Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Mario Pezzana

Sulla differenziabilità delle funzioni di più variabili reali

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 23 (1954), p. 299-309

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1954__23__299_0>

SULLA DIFFERENZIABILITÀ DELLE FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI REALI (1)

Nota (*) *di* Mario Pezzana (*a Genova*)

È ben noto che una funzione continua di due variabili parzialmente derivabile quasi ovunque è dotata quasi ovunque di differenziale asintotico regolare. Questo risultato è stato trovato da R. Caccioppoli e G. Scorza Dragoni [2]) e indipendentemente da T. Radò [3]).

Una funzione $f(x, y)$ dicesi asintoticamente differenziabile in modo regolare in un punto P_0, interno al suo campo di definizione, se esistono due costanti α e β tali che

$$\lim_{P \to P_0} \frac{1}{\overline{P_0 P}} [f(P) - f(P_0) - \alpha(x - x_0) - \beta(y - y_0)] = 0$$

quando P tende a P_0 senza abbandonare un conveniente insieme di densità 1 in P_0 costituito dai lati di tanti quadrati a lati paralleli agli assi e con centro in P_0.

(*) Pervenuta alla Redazione il 28 marzo 1954.

1) I risultati di questa Nota sono stati esposti nella mia tesi di laurea, discussa a Genova nel Febbraio 1954.

2) R. Caccioppoli e G. Scorza-Dragoni, *Necessità della condizione di Weierstrass per la semicontinuità di un integrale doppio sopra una data superficie.* Mem. R. Acc. d'Italia, Vol. 9, pag. 251-268 (1937). I risultati precedenti di Caccioppoli che preludono a questi sono contenuti nella Nota: *Sulla differenziabilità delle funzioni di più variabili.* Rend. Acc. Sc. Fis. Mat. di Napoli, (3), 34, (1928), pp. 152-159.

3) T. Radò, *On the derivative of the Lebesgue area of continuous surfaces.* Fund. Math., Vol. 30 (1938), pp. 34-39.

L. TIBALDO[4]) e recentemente B. LODIGIANI[5]) si sono occupate della estensione di questo risultato al caso di tre variabili, mettendo in evidenza che nel passaggio da due a tre variabili si è naturalmente condotti a considerare due specie di differenziali asintotici del tipo regolare.

In questa Nota mi propongo di definire, per le funzioni di n variabili, $n-1$ specie di differenziali asintotici del tipo regolare (che chiamo μ_{n-k} asintotici; $k=1, 2, \ldots, n-1$) e di trovare delle condizioni sufficienti affinchè una funzione ammetta differenziali del tipo detto.

Da questo risultato si deducono facilmente i teoremi della TIBALDO e della LODIGIANI.

1. - Diremo che una funzione di n variabili $f(P)$, ove $P \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ammette differenziale μ_{n-k} asintotico in un punto $\overline{P}$ se si possono trovare n costanti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ in modo che si abbia

$$\lim_{P \to \overline{P}} \frac{1}{\overline{\overline{P}P}} \left[f(P) - f(\overline{P}) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x_i - \overline{x}_i)\right] = 0 \tag{1}$$

quando P tende a $\overline{P}$ senza abbandonare un insieme $E(\overline{P})$ tale che le proiezioni del suo complementare sulle $\binom{n}{k}$ varietà coordinate a $n-k$ dimensioni passanti per $\overline{P}$ hanno densità zero in $\overline{P}$[6]).

---

[4]) L. TIBALDO, *Sulla differenziabilità asintotica quasi regolare delle funzioni di tre variabili*. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 13 (1942), pp. 78-88.

[5]) B. LODIGIANI, *Sulla differenziabilità asintotica regolare delle funzioni di più variabili*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 22 (1953), pag. 251.

[6]) La notazione μ_{n-k} è usata per indicare che la densità in $\overline{P}$ è valutata rispetto ad una pseudo misura di $E(\overline{P})$ ottenuta sommando le misure esterne delle proiezioni dell'insieme $E(\overline{P})$ sulle varietà coordinate a $n-k$ dimensioni. Indicheremo invece con $\mu^{(i)}_{n-k}\, E(\overline{P})$ la misura esterna della proiezione di $E(\overline{P})$ sulla varietà coordinata ad $n-k$ dimensioni parallele ad un dato gruppo di $n-k$ assi. In corrispondenza si potrà definire un differenziale $\mu^{(i)}_{n-k}$ asintotico, analogamente a quan-

Se in $\overline{P}$ la $f(P)$ è derivabile, le α_i coincidono con le derivate parziali prime calcolate in $\overline{P}$; in ogni caso con le derivate asintotiche [7]).

