HANS HORNICH

Das Problem der linearen Differentialoperatoren

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 23 (1954), p. 333-339

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1954__23__333_0>

DAS PROBLEM DER LINEAREN DIFFERENTIALOPERATOREN

Nota (*) *di* HANS HORNICH (*a Graz*)

Wir beschäftigen uns mit den linearen Differentialoperatoren Lu einer Funktion u in einer oder mehreren Variablen mit *stetigen* Koeffizienten, für welche die Differentialgleichung

$$Lu = f \tag{1}$$

mit j e d e r stetigen Funktion f eine Lösung hat; wir wollen dabei die Frage im kleinen, also für eine Umgebung eines Punktes P behandeln [1]).

Sei also

$$Lu \equiv \Sigma\, g_{i_1 \dots i_n} \frac{\partial^i u}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} \qquad (i = i_1 + \dots + i_n) \tag{2}$$

wobei die Koeffizienten $g_{i_1 \dots i_n}$ stetige Funktionen in einer Umgebung U eines Punktes P $(x^0{}_1 \dots x^0{}_n)$ seien und nur endlichviele $g_{i_1 \dots i_n}$ nicht identisch in U verschwinden. Dann lautet die Frage:

Gibt es eine feste Umgebung $U' \subset U$ von P, so daß für jede in U' stetige Funktion f die Differentialgleichung (1) lösbar ist, d.h. so daß es eine in U' stetige Funktion u gibt, deren Ableitungen $\dfrac{\partial^i u}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}}$ für welche $g_{i_1 \dots i_n}$ nicht identisch

---

(*) Pervenuta in Redazione il 4 giugno 1954.

1) Die hier gezeigten Sätze geben die Lösung unserer Fragestellung in zwei wichtigen Spezialfällen u. z. ohne Differentiationsvoraussetzungen über die Koeffizienten. Die allgemeinen Existenzsätze bei partiellen Differentialgleichungen sind etwa bei D. Bernstein (1950) zusammengefasst

in U' verschwindet, in U' existieren, stetig sind und die Differentialgleichung (1) erfüllen.

Im bejahenden Fall sagen wir kurz, daß (1) für alle f lösbar sei.

Man sieht sofort: Für alle Ableitungen $Lu = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ $(i = 1, \dots n)$ ist (1) für alle f lösbar. Ferner:

Sind $L_1 u = f$ und $L_2 u = f$ für alle f lösbar, so ist auch $L_1 L_2 u = f$, sofern diese Differentialform gebildet werden kann, für alle f lösbar. Wir brauchen ja nur $L_1 v = f$ und sodann $L_2 u = v$ zu lösen.

Andererseits ist $L_1 L_2 u = f$ nicht für alle f lösbar, wenn $L_1 u = f$ nicht für alle f lösbar ist, u.z. gleichgiltig, ob $L_2 u = f$ für alle f lösbar ist oder nicht.

Ein n-Tupel $(j_1, \dots, j_n)$ $(j_k \geq 0$ ganz) heiße ein Nachfolger vom n-Tupel $(i_1, \dots, i_n)$ $(i_k \geq 0$ ganz), wenn diese beiden n-Tupel verschieden sind und für jedes k gilt $i_k \leq j_k$. Ist $\sum_{k=1}^{n} j_k = \sum_{k=1}^{n} i_k + 1$, so sprechen wir von einem Nachfolger 1-ter Ordnung. Übertragen auf die n-Tupel der Indizes sprechen wir dann analog von den $g_{i_1 \dots i_n}$ und deren Nachfolgern.

Dann gilt:

Lu habe folgende Eigenschaft: jedes $g_{i_1 \dots i_n}$, unter dessen n Nachfolgern 1-ter Ordnung wenigstens ein g samt seinen sämtlichen weiteren Nachfolgern in einer Umgebung U von P identisch verschwindet, ist im Punkte P gleich Null. Dann ist $Lu = f$ nicht für alle f lösbar.

