RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ARNO PREDONZAN

Osservazioni sulle varietà algebriche a tre dimensioni a superficie irregolari

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 23 (1954), p. 245-254

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1954__23__245_0>

OSSERVAZIONI SULLE VARIETÀ ALGEBRICHE A TRE DIMENSIONI A SUPERFICIE IRREGOLARI

Nota *) *di* ARNO PREDONZAN (*a Trieste*)

In questa Nota considero varietà algebriche irriducibili a tre dimensioni, V_3, aventi irregolarità superficiale $q_2 > 0$. In relazione alle stesse determino alcune condizioni, in virtù delle quali resta stabilita la loro equivalenza birazionale a varietà S_2-*luogo,* cioè a varietà luogo di un fascio di piani. Una V_3 per la quale sussista tale equivalenza verrà, nel seguito, detta varietà *pseudo* S_2-*luogo.*

Le condizioni di cui sopra si riferiscono all'ordine di una V_3 in relazione al genere delle sue curve-sezioni (Teor. I, n. 7); oppure assicurano che la V_3 è varietà *pseudo* S_2-*luogo* appena contenga un sistema lineare, Σ_r, di superficie algebriche, di dimensione r sufficientemente elevata rispetto al genere della sua curva caratteristica generica (Teor. II, n. 12). Appena esista tale sistema lineare viene altresì precisato come, mediante opportuna trasformazione birazionale, la V_3 possa mutarsi in una varietà S_2-*luogo,* V'_3, in guisa che alle curve caratteristiche di Σ_r vengano a corrispondere curve direttrici di V'_3 [1]).

* * *

1. — Si consideri una varietà algebrica irriducibile a tre dimensioni, V_3, di uno spazio lineare S_r $(r \geq 4)$, a superficie-sezioni irregolari ed avente l'ordine n.

---

*) Pervenuta in Redazione il 4 dicembre 1953.

[1]) Per curva direttrice di una varietà S_2-*luogo* s'intende una curva che seghi in un solo punto i piani generatori della varietà stessa.

Indicato con π il genere delle sue curve-sezioni e supposto

$$n > 2\pi - 2,$$

da un classico risultato di CASTELNUOVO-ENRIQUES [2]) discende che la generica superficie-sezione, F, della V_3 è birazionalmente riferibile ad una rigata non razionale, quindi sulla stessa esiste un (determinato) fascio irrazionale Σ di curve razionali Γ.

Sia inoltre $\pi \geq 3$.

La totalità delle curve Γ, relative a tutte le superficie-sezioni della V_3, costituiscono, ovviamente, un sistema algebrico irriducibile, Ω, la cui dimensione, ove si indichi con ρ $(1 \leq \rho \leq r-1)$ la dimensione dello spazio ambiente della generica Γ di Ω, vale

$$d = r + 1 - (r - \rho - 1) = \rho + 2\,. \tag{1}$$

Il luogo delle curve del sistema Ω che passano per un punto generico della V_3, risulta chiaramente una superficie algebrica irriducibile Φ; quindi sulla V_3 stessa esiste un fascio (non razionale) $|\Phi|$ di superficie Φ, le curve di Ω appartenenti alla generica delle quali costituiscono un sistema che indicheremo con Ω^*.

2. — Supponiamo, in primo luogo, $\rho = r - 1$. Dalla (1) discende allora $d = r + 1$, il che comporta che sia r la dimensione del sistema Ω^*, quindi che la generica Φ del fascio $|\Phi|$ sia una superficie di S_r a curve-sezioni razionali, cioè una rigata razionale, oppure una superficie di VERONESE (o una sua proiezione) [3]).

Vogliamo provare che *la generica Φ può essere mutata in una quadrica (o in un piano) mediante una trasformazione birazionale a coefficienti appartenenti al campo di razionalità della Φ stessa.*

---

[2]) Ved. G. CASTELNUOVO - F. ENRIQUES, *Sur les intégrales simples de première espèce d'une surface ou d'une variété algébrique à plusieurs dimensions*, « Ann. de l'École Norm. Sup. de Paris », s. III, t. 23, (1906).