Vale allora il

TEOREMA: *Una funzione $f(P) \equiv f(x_1, x_2, ..., x_n)$ di n variabili definita in un parallelepipedo ad n dimensioni, R_n, continua rispetto ai gruppi di k variabili* [8]), *e quasi ovunque differenziabile alla Stolz rispetto a tutti i gruppi di k variabili* [8]), *ammette quasi ovunque in R_n differenziale μ_{n-k} asintotico.*

Per $k = 1$ si ha un caso particolare notevole, e il teorema si può enunciare come segue:

Una funzione $f(P)$ di n variabili, continua rispetto alle variabili separatamente in un parallelepipedo ad n dimensioni R_n e ivi quasi ovunque derivabile, ammette in R_n differenziale μ_{n-1} asintotico.

2. - Per dare la dimostrazione del teorema enunciato dobbiamo permettere due lemmi.

LEMMA I. - *Se $f(P)$ è continua rispetto alle variabili separatamente in R_n e ivi quasi ovunque parzialmente derivabile, fissato $\varepsilon > 0$ è possibile determinare un insieme H_1 tale che $\mu(R_n - H_1) < \varepsilon$ e in H_1 tutte le derivate parziali prime sono continue.*

Il lemma è una immediata conseguenza del teorema di

---

to si è fatto per i differenziali μ_{n-k} asintotici. Indicheremo con μ la misura di Lebesgue. Per considerazioni analoghe cfr. C. STAMPACCHIA, *Sopra una classe di funzioni di n variabili.* Ricerche di Matematica, Napoli, Vol. 1 (1952), pp. 27-54.

7) Cfr. SAKS, *Theory of the Integral,* Warsaw (1937), Ch. IX, 12, pag. 300.

8) S'intende sempre, qui e nel seguito, per quasi tutti i valori delle altre $n - k$ *variabili.* L'osservazione che il teorema di R. CACCIOPPOLI e G. SCORZA-DRAGONI, vale anche se la funzione non è superficialmente continua, ma continua rispetto alle variabili separatamente è di F. CAFIERO, *Sulle condizioni sufficienti per l'olomorfia di una funzione.* Ricerche di Matem., Vol. II (1953), pp. 59-77, pag. 60.

LUSIN, non appena si sia provato che, nelle nostre ipotesi, le derivate sono misurabili in R_n. Si osservi a questo proposito che nella ulteriore ipotesi della continuità della funzione ciò è noto [9]). Ma la semplice misurabilità di $f(P)$ non porta in generale alla misurabilità delle derivate [9]).

Ciò però è vero, come dimostreremo, per le funzioni in questione. Questo fatto è stato enunciato già da G. STAMPACCHIA [10]).

Basterà dimostrare la misurabilità della derivata rispetto ad una variabile, per esempio rispetto ad x_1; per le altre il ragionamento sarà analogo.

Più in generale dimostriamo il seguente lemma:

Se una funzione di n variabili $f(P)$ definita in R_n è ivi continua rispetto ad x_1 per quasi tutti i valori delle altre variabili e misurabile rispetto ad $(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ per quasi tutti i valori di x_1, la derivata rispetto ad x_1 è misurabile là dove esiste.

Il lemma I rientra in questo risultato, perchè è noto che una funzione continua rispetto alle variabili separatamente è misurabile rispetto alle $(n-1)$-*ple* $(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ [11]).

Per un noto teorema di SCORZA DRAGONI [12]), fissato un $\delta > 0$ e detta L la proiezione di R_n sull'asse x_1, è possibile determinare un insieme chiuso I_δ dell'iperpiano $x_1 = 0$ tale che $\mu(CI) < \delta$ e in $R_\delta = I_\delta \times L$ la $f(P)$ sia continua.

Ciò posto, indicato con $\dfrac{\overline{\partial f}^+}{\partial x_1}$ il numero derivato destro massimo della $f(P)$ rispetto ad x_1, è immediato verificare che questo è misurabile in R_δ. Infatti, detto E l'insieme dei punti in cui $\dfrac{\overline{\partial f}^+}{\partial x_1} < a$, tale insieme è la somma di una infinità numerabile di insiemi chiusi E_m di R nei quali, per $0 < h \leq \dfrac{1}{m}$,

---

9) Loc. cit. in 7), teor. 4.1, pag. 170.