Zum Beweise trennen wir in der Summe (2) diejenigen Glieder mit nicht identisch in U verschwindenden $g_{i_1 \dots i_n}$, für welche zu jedem Nachfolger 1-ter Ordnung entweder dieses g oder eines von dessen Nachfolgern nicht identisch in U verschwindet, und diejenigen $g_{i_1 \dots i_n}$, für welche ein Nachfolger 1-ter Ordnung samt allen seinen Nachfolgern in U identisch verschwindet:

$$\Sigma = \Sigma' + \Sigma''$$

In der ersten Summe haben wir dann alle $(i_1, \dots, i_n)$ für welche bei jeder Lösung von $Lu = f$ in dem oben angegebenen

Sinn $\dfrac{\partial^i u}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}}$ noch stetig differenzierbar in P ist; also gilt

$$(3)\qquad \frac{\partial^i u}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} = \left(\frac{\partial^i u}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}}\right)_P + \sum_{j=1}^{n} [A_j(i_1, \dots i_n) + \varepsilon_j](x_j - x^0{}_j)$$

wo die A_j Konstante sind und $\varepsilon_j \to 0$ für $(x_1, \dots, x) \to (x^0{}_1, \dots, x^0{}_n)$ strebt.

In der zweiten Summe haben wir alle $(i_1, \dots i_n)$, für welche nach unseren Voraussetzungen das $g_{i_1 \dots i_n}$ in P verschwindet.

Wir können dann unsere Differentialgleichung (1) so anschreiben:

$$(4)\ Lu \equiv \Sigma' \left(\frac{\partial^i u}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}}\right)_P g_{i_1 \dots i_n} + \Sigma' [A_j(i_1 \dots i_n) + \varepsilon_j](x_j - x^0{}_j) g_{i_1 \dots i_n} + \\ + \Sigma'' g_{i_1 \dots i_n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} = f(x_1 \dots x_n)$$

Für den Punkt P muß also sein:

$$(5)\qquad \Sigma' \left(\frac{\partial^i u}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}}\right)_P g_{i_1 \dots i_n}(x^0{}_1 \dots x^0{}_n) = f(x^0{}_1 \dots x^0{}_n)$$

Subtraktion liefert dann:

$$(6)\qquad \Sigma' \left(\frac{\partial^i u}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}}\right)_P [g_{i_1 \dots i_n} - g_{i_1 \dots i_n}(x^0{}_1 \dots x^0{}_n)] + \\ + \Sigma' [A_j(i_1 \dots i_n) + \varepsilon_j](x_j - x^0{}_j) g_{i_1 \dots i_n} + \Sigma'' g_{i_1 \dots i_n} \frac{\partial^i u}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} = \\ = f(x_1 \dots x_n) - f(x^0{}_1 \dots x^0{}_n)$$

Wir setzen nun:

$$(7)\quad l(x_1 \dots x_n) = \mathrm{Max}\, \{\, |g_{i_1 \dots i_n} - g_{i_1 \dots i_n}(x^0{}_1, \dots x^0{}_n)|, \quad |x_j - x^0{}_j|\, \}$$

das Maximum über alle $(i_1 \dots i_n)$ und alle j genommen. Es ist l eine in U stetige und nur in P verschwindende, sonst überall positive Funktion. Wir wählen f so daß

$$(8)\qquad f(x_1 \dots x_n) - f(x^0{}_1 \dots x^0{}_n) = \sqrt{l(x_1 \dots x_n)}$$

Dividieren wir nun (6) durch $l\ (x_1, \dots, x_n)$, so haben wir links einen Ausdruck, der absolut

$$\leq \Sigma' \left| \left(\frac{\partial^i u}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}} \right)_P \right| + \Sigma' \, | A_j(i_1 \ldots i_n) + \varepsilon_j | \, | g_{i_1 \ldots i_n} | + \Sigma'' \left| \frac{\partial^i u}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}} \right|$$

also für $(x_1, \ldots, x_n) \to x_1^0, \ldots, x^0{}_n)$ beschränkt bleibt, während die rechte Seite gegen $+\infty$ strebt. Für diese Wahl von f ist also die Differentialgleichung nicht lösbar.

