u(x, y)$ sia non identicamente nulla e continua in R insieme con le derivate parziali prime, seconda mista, terze u_{xyx}, u_{xyy} e quarta u_{xyxy}. Ma una tale sostituzione è del tutto inutile giacchè, con lo stesso ragionamento adottato nel n. 1 M, si trae che ogni soluzione $u(x, y)$, verificante la condizione menzionata poco fa e la B) del n. 1, dell'equazione (1) (con $r(x, y) \equiv s(x, y) \equiv t(x, y) \equiv 0$) è necessariamente dotata anche di derivate parziali u_{xx}, u_{yy} continue in ogni punto di R.

Ciò premesso, per dimostrare 1 I, si consideri, nell'ipotesi che l'integrale (2) assuma in Γ valori di segno opposto, il funzionale

$$(4)\qquad I[u]=\iint_R [\vartheta(u_{xy})^2+r(u_x)^2+2su_xu_y+t(u_y)^2+pu^2]dxdy$$

nella classe Γ_0 delle funzioni $u(x, y)$ di Γ verificanti la condizione:

$$(5)\qquad \iint_R (2\sigma u_{xy}+2\alpha u_x+2\beta u_y+qu)udxdy=1.$$

Indicato con λ_0 l'estremo inferiore del funzionale (4) in Γ_0, onde sarà, per la (5) e 7 I M, $\lambda_0>0$, per tutte le $u(x, y)$ di Γ_0 riuscirà:

$$(6)\qquad \iint_R [\vartheta(u_{xy})^2+r(u_x)^2+2su_xu_y+t(u_y)^2+pu^2-$$
$$-\lambda_0(2\sigma u_{xy}+2\alpha u_x+2\beta u_y+qu)u]dxdy\geq 0.$$

Si osservi ora che la (6) vale anche per le $u(x, y)$ di Γ che non verificano la (5): questa circostanza risulta evidente se l'integrale (2) è negativo o nullo, mentre, se detto integrale è positivo e diverso da uno, consegue dal fatto che la (6) sussiste per $cu(x, y)$, con

$$c=\frac{1}{\pm\iint_R (2\sigma u_{xy}+2\alpha u_x+2\beta u_y+qu)udxdy}$$

Pertanto il primo membro di (6) è un funzionale dotato di estremo inferiore nullo nella classe $\Gamma\supset\Gamma_0$.

Si consideri poi una successione $u_{01}, u_{02}, \ldots, u_{0\nu}, \ldots$, minimizzante in Γ_0 per il funzionale (4) e uniformemente convergente in R, (l'esistenza di una successione così fatta risulta dai nn. 4 M e 8 M) sicchè la relativa funzione limite $u_0(x, y)$ sarà continua in R e nulla su FR. Evidentemente la predetta successione è pure minimizzante in Γ per il funzionale a primo membro di (6) e quindi, relativamente a questo funzionale nella classe F, continueranno a sussistere 5 I M, con

$$\lim_{\nu\to\infty}\iint\limits_R \Big\{ \vartheta \frac{\partial^2 u_{0\nu}}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} + r\frac{\partial u_{0\nu}}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + s\left(\frac{\partial u_{0\nu}}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial u_{0\nu}}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) +$$

$$+ t\frac{\partial u_{0\nu}}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + pu_{0\nu}\varphi - \lambda_0\left[\sigma\left(\frac{\partial^2 u_{0\nu}}{\partial x\partial y}\varphi + u_{0\nu}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\right) +\right.$$

$$\left. + \alpha\left(\frac{\partial u_{0\nu}}{\partial x}\varphi + u_{0\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \beta\left(\frac{\partial u_{0\nu}}{\partial y}\varphi + u_{0\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + qu_{0\nu}\varphi\right]\Big\} dxdy = 0$$

in luogo della (15) M, e 5 III M, con la

$$(7)\qquad \iint\limits_R \Big\{ (\vartheta\varphi_{xy})_{xy} - (r\varphi_x)_x - (s\varphi_y)_x - (s\varphi_x)_y - (t\varphi_y)_y + p\varphi -$$

$$-\lambda_0[(\sigma\varphi)_{xy} + \sigma\varphi_{xy} + (\alpha\varphi)_x + \alpha\varphi_x + (\beta\varphi)_y + \beta\varphi_y + q\varphi]\Big\} u_0 dxdy = 0$$

in sostituzione della (17) M, imponendo alla $\varphi(x, y)$ le ulteriori condizioni stabilite nel n. 8 M.