10) Loc. cit. in 6), n. 2.

11) Loc. cit. in 6), 1. II.

12) G. SCORZA DRAGONI, *Un teorema sulle funzioni continue rispetto ad una e misurabili rispetto ad un'altra variabile.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 17 (1948), pp. 102-106. Cfr. anche loc. cit. in 6), 1. I.

risulta

$$f(x_1+h,\ x_2,\ \dots,\ x_n)-f(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)\leq\left(a-\frac{1}{m}\right)h.$$

Analogamente si dimostra la misurabilità degli altri numeri derivati del Dini in R_δ. Ne discende la misurabilità dei punti di R_δ in cui questi coincidono, in cui cioè la $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ è definita. Poichè in tale insieme la $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ coincide con uno qualunque dei numeri del Dini, essa risulta misurabile in quel sottoinsieme di R_δ in cui esiste.

Facendo tendere δ a zero attraverso una successione decrescente, si prova l'asserto.

3. - Se $P\equiv(x_1,\ \dots,\ x_k\,;\ x'_{k+1},\ \dots,\ x'_n)$ e $P'\equiv(x'_1,\ x'_2,\ \dots,x'_n)$ sono due punti appartenenti ad una medesima varietà coordinata a k dimensioni parallela ai primi k assi, essi evidentemente avranno le ultime $n-k$ coordinate identiche. Perciò ogni coppia ordinata di punti del tipo $(P,\ P')$ può essere rappresentata da un punto Q_{k_1} di uno spazio ad $n+k$ dimensioni. Tale spazio può essere considerato come prodotto topologico di R_n (spazio ambiente dei punti P') e di un nuovo spazio R_k ortogonale a R_k.

Poniamo allora

$$\begin{cases} F(Q_{k_1})=\dfrac{1}{\overline{P'P}}\left[f(P)-f(P')-\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{P=P'}(x_i-x_i')\right] \text{ per } P\neq P' \\ F(Q_{k_1})=0 \qquad \text{per } P=P'. \end{cases}$$

Analogamente si definiscono le altre $F(Q_{k_i})$ relative alle altre possibili giaciture delle varietà a k dimensioni [13].

Dimostriamo il seguente:

LEMMA II. - *Se $f(P)$ è definita in R_n ed è ivi continua rispetto ai gruppi di k variabili* [8]) *e quasi ovunque differenziabile alla Stolz rispetto a tutti i gruppi di k variabili* [8]),

---

[13]) L'indice k_i sta ad indicare il gruppo dei k assi ai quali le varietà devono essere parallele.

fissato $\varepsilon > 0$, *è possibile determinare un insieme* H_2 *tale che* $\mu(R_n - H_2) < \varepsilon$ *e tale che, per* P' *appartenente ad* H_2 *tutte le* $F(Q_{k_i})$ *siano uniformemente continue.*

Sarà sufficiente provare l'asserto per una particolare $F(Q_{k_i})$, per esempio per la $F(Q_{k_1})$.

Posto $Q_{k_1} \equiv (x_1, x_2, ..., x_k; x'_1, x'_2, ..., x'_k; x'_{k+1}, ..., x'_n)$, $F(Q_{k_1})$ risulta continua rispetto alle prime k variabili per quasi tutti i lavori delle altre n e misurabile rispetto alle ultime n per quasi tutti i valori delle prime k [14]). Esiste allora, sempre per il teorema di SCORZA DRAGONI, un insieme chiuso K ad $n + k$ dimensioni tale che la proiezione del suo complementare su R_n ha misura piccola a piacere e in K la $F(Q_{k_1})$ è continua; quindi uniformemente continua.