Unser Satz zeigt also z.B., daß eine — partielle oder gewöhnliche — lineare Differentialgleichung k-ter Ordnung, deren Koeffizienten mit $i_1 + \ldots + i_n = k$ sämtlich nicht identisch verschwinden, aber für den Punkt P alle $= 0$ sind, dort nicht für alle stetigen Funktionen f lösbar ist.

Dieser Satz und die Unlösbarkeit der Differentialgleichung (1) für bestimmte Fälle ist ganz analog zu gewissen Erscheinungen bei partiellen Differentialgleichungen mit regulären Koeffizienten und regulären f, wobei nach regulären Lösungen gefragt wird; so ist z.B. [2])

$$u + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = f \tag{9}$$

bei gewissen Werten der α_i nicht für alle regulären f regulär lösbar. Wie aus unserem Satz hervorgeht, ist also auch

$$u + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x_1 \ldots x_n) \frac{\partial u}{\partial x_i} = f \tag{10}$$

für stetige α_i und f mit $\alpha_i(0, \ldots, 0) = 0$ i.a. nicht lösbar.

Wir geben nun umgekehrt einen Satz, der für gewisse Lu die Lösbarkeit von (1) für alle stetigen f garantiert.

Gibt es in Lu ein $g_{r_1 \ldots r_n}$, das in P verschieden von Null ist und gilt für alle in U nicht identisch verschwindenden Koeffizienten $g_{i_1 \ldots i_n}$

$$i_1 \leq r_1, \; i_2 \leq r_2, \ldots \; i_n \leq r_n \tag{11}$$

so ist in einem bestimmten Intervall um den Punkt P die Differentialgleichung (1) *für alle stetigen f lösbar.*

[2]) Rend. di Mat., Roma 1952, 125-133.

Es sei also ein in P nicht verschwindender Koeffizient höchster Ordnung in allen Variablen vorhanden.

Zum Beweis [3]) nehmen wir ein P enthaltendes Gebiet $U_1 \subset U$, so daß $g_{r_1 \dots r_n} \neq 0$ in U_1 und denken uns (1) durch $g_{r_1 \dots r_n}$ durchdividiert, so daß wir von nun an $g_{r_1 \dots r_n} \equiv 1$ in U_1 annehmen.

Wir setzen weiter $x_i - x_i^0 = \rho \xi_i$ (ρ feste Zahl > 0), schreiben (1) in den ξ_i an und multiplizieren mit ρ^r $(r = r_1 + \dots + r_n)$; dann erhalten wir das Glied höchster Ordnung mit dem Koeffizienten 1, während alle weiteren Glieder von Lu den Faktor ρ haben; wir wählen dann das ρ so klein, daß in einem abgeschlossenen Intervall $B \subset U_1$ um den Punkt $P(\xi_1 = 0, \dots, \xi_n = 0)$, etwa $|\xi_i| \leq R < 1$ das Maximum der Summe der absolut genommenen Koeffizienten der Ableitungen (wir bezeichnen sie wieder mit $g_{i_1 \dots i_n}$)

$$l = \operatorname*{Max}_{B} \sum_{(i \dots i_n) \neq (r_1 \dots r_n)} |g_{i_1 \dots i_n}| < 1 \tag{12}$$

Wir betrachten dann die Differentialgleichung (wir schreiben statt ξ_i wieder x_i).

$$L_1 u \equiv \frac{\partial^r u}{\partial x_1^{r_1} \dots \partial x_n^{r_n}} = h(x_1 \dots x_n) \tag{13}$$

mit stetigem $h(x_1, \dots, x\;)$ in B.