Resteranno pertanto validi anche i ragionamenti del n. 6 M con le $\varphi_m(\xi, \eta)$ definite nella stessa maniera, onde si riconosce che la $u_0(x, y)$ soddisfa in R alla (3) con $\lambda = \lambda_0$ e quindi, per IV, è dotata di derivate parziali prime, seconde, terze miste e quarta rispetto ad x, y, x, y continue in R ed è ivi soluzione della (1) con $\lambda = \lambda_0$. Di più, la $u_0(x, y)$ non è identicamente nulla in R, come risulta subito dalla (5) e dalla seguente uguaglianza

$$(8)\qquad \begin{aligned} &\lim_{\nu\to\infty}\iint\limits_R [2\sigma(u_{0\nu})_{xy} + 2\alpha(u_{0\nu})_x + 2\beta(u_{0\nu})_y + qu_{0\nu}]u_{0\nu}dxdy = \\ &= \lim_{\nu\to\infty}\iint\limits_R [2\sigma(u_{0\nu})_{xy} + 2\alpha(u_{0\nu})_x + 2\beta(u_{0\nu})_y + qu_{0\nu}]u_0 dxdy \end{aligned}$$

che ora si dimostrerà.

Si ha infatti:

$$\left|\iint\limits_R [2\sigma(u_{0\nu})_{xy} + 2\alpha(u_{0\nu})_x + 2\beta(u_{0\nu})_y + qu_{0\nu}](u_{0\nu} - u_0)dxdy\right| \leq$$

$$\leq 2\left|\iint_R \sigma(u_{0\nu})_{xy}(u_{0\nu}-u_0)dxdy\right| + 2\left|\iint_R \alpha(u_{0\nu})_x(u_{0\nu}-u_0)dxdy\right| +$$

$$+ 2\left|\iint_R \beta(u_{0\nu})_y(u_{0\nu}-u_0)dxdy\right| + \left|\iint_R qu_{0\nu}(u_{0\nu}-u_0)dxdy\right|.$$

D'altra parte, poichè $\lim\limits_{\nu\to\infty} u_{0\nu} = u_0$ uniformemente in R e $\lim\limits_{\nu\to\infty} I[u_{0\nu}] = \lambda_0$, vi saranno due numeri positivi H e K tali che, per tutti i numeri naturali ν, risulti:

$$|u_{0\nu}(x, y)| \leq H \text{ qualunque sia il punto } x, y \text{ di } R,$$
$$0 < I[u_{0\nu}] \leq K$$

Inoltre, ad ogni numero positivo ε si potrà associare un indice ν_ε (indipendente da x, y) tale che, per tutti i $\nu > \nu_\varepsilon$, sia

$$|u_{0\nu} - u_0| < \varepsilon \text{ qualunque sia il punto } x, y \text{ di } R$$

sicchè, per ogni $\nu > \nu_\varepsilon$, riuscirà pure:

$$\left|\iint_R \sigma(u_{0\nu})_{xy}(u_{0\nu}-u_0)dxdy\right| < \varepsilon \max|\sigma| \iint_R |(u_{0\nu})_{xy}|\, dxdy \leq$$

$$\leq \varepsilon \max|\sigma| \sqrt{\iint_R [(u_{0\nu})_{xy}]^2 dxdy \operatorname{mis} R} \leq \varepsilon \max|\sigma| \sqrt{\frac{K \operatorname{mis} R}{\min \vartheta}}$$

$$\left|\iint_R \alpha(u_{0\nu})_x(u_{0\nu}-u_0)dxdy\right| = \left|\iint_R \left\{(u_{0\nu})_{xy}\int_{b_1}^{y} \alpha(u_{0\nu}-u_0)dy\right\} dxdy\right| <$$

$$< \varepsilon \max|\alpha|(b_2-b_1)\iint_R |(u_{0\nu})_{xy}|\, dxdy \leq \varepsilon \max|\alpha|(b_2-b_1)\sqrt{\frac{K \operatorname{mis} R}{\min \vartheta}}$$

$$\left|\iint_R \beta(u_{0\nu})_y\, u_{0\nu}-u_0)dxdy\right| < \varepsilon \max|\beta|(a_2-a_1)\sqrt{\frac{K \operatorname{mis} R}{\min \vartheta}}$$

$$\left|\iint_R qu_{0\nu}(u_{0\nu}-u_0)dxdy\right| < \varepsilon \max|q|\, H \operatorname{mis} R$$

e ciò prova la (8).