In particolare, chiamando H_2 la proiezione di K su R_n, se P' appartiene ad H_2, scelto ad arbitrio un $\varepsilon > 0$ si può trovare un $\delta_\varepsilon > 0$, indipendente da P', tale che per $\overline{P'P} < \delta_\varepsilon$ si abbia

$$|F(Q_{k_1})| < \varepsilon . \tag{2}$$

Il lemma infatti assicura che fissato un $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, si può trovare in corrispondenza un $\delta_\varepsilon > 0$ tale che per ogni coppia Q_{k_1}, Q'_{k_1} di punti di K tali che $\overline{Q_{k_1}Q'_{k_1}} < \delta_\varepsilon$, si abbia

$$|F(Q_{k_1}) - F(Q'_{k_1})| < \varepsilon.$$

Se, in particolare, la coppia dei punti che determinano Q'_{k_1} sono tra loro coincidenti, si avrà $F(Q'_{k_1}) \equiv 0$ e, se, P e P' sono i punti che determinano Q_{k_1} e $\overline{PP'} < \delta_\varepsilon$, si avrà $\overline{Q_{k_1}Q'_{k_1}} < \delta_\varepsilon$ e quindi $|F(Q_{k_1}) - F(Q'_{k_1})| < \varepsilon$; ma $F(Q'_{k_1}) \equiv 0$, e perciò si ha la (2).

È questo aspetto particolare de lemma che ci servirà nel seguito.

Per il caso $k = 1$ la (2) assicura semplicemente che esiste un insieme H_2 in cui i rapporti incrementali della $f(P)$ tendono uniformemente alle rispettive derivate.

---

14) Loc. cit. in [6]), 1. II.

4. - Premessi i lemmi precedenti, passiamo alla dimostrazione del teorema enunciato al n. 1.

Dimostriamo il teorema per induzione.

È evidente che il teorema vale per $n = 1$ e $k = 1$.

Supponiamo che il teorema sia valido per le funzioni di m variabili, continue e differenziabili alla Stolz rispetto ai gruppi di h variabili, con $m \leq n - 1$ e $h \leq k - 1$, e dimostriamolo per funzioni di n variabili che soddisfano alle stesse ipotesi rispetto ai gruppi di k variabili.

Una funzione di n variabili $f(P)$ definita in R_n, per ogni valore fissato di k variabili ${}^{(k)}x_i \equiv (x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$ [15]) risulta definita in un parallelepipedo ad $n - k$ dimensioni, che chiameremo $R_{n-k}({}^{(k)}x_i)$. Essa, come funzione di $n - k$ variabili risulta ancora continua, almeno rispetto alle variabili separatamente [16]); e d'altra parte è quasi ovunque parzialmente derivabile.

Allora, per quanto supposto, la $f(P)$ come funzione di $n - k$ variabili ammette differenziale μ_{n-1} asintotico in quasi tutti i punti di quasi tutti gli $R_{n-k}({}^{(k)}x_i)$.

Diremo che un punto P' gode della proprietà (α) quando la $f(P)$, come funzione di tutti i gruppi possibili di $n - k$ variabili, ammette in P' differenziale μ_{n-1} asintotico cioè ammette tale differenziale in P' su tutti gli $R_{n-k}({}^{(k)}x_i)$ passanti per P'.

I punti che godono della proprietà (α) sono quasi tutti i punti di R_n. Infatti, fissato un gruppo k_i di k variabili, la $f(P)$ come funzione delle altre $n - k$ variabili ammette differenziale μ_{n-1} asintotico in quasi tutti i punti di quasi tutti gli $R_{n-k}({}^{(k)}x_i)$ corrispondenti al gruppo di variabili fissato; quindi in quasi tutti i punti di R_n la $f(P)$ come funzione di un certo gruppo di $n - k$ variabili ammette differenziale μ_{n-1}

15) $i_1, \dots, i_k$ indica una particolare disposizione degli indici a k a k. Nella notazione $({}^{(k)}x_i)$ l'indice k in alto ricorda che il punto appartiene ad uno spazio a k dimensioni, l'indice i in basso rappresenta la disposizione $i_1, \dots, i_k$.

16) Loc. cit. in [6]), l. II.

asintotico. Poichè i gruppi possibili di k variabili sono in numero finito, segue l'asserto.

Dai lemmi I e II dimostrati al n. 2 segue che esiste un insieme H — prodotto dei due insiemi H_1 e H_2 — di misura prossima quanto si vuole alla misura di R_n, in cui le derivate della $f(P)$ sono continue e la (2) vale uniformemente.

Diremo che un punto P'' gode della proprietà (β) se le intersezioni di H con gli $R_{n-k}(^{(k)}x_i)$ passanti per P'' hanno tutte densità 1 in P''.

I punti che godono della proprietà (β) sono quasi tutti i punti di H [17]).

I punti $\overline{P}$ che godono insieme delle proprietà (α) e (β) sono ancora quasi tutti i punti di H.

Dimostreremo che in questi punti $\overline{P}$ la $f(P)$ ammette differenziale μ_{n-k} asintotico.

