# Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova



Giorgio Trevisan


## Su l'equazione differenziale $y''(x) + A(x)y(x) = 0$


*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, tome 23 (1954), p. 340-342

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1954__23__340_0>

# SU L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE $y''(x) + A(x)y(x) = 0$

*Nota* (*) *di* GIORGIO TREVISAN (*a Padova*)

Scopo della presente Nota è di dare una dimostrazione molto semplice di due noti teoremi riguardanti l'equazione $y''(x) + A(x)y(x) = 0$. Il primo dovuto a CACCIOPPOLI [1]) afferma che se $A(x)$ è a variazione limitata in $x_0 \leq x < +\infty$ e compresa tra due numeri positivi allora ogni soluzione dell'equazione è limitata assieme alla sua derivata prima; il secondo dovuto a MILLOUX [2]) stabilisce che se $A(x) \to +\infty$, con $x \to +\infty$, ed è non decrescente, allora almeno una soluzione, non identicamente nulla, tende a zero per $x \to +\infty$.

**1.** - Si consideri l'equazione

$$y'' + \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} y = 0, \tag{1}$$

dove $\alpha(x)$, $\beta(x)$ siano positive per $x \geq x_0$ e non decrescenti. Vale il

LEMMA I: *Se* $y(x)$ *è soluzione della* (1) *la funzione* $\varphi(x) = \dfrac{y^2(x)}{\alpha(x)} + \dfrac{y'^2(x)}{\beta(x)}$ *è non crescente per* $x \geq x_0$.

---

(*) Pervenuta in Redazione il 2 maggio 1954.

1) R. CACCIOPPOLI: *Una questione di stabilità*, Rendiconti Accademia Naz. Lincei, 1930.

2) H. MILLOUX: *Sur l'equation differentielle* $\ddot{x} + A(t)x = 0$, Prace Mathematyczno - Fisyczne, 41, (1934). Per un'altra dimostrazione si veda G. PRODI: *Un'osservazione sugli integrali dell'equazione* $y'' + A(x)y = 0$ *nel caso* $A(x) \to +\infty$ *per* $x \to \infty$, Rend. Acc. Nanz. Lincei, 1950.

Infatti sostituita nella (1) $y(x)$, diviso poi per $\beta(x)$, moltiplicato per $y'(x)$ ed integrato infine tra $x_1$ ed $x_2$ $(x_0 \leq x_1 < x_2)$ si ha:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{y''(x)y'(x)}{\beta(x)}\, dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{y(x)y'(x)}{\alpha(x)}\, dx = 0 .$$

Applicando separatamente ai due integrali il secondo teorema della media segue che:

$$\frac{1}{\beta(x_1)}\left[\frac{y'^2(\xi)}{2} - \frac{y'^2(x_1)}{2}\right] + \frac{1}{\beta(x_2)}\left[\frac{y'^2(x_2)}{2} - \frac{y'^2(\xi)}{2}\right] +$$

$$+ \frac{1}{\alpha(x_1)}\left[\frac{y^2(\eta)}{2} - \frac{y^2(x_1)}{2}\right] + \frac{1}{\alpha(x_2)}\left[\frac{y^2(x_2)}{2} - \frac{y^2(\eta)}{2}\right] = 0 .$$

Quindi tenendo conto che $\dfrac{1}{\beta(x_1)} - \dfrac{1}{\beta(x_2)}$ ed $\dfrac{1}{\alpha(x_1)} - \dfrac{1}{\alpha(x_2)}$ sono non negative perchè $x_1 < x_2$ ed $\alpha(x)$, $\beta(x)$ non decrescenti si trae $\varphi(x_2) - \varphi(x_1) \leq 0$. cdd.

Se ora $A(x)$ è una funzione a variazione limitata, compresa tra numeri fissi positivi, è pure a variazione limitata $\log A(x)$, cioè $\log A(x) = P(x) - N(x)$ con $P(x)$ ed $N(x)$ non decrescenti a limiti finiti per $x \to +\infty$, quindi $A(x) = \dfrac{e^{P(x)}}{e^{N(x)}} = \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}$ con $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ non decrescenti a limiti finiti e poichè dal LEMMA I si ha $|y(x)| \leq \sqrt{\alpha(x)}K^{\frac{1}{2}}\, |y'(x)| \leq \sqrt{\beta(x)}K^{\frac{1}{2}}$, con $K$ costante, ne segue il teorema di CACCIOPPOLI [3]).

**2.** - Se nella (1) $\alpha(x) \equiv 1$ e $\beta(x) \to +\infty$ si ha $\varphi(x) = y^2(x) + \dfrac{y'^2(x)}{\beta(x)}$ e per il LEMMA I $\varphi(x) \to \lambda_y$ con $\lambda_y$ finito e non negativo. Ovviamente $\max\lim y(x) = \lambda_y$ e $\min\lim y(x) = -\lambda_y$. Vale ora il

3) Per una trattazione sistematica di teoremi di questo tipo si veda SANSONE G.: « *Equazioni differenziali nel campo reale* », Vol. II, pag. 23 e seg.

LEMMA II: *Se l'equazione ammette una soluzione $y(x)$ per cui risulti $\lambda_z > 0$, detta $\eta_i$ la successione dei punti di massimo di $y(x)$, per ogni altra soluzione $z(x)$ dell'equazione si ha $|z(\eta_i)| \rightarrow \lambda_z$, dove $\lambda_z$ è il massimo limite di $z(x)$.*

Intanto l'esistenza della successione $\eta_i$ è assicurata dal noto fatto che ogni soluzione, non identicamente nulla, dell'equazione è indefinitamente oscillante attorno all'asse $x$ perchè $A(x) \rightarrow +\infty$.

Nel wronskiano $y'(x)z(x) - z'(x)y(x) = k$, ($k =$ costante), posto $x = \eta_i$ si ha $z'(\eta_i)y(\eta_i) = k$, da cui per essere $\lambda_y \neq 0$ e finito $z'(\eta_i) \rightarrow \dfrac{k}{\lambda_y}$.

Ora per il LEMMA I, $z^2(x) + \dfrac{z'^2(x)}{\beta(x)} \rightarrow \lambda_z^2$ e nei punti $\eta_i$ dato che $\beta(x) \rightarrow +\infty$ e $z'(\eta_i)$ converge risulta $z^2(\eta_i) \rightarrow \lambda_z^2$ cioè la tesi $|z(\eta_i)| \rightarrow \lambda_z$. cdd.

Ecco come si pervenga ora rapidamente al teorema di MILLOUX. Se l'equazione non possedesse soluzioni, non identicamente nulle, asintotiche a zero, scelte due siffatte soluzioni linearmente indipendenti $u(x)$ e $v(x)$, se $\eta_i$ è la successione dei punti di massimo di un'altra soluzione per il LEMMA II si potrà estrarre da $\eta_i$ una successione $\sigma_i$ tale che $u(\sigma_i) \rightarrow p$ e $v(\sigma_i) \rightarrow q$ con $|p| = \lambda_u \neq 0$ e $|q| = \lambda_v \neq 0$. Ma l'integrale non identicamente nullo $w(x) = -qu(x) + pv(x)$, su $\sigma_i$ converge a zero e d'altra parte poichè $|w(\eta_i)| \rightarrow \lambda_w$ ne segue $\lambda_w = 0$ e $w(x) \rightarrow 0$.