Pertanto λ_0 è un autovalore positivo: da II consegue allora che l'integrale (2) sarà positivo per $u = u_0$, sicchè si potrà sempre determinare la costante c in modo che per $u = cu_0$ il detto funzionale assuma il valore uno.

Si consideri ora $I[u]$ nella classe $\Gamma_1 \subset \Gamma_0$ delle $u(x, y)$ di Γ verificanti la (5) e la ulteriore condizione

$$\iint_R [2\sigma(u_0)_{xy} + 2\alpha(u_0)_x + 2\beta(u_0)_y + qu_0]u dx dy = 0. \tag{9}$$

Indicato con λ_1 l'estremo inferiore di $I[u]$ in Γ_1, talchè sarà $\lambda_1 \geq \lambda_0$, per ogni $u(x, y)$ di Γ_1 vale la (6) con λ_1 in luogo di λ_0 e, ragionando come in precedenza, si riconosce che il funzionale a primo membro della (6), con λ_1 al posto di λ_0, è dotato di estremo inferiore nullo nella classe $\Gamma'_1 \supset \Gamma_1$ delle $u(x, y)$ di Γ verificanti la (9).

Si consideri poi una successione $u_{11}, u_{12}, \ldots, u_{1\nu}, \ldots$ minimizzante in Γ_1 per $I[u]$ e uniformemente convergente in R, sicchè la relativa funzione limite $u_1(x, y)$ sarà continua in R, nulla su FR, e soddisferà alla (9): evidentemente la predetta successione è altresì minimizzante in Γ'_1 per il funzionale al primo membro di (6), con λ_1 in luogo di λ_0, e pertanto, relativamente a codesto funzionale nella classe Γ'_1, continuerà a sussistere 5 III M, ove si consideri, invece della (17) M, la (7) con λ_1 e $u_1(x, y)$ al posto di λ_0 e $u_0(x, y)$ rispettivamente, e si aggiunga l'ipotesi che la $\varphi(x, y)$ verifichi inoltre le condizioni stabilite al n. 8 M e la (9), giacchè nei ragionamenti del n. 5 M si richiede che, per ogni numero naturale ν, la $u_{1\nu} + \tau\varphi$ (essendo τ un numero positivo arbitrario) appartenga alla classe Γ'_1.

Procedendo poi come al n. 6 M, ove si usino, in luogo delle $\varphi_m(\xi, \eta)$ colà definite, le $\varphi_m - \mu_{0m}u_0$, con μ_{0m} costante da determinarsi in modo che tali funzioni verifichino la (9), si riconosce che la $u_1(x, y)$ è dotata di derivate parziali prime, seconde, terze miste e quarta rispetto ad x, y, x, y continue in R ed è ivi soluzione della (1) con $\lambda = \lambda_1$.

Col medesimo ragionamento adottato per la $u_0(x, y)$, si deduce che la $u_1(x, y)$ non è identicamente nulla in R e che pertanto λ_1 è un autovalore positivo non inferiore a λ_0.

L'esistenza di una successione non decrescente di autovalori positivi si dimostra per induzione.

Si consideri ora il funzionale $I[u]$ nella classe Γ_{-0} delle $u(x, y)$ di Γ verificanti la

$$(10) \qquad \iint_R (2\sigma u_{xy} + 2\alpha u_x + 2\beta u_y + qu)u\,dx\,dy = -1.$$

Denotato con $-\lambda_{-0}$ ($\lambda_{-0} < 0$) l'estremo inferiore di $I[u]$ in Γ_{-0} e procedendo come nel caso di Γ_0, si riconosce che λ_{-0} è un autovalore negativo.

Se poi $-\lambda_{-1} \geq -\lambda_{-0}$ è l'estremo inferiore di $I[u]$ nella classe $\Gamma_{-1} \subset \Gamma_{-0}$ delle $u(x, y)$ di Γ verificanti la (10) e la (9) con u_{-0} in sostituzione di u_0 (essendo $u_{-0}(x, y)$ una autofunzione corrispondente a λ_{-0}) si deduce, ragionando come nel caso di Γ_1, che λ_{-1} è un autovalore negativo non superiore a λ_{-0}.

L'esistenza di una successione non crescente di autovalori negativi si dimostra per induzione.

L'ultima parte dell'enunciato 1 I discende immediatamente dalla precedente dimostrazione tenendo conto di III.

Si noti infine che per gli autovalori e le autosoluzioni sussistono teoremi analoghi a quelli dei nn. 11 M, 12 M e a 13 III M.