Wir integrieren r_1 -mal nach x_1 (jedesmal mit 0 als unterer Grenze), ebenso r_2 -mal nach x_2 u.s.w. und haben schließlich allgemein für die Ableitungen der Lösung $(i_k \leq r_k)$ die Abschätzung:

$$\left| \frac{\partial^i u}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} \right| \leq \frac{R^{r-i}}{(r_1 - i_1)! \dots (r_n - i_n)!} \operatorname{Max} |h| \leq \operatorname{Max} |h| = M, \tag{14}$$

da wir $R \leq 1$ gewählt hatten.

Wir schreiben dann unsere Differentialgleichung (1) in der Form an:

$$(L_1 + L_2) u = f \tag{15}$$

---

3) Die sonst bei solchen Beweisen angewendeten Methoden erfordern vielfach die Differenzierbarkeit der Koeffizienten

und bestimmen eine Lösung, indem wir die Folge der Differentialgleichungen lösen:

$$(16)\qquad \begin{aligned} L_1 u_1 &= f \\ L_1 u_{k+1} &= -L_2 u_k \qquad (k = 1, 2, \ldots) \end{aligned}$$

wobei wir stets die eben angegebene Lösung von (13) nehmen, die $L_2 u_k$ können wir wegen (11) stets bilden. Dann ist nach (14)

$$\left| \frac{\partial^i u_{k+1}}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}} \right| \leq \operatorname*{Max}_B |L_2 u_k|$$

und weiter nach (12) in B

$$|L_2 u_k| \leq l \operatorname{Max} \left| \frac{\partial^i u_k}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}} \right|,$$

das Maximum über alle $(i_1, \ldots, i_n) \neq (r_1, \ldots, r_n)$ mit (11) und alle Punkte von B genommen; also ist mit den ebenso genommenen Maxima

$$(17)\qquad \operatorname{Max} \left| \frac{\partial^i u_{k+1}}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}} \right| \leq l \operatorname{Max} \left| \frac{\partial^i u_k}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}} \right|$$

Wegen $l < 1$ ist daher für jedes $(i_1, \ldots, i_n)$ die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^i u_k}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}}$$

absolut und gleichmäßig in B konvergent, also auch $u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$. Durch Summation von (16) folgt dann

$$(L_1 + L_2) u = f$$

Die so konstruierte Lösung u verschwindet an den Koordinatenebenen $x_i = 0$ durch P, und es ist

$$\text{für } x_1 = 0 \qquad \frac{\partial^{r-1} u}{\partial x_1^{r_1 - 1} \ldots \partial x_n^{r_n}} = \ldots = \frac{\partial^{r-r_1} u}{\partial x_2^{r_2} \ldots \partial x_n^{r_n}} = 0$$

$$\text{für } x_2 = 0 \qquad \frac{\partial^{r-1} u}{\partial x_1^{r_1} \partial x_2^{r_2 - 1} \ldots \partial x_n^{r_n}} = \ldots = \frac{\partial^{r-r_2} u}{\partial x_1^{r_1} \partial x_3^{r_3} \ldots \partial x_n^{r_n}} = 0$$

u. s. w.

Soll die Lösung, bzw. deren Ableitungen an diesen Ebenen nicht verschwinden, sondern bestimmte Werte annehmen, so haben wir in geringer Modifikation des Verfahrens bei der ersten der Gleichungen (16) die Werte von u_1 bei der Integration entsprechend anzusetzen.

Durch diese beiden Sätze ist für $n = 1$ bei jedem linearem Differentialoperator Lu feststellbar, ob $Lu = f$ für alle f lösbar ist oder nicht: ist Lu von k-ter Ordnung, so ist $Lu = f$ für alle f dann und nur dann lösbar, wenn der Koeffizient n-ter Ordnung in P nicht verschwindet.