[3]) Ved., ad es., F. CONFORTO, *Le superficie razionali*, Zanichelli, Bologna, (1939), Lib. II, cap. II.

Basterà, a questo scopo, provare la suddetta proposizione ove si supponga la Φ normale in uno spazio lineare S_m, quindi avente l'ordine $m-1$.

Se la Φ è rigata ed ha l'ordine $m-1=2h$ (pari), un generico iperpiano S_{m-1} di S_m, la sega in una curva direttrice C, dell'ordine $m-1$, che può notoriamente mutarsi, con una trasformazione birazionale, Π, a coefficienti razionali, in una conica C'. Una coppia di punti A_1', A_2', scelta genericamente su C', determina razionalmente su C, mediante la trasformazione Π^{-1}, una coppia A_1, A_2; di conseguenza si può razionalmente determinare il gruppo di $m-3$ punti $A_3, A_4, \ldots, A_{m-1}$, secondo cui un S_{m-2} generico di S_m per A_1, A_2, sega la superficie Φ, fuori dei punti A_1, A_2 stessi. Proiettando Φ dall'S_{m-1} congiungente i punti $A_3, A_4, \ldots, A_{m-1}$ su un S_3 complementare, si ottiene una quadrica.

Se l'ordine della rigata Φ è invece $m-1=2h-1$ (dispari), la direttrice C di cui sopra può razionalmente mutarsi in una retta, un punto A' della quale viene a determinare razionalmente un punto A di C. Un S_{m-2} generico per A incontra Φ, fuori di A, in un gruppo di $m-2$ punti, dall'S_{m-3} dei quali la Φ si proietta biunivocamente in un piano.

Se invece Φ è la superficie di VERONESE ($m=5$), è notorio che può mutarsi in un piano con una trasformazione birazionale a coefficienti razionali. Basta infatti proiettarla su un S_3 da una retta generica dell'S_5 ambiente per ottenere la superficie di STEINER (del quarto ordine) con tre rette doppie per un punto triplo; quindi proiettare quest'ultima da tale punto triplo su un piano generico dell'S_3.

3. — Qualora la generica superficie del fascio $|\Phi|$ si possa mutare, con una trasformazione birazionale a coefficienti appartenenti al campo di razionalità della Φ stessa, in un piano, è ovvio che la V_3 è birazionalmente equivalente a una varietà S_2-*luogo*, quindi essa medesima è una varietà *pseudo* S_2-*luogo*.

Se invece la generica Φ si muta, mediante una trasformazione birazionale a coefficienti razionali, in una quadrica, la V_3 è birazionalmente equivalente ad una varietà $V_3{}^*$, luogo di un fascio irrazionale $|Q_2|$ di quadriche.

Tale fascio ammette una curva unisecante k; ciò deriva dal fatto che, segando $V_3{}^*$ con un iperpiano generico del suo spazio ambiente, si ottiene una superficie F^* contenente un fascio irrazionale di coniche (sezioni con l'iperpiano suddetto delle quadriche di $|Q_2|$), e per una siffatta superficie l'esistenza di una curva unisecante è nota [4]). Naturalmente per determinare la stessa bisogna introdurre un certo numero di irrazionalità aritmetiche.

Proiettando ciascuna quadrica del fascio $|Q_2|$ dal punto in cui essa incontra l'unisecante k, su un iperpiano generico dello spazio ambiente della $V_3{}^*$, si ottiene su tale iperpiano una varietà S_2-*luogo*. Anche in questo caso, dunque, la V_3 è una varietà *pseudo* S_2-*luogo*.

4. — Si supponga, in secondo luogo, che la dimensione ρ dello spazio ambiente della generica Γ di Ω soddisfi alle limitazioni $3 \leq \rho < r - 1$.