Consideriamo un particolare gruppo di k variabili, ad esempio le prime k.

Fissato un punto $\overline{P}$ e chiamando $P_{n-k} \equiv (\bar{x}_1, .., \bar{x}_k; x_{k+1}, ..., x_n)$ un punto della varietà coordinata ad $n-k$ dimensioni passante per $\overline{P}$ parallela agli ultimi $n-k$ assi, per quanto supposto si ha

$$(3) \qquad \frac{1}{\overline{\overline{P}P_{n-k}}} \left| f(P_{n-k}) - f(\overline{P}) - \sum_{i=k+1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{P=\overline{P}} (x_i - \bar{x}_i) \right| < \varepsilon$$

per $\overline{\overline{P}P_{n-k}} < \delta_\varepsilon^{(1)}$ con un $\delta_\varepsilon^{(1)} > 0$ conveniente e per P_{n-k} variabile in un insieme $E_{n-k}(\overline{P})$ di densità 1 in $\overline{P}$.

Chiamiamo $E'_{n-k}(\overline{P})$ l'intersezione di $E_{n-k}(\overline{P})$ con H; $E'_{n-k}(\overline{P})$ ha ancora densità 1 in $\overline{P}$.

Per i punti $P'_{n-k} \equiv (\bar{x}_1, ..., \bar{x}_k; x'_{k+1}, ..., x'_n)$ di $E'_{n-k}(\overline{P})$ si ha, per il primo lemma:

$$(4) \qquad \left| \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{P=P'_{n-k}} - \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{P=\overline{P}} \right| < \varepsilon \qquad (i = 1, 2, ..., k)$$

per $\overline{\overline{P}P'_{n-k}} < \delta_\varepsilon^{(2)}$ con $\delta_\varepsilon^{(2)} > 0$ conveniente.

---

[17]) Loc. cit. in [7]), pag. 298.

Sempre per i punti P'_{n-k}, per il secondo lemma, si ha

$$(5) \qquad \frac{1}{\overline{PP'_{n-k}}}\left| f(P) - f(P'_{n-k}) - \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{P=P'_{n-k}}(x_i - \bar{x}_i)\right| > \varepsilon$$

per $\overline{PP'_{n-k}} > \delta_\varepsilon^{(3)}$ con un $\delta_\varepsilon^{(3)} > 0$ opportuno, e $P \equiv (x_1, \ldots, x_k; x'_{k+1}, \ldots, x'_n)$. I punti P risultano appartenere ad un insieme $E_{k_1}(\bar{P})$ tale che ha densità zero in $\bar{P}$. la proiezione del suo complementare sulla varietà coordinata ad $n - k$ dimensioni passante per $\bar{P}$ parallela agli ultimi $n - k$ assi.

Con semplice calcolo, dalle (3), (4) e (5), si deduce

$$(6) \qquad \frac{1}{\overline{\bar{P}P}}\left| f(P) - f(\bar{P}) - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{P=\bar{P}}(x_i - \bar{x}_i)\right| < (k+2)\varepsilon$$

quando P appartiene all'insieme $E_{k_1}(\bar{P})$ e $\overline{\bar{P}P} < \delta_\varepsilon$, essendo δ_ε il minore dei numeri $\delta_\varepsilon^{(1)}$, $\delta_\varepsilon^{(2)}$, $\delta_\varepsilon^{(3)}$.

Considerando un altro gruppo k_i di k variabili, si arriva a dimostrare che la (6) vale per P appartenente ad un insieme $E_{k_i}(\bar{P})$ tale che ha densità zero in $\bar{P}$ la proiezione del suo complementare sulla varietà coordinata passante per $\bar{P}$ e parallela agli altri $n - k$ assi.

Sommando tra loro tutti gli $E_{k_i}(\bar{P})$ si ottiene l'insieme $E(\bar{P})$ tale che hanno densità zero in $\bar{P}$ le proiezioni del suo complementare su una qualunque delle varietà coordinate a $n - k$ dimensioni passanti per $\bar{P}$.

Poichè per P variabile in $E(\bar{P})$ vale sempre la (6), il teorema risulta dimostrato per i punti $\bar{P}$, cioè per quasi tutti i punti di H.

Scelta infine una successione decrescente infinitesima di numeri positivi σ_r si possono trovare in corrispondenza gli insiemi H_r che hanno le proprietà di H e tali che valga la disuguaglianza

$$\mu(R_n - H_r) > \sigma_r .$$

Poichè allora vale la tesi del teorema per quasi tutti i punti di ogni H_r, essa vale anche per quasi tutti i punti di R_n.

5. - *Osservazioni.*

I. - È ormai chiaro come si possano definire differenziali $\mu^{(i)}_{n-k}$ asintotici[18]) rispetto ad un gruppo di k variabili, $\mu^{(i)}_{n-h}$ asintotici rispetto ad un altro gruppo di h variabili, ecc.; e in corrispondenza stabilire teoremi che ne assicurano l'esistenza.

II. - Nel caso del differenziale μ_{n-1} asintotico si può estrarre dall'insieme $E(\overline{P})$ un sottoinsieme $I(\overline{P})$ di densità 1 in $\overline{P}$, costituito dal contorno di tanti quadrati aventi i lati paralleli a due assi e i centri sulla varietà coordinata a $n-2$ dimensioni passante per $\overline{P}$ e parallela agli altri $n-2$ assi coordinati.

Infatti, fissati due determinati assi x_i e x_j, chiamiamo V_{n-2} la varietà coordinata passante per $\overline{P}$ e perpendicolare a x_i e x_j.

Siano $E_i(\overline{P})$ e $E_j(\overline{P})$ le intersezioni di $E(\overline{P})$ rispettivamente con gli iperpiani $x_i = \bar{x}_i$ e $x_j = \bar{x}_j$. Sarà possibile estrarre da $E_i(\overline{P})$ e $E_j(\overline{P})$ due sottoinsiemi $E'_i(\overline{P})$ e $E'_j(\overline{P})$ ancora di densità 1 in $\overline{P}$, ciascuno dei quali sia simmetrico di se stesso rispetto a V_{n-2} e che si trasformino l'uno nell'altro con un movimento che porti l'asse x_i sull'asse x_j lasciando invariati gli altri $n-2$ assi.

Consideriamo ora un quadrato con i lati paralleli agli assi x_i e x_j, il centro su V_{n-2} e un lato passante per un punto di $E'_i(\overline{P})$. Il lato opposto passerà allora anch'esso per un punto di $E'_i(\overline{P})$, e gli altri due lati passeranno per due punti di $E'_j(\overline{P})$. Tali quadrati apparterranno allora per intero ad $E(\overline{P})$.

Il ragionamento vale per qualunque coppia di assi.

L'insieme costituito dal contorno di tutti questi quadrati è l'insieme $I(\overline{P})$ che si voleva.

È immediato verificare che $I(\overline{P})$ ha densità 1 in $\overline{P}$. Basta far vedere che il suo complementare $CI(\overline{P})$ ha densità zero in $\overline{P}$. Infatti $CI(\overline{P})$ è costituito dal contorno di quadrati i

---

18) Cfr. 6).

cui lati passano per i punti di un insieme che ha densità zero in $\overline{P}$[19]).

Per il caso del differenziale μ_{n-k} asintotico, con analogo procedimento si può costruire un insieme $I(\overline{P})$, di densità 1 in $\overline{P}$, contenuto in $E(\overline{P})$, e costituito dalle celle a k dimensioni che formano il contorno di ipercubi a $k+1$ dimensioni, con gli spigoli paralleli a $k+1$ assi e il centro sulla varietà coordinata a $n-k-1$ dimensioni passante per $\overline{P}$ e parallela agli altri $n-k-1$ assi.

III. - Invece che quadrati si potrebbero ottenere rettangoli simili ad un rettangolo dato. Analogamente nel caso di più dimensioni si potrebbero ottenere parallelepipedi.

IV. - Nel teorema si può evidentemente sostituire l'ipotesi della differenziabilità alla Stolz rispetto ai gruppi di k variabili con ipotesi sufficienti per assicurare tale differenziabilità. Ad esempio basterà supporre le derivate prime continue rispetto ai gruppi di k variabili[20]).

---

19) Nel caso di due variabili si ritrova qui il risultato di CACCIOPPOLI-SCORZA DRAGONI e nel caso di tre variabili il risultato di L. TIBALDO.

20) Per $n=3$ rientra qui come caso particolare il risultato di B. LODIGIANI, che ha dimostrato l'esistenza del differenziale μ_1 asintotico, che chiama però differenziale asintotico regolare, quando le derivate sono continue rispetto ai gruppi di due variabili.