Proiettando la V_3 da un generico $S_{r-\rho-2}$ di S_r su un $S_{\rho+1}$ complementare, si ottiene una varietà V_3' di $S_{\rho+1}$ contenente un sistema Ω', di dimensione $\rho + 2$, di curve razionali Γ' di S_ρ (analogo al sistema Ω della V_3); ne segue che sulla V_3' esiste un fascio irrazionale $|\Phi'|$ di superficie Φ' di $S_{\rho+1}$, a curve-sezioni razionali. Per la V_3' in questione valgono, pertanto, le conclusioni a cui si è giunti nei nn. 2, 3.

5. — Facciamo, in terzo luogo, l'ipotesi $\rho = 2$. La varietà V_3 contiene allora un sistema Ω di curve piane Γ.

---

[4]) Ved. F. ENRIQUES, *Sopra le superficie che posseggono un fascio ellittico di curve razionali*, « Rend. Acc. Lincei », sez. V, v. 7, (1898); *Sopra le superficie che posseggono un fascio di curve razionali*, ivi; *Sopra le superficie algebriche che contengono un fascio di curve razionali*, « Math. Ann. », Bd. 22, (1899). - F. CONFORTO, loc. cit. in [3]), Lib. II, cap. I. - E. D. TAGG, *Surfaces which contain an irrational pencil of rational curves*, « Journal of the London Math. Soc. », v. 14, (1939).

Proiettando tale V_3 da un S_{r-5} generico di S_r su un S_4 complementare, si ottiene una varietà V_3' di S_4. Il relativo sistema Ω' di curve piane razionali Γ' (analogo al sistema Ω della V_3) ha, in questo caso, a norma della (1), la dimensione $d' = 4$; inoltre le curve di Ω', passanti per un punto generico P della V_3', formano un sistema algebrico irriducibile di dimensione due.

Fissata genericamente una retta p per P, si consideri la stella Δ_2 (di dimensione 2) degli S_3 dell' S_4 ambiente di V'_3 passanti per p. Un S_3 generico di Δ_2 sega la varietà V'_3 in una superficie, F', contenente un fascio Σ' di curve Γ', una (ed una sola) delle quali passa per P. Viceversa gli S_3 per la curva ultima considerata formano un fascio, un solo S_3 del quale appartiene a Δ_2. Ne segue che il sistema delle curve Γ' di Σ' per P è una *congruenza razionale K*.

Vogliamo provare che *la congruenza K è di indice uno.*

Facciamo a tale scopo, l'ipotesi assurda che ciò non si verifichi; ciò equivale a supporre che per due punti generici della V_3' passi un numero finito $\nu \geq 2$ di curve del sistema Ω'.

Si consideri una generica superficie-sezione, F', della V_3' e il relativo fascio Σ' di curve Γ'. Sia poi $\overline{\Gamma}'$ una curva generica di Σ'.

Per due punti generici di $\overline{\Gamma}'$ passano, oltre a $\overline{\Gamma}'$, $\nu - 1 \geq 1$ curve del sistema Ω'. Le curve di Ω' incidenti $\overline{\Gamma}'$ formano pertanto un sistema algebrico ∞^2, $\overline{\Omega}$.

In un S_3 generico per $\overline{\Gamma}'$ giacciono ∞^1 curve del sistema $\overline{\Omega}$: quindi formano un sistema ∞^1 le curve di $\overline{\Omega}$ situate nell'S_3 ambiente della F' prima considerata. Da ciò discende che quest'ultimo sistema ∞^1 coincide con il fascio Σ'.

Poichè $\overline{\Gamma}'$ è generica nel fascio Σ', da quanto precede deriva che le curve di Σ' si incontrano in coppie (almeno) di punti, uno dei quali deve necessariamente descrivere $\overline{\Gamma}'$ al variare di Γ' in Σ'; ma ciò è assurdo in quanto Σ' è un fascio (quindi per un punto generico di $\overline{\Gamma}'$, che risulta, per la genericità di $\overline{\Gamma}'$, generico anche su F', non può passare, oltre a $\overline{\Gamma}'$, alcuna ulteriore curva di Σ').

Si conclude che la congruenza razionale K, dovrebbe risultare di indice uno, dal che seguirebbe che la V_3' sarebbe *linear-*

mente razionale [5]): e ciò appare manifestamente assurdo appena si pensi che, per l'ipotesi del n. 1, la V_3 (e quindi la V_3') è a superficie-sezioni irregolari. La condizione iniziale di questo n. ($\rho = 2$) resta pertanto esclusa.

6. — Supponiamo, infine, $\rho = 1$. Da ciò segue che la generica superficie-sezione F della V_3 è una rigata non razionale, quindi la V_3 stessa è una varietà S_2-*luogo* [6]).

7. — In virtù dei risultati dei nn. precedenti, resta stabilito il seguente

TEOREMA I: *Una varietà algebrica irriducibile a tre dimensioni, a superficie-sezioni irregolari e a curve-sezioni di genere* $\pi \geq 3$, *è una varietà pseudo* S_2-*luogo appena il suo ordine* n *soddisfi alla limitazione* $n > 2\pi - 2$.

Se poi fosse $\pi = 1$ o $\pi = 2$, le superficie-sezioni, F, della V_3 risulterebbero rigate (in quanto irregolari), per cui il teorema ora enunciato sarebbe evidente.

* * *

8. — Sia Σ_r un sistema lineare (di dimensione r) di superficie algebriche Φ, a curva caratteristica (variabile) irriducibile di dato genere $\pi \geq 3$, situato sopra una varietà algebrica irriducibile a tre dimensioni, V_3, avente irregolarità superficiale $q_2 > 0$.

Si supponga inoltre

$$r \geq 3\pi + 6 . \tag{2}$$

Il sistema Σ_r non risulta, ovviamente, composto con un'involuzione di specie $q > 0$, quindi la sua imagine proiettiva è una varietà V_3', appartenente ad uno spazio lineare S_r, la cui dimensione r uguaglia quella di Σ_r. Tale imagine V_3' può otte-

---

5) Ved. U. MORIN, *Sulle varietà algebriche che contengono un sistema di curve razionali*, « Rend. Sem. Mat. di Padova », v. IX, (1938).

6) Si può facilmente verificare che l'unica V_3 a superficie-sezioni rigate e non S_2-*luogo* è l'iperquadrica generale di S_4.

nersi (come noto) riferendo proiettivamente le superficie Φ di Σ_r (considerate come elementi) agli iperpiani di S_r.

In virtù di tale riferimento proiettivo si viene a stabilire tra le varietà V_3' e V_3 una corrispondenza algebrica d'indici $(1, m)$.

Se (e soltanto se) il sistema Σ_r è semplice, risulta $m = 1$, cioè V_3' e V_3 sono birazionalmente equivalenti. Negli altri casi V_3' rappresenta i gruppi di punti di un'involuzione I_m (d'ordine $m \geq 2$) con la quale è composto il sistema Σ_r.

Per le successive considerazioni giova ancora ricordare la seguente proposizione [7]:

(*i*) *Una superficie non rigata, a curve-sezioni di genere* π, *non può appartenere ad uno spazio lineare di dimensione* $r - 1 > 3\pi + 5$ $(\pi \neq 1)$, *oppure* $r - 1 > 9$ $(\pi = 1)$. *Se poi* $r - 1 = 3\pi + 5$ $(\pi \neq 1)$, o $r - 1 = 9$ $(\pi = 1)$ *la superficie è razionale.*

9. — Dalla (2) discende che *la generica superficie* Φ *di* Σ_r *è birazionalmente riferibile a una rigata di genere* π. Se infatti così non fosse, il sistema Σ_r sarebbe semplice, tale essendo il sistema caratteristico Σ_{r-1} (di dimensione $r-1$) segato da Σ_r su una generica superficie Φ [8]. Ne verrebbe che la generica superficie-sezione, Φ', della varietà V_3' (imagine del sistema semplice Σ_r, quindi trasformata birazionale della V_3), sarebbe a curve-sezioni di genere π e quindi non potrebbe risultare rigata [9]. Ciò porterebbe di conseguenza [tenuto an-

---

[7]) Ved. F. ENRIQUES, *Sulla massima dimensione dei sistemi lineari di curve di dato genere appartenenti ad una superficie algebrica*, « Atti Acc. Sc. di Torino », v. 29, (1894), n. 5.

[8]) È noto infatti [ved. F. ENRIQUES, loc. cit. in [7]), n. 6] che *un sistema lineare* Σ_{r-1}, *di genere* $\pi \geq 0$, *appartenente ad una superficie non riferibile a una rigata di genere* π, *è semplice se la dimensione* $r - 1 > 2\pi + 6$. Tale limitazione, in virtù della (2) e della $\pi \geq 3$, resta sempre soddisfatta.

[9]) Se infatti Φ' fosse rigata dovrebbe avere (in quanto le sue curve-sezioni sono di genere π) il genere π, contro l'ipotesi assurda che la generica Φ di Σ_r (e quindi la generica superficie-sezione Φ' di V_3') non sia riferibile ad una rigata di genere π.

che conto della proposizione (i) del n. 8 e del fatto che Φ' ha irregolarità $q_2 > 0$] $r < 3\pi + 6$, il che è in contrasto con la (2).

10. — Andiamo, *in primo luogo*, a considerare il caso che il sistema Σ_r sia semplice.

Poichè la generica superficie Φ, a norma di quanto stabilito nel n. 9, è riferibile birazionalmente a una rigata di genere π, tale risulta anche la generica superficie-sezione Φ' della varietà imagine V_3'. La Φ' è poi a curve-sezioni di genere π e quindi, per la proposizione (i) del n. 8, è una rigata di genere π. Da ciò segue immediatamente [10]) che la V_3' è una varietà S_2-*luogo* di genere π [11]) ed ha come direttrici le imagini delle curve caratteristiche del sistema Σ_r.

11. — Consideriamo, *infine*, il caso che il sistema Σ_r sia composto con un'inoluzione I_m (d'ordine $m \geq 2$).

Indicato con π' il genere della generica curva-sezione della varietà V_3' [in corrispondenza $(1, m)$ con la curva caratteristica di Σ_r di cui tale curva-sezione è imagine], vogliamo provare che risulta

$$r \geq 3\pi' + 8 . \tag{3}$$

Da una classica formula di ZEUTHEN discende

$$m(\pi' - 1) \leq \pi - 1 ,$$

quindi, tenuto conto della $m \geq 2$,

$$\pi' \leq \frac{\pi + 1}{2} .$$

Per giungere alla (3) basterà, pertanto, far vedere che

$$r \geq 3 \frac{\pi + 1}{2} + 8 ,$$

e questa è evidente in virtù della (2) e della $\pi \geq 3$.

---

10) Ved. nota 6).

11) Per genere di una varietà S_2-*luogo* s'intende il genere delle sue curve direttrici.

La (3), a norma della proposizione (i) del n. 8, ci permette di affermare che la generica superficie-sezione Φ della V_3' è rigata, quindi [ricordando anche quanto affermato nella nota [6])] che la V_3' stessa è una varietà S_2-*luogo*.

Ad un piano generatore della V_3' corrisponde sulla V_3 una superficie che si può supporre spezzata in $\frac{m}{s} \geq 1$ superficie componenti Ψ, essendo m un multiplo dell'intero s ($m \geq s \geq 1$).

La totalità delle superficie Ψ costituisce, ovviamente, un fascio.

Se $s = 1$, al generico piano generatore della V_3' corrispondono sulla V_3, m superficie Ψ, e ciascuna di queste è in corrispondenza birazionale con il piano generatore ora menzionato: sulla V_3' esiste dunque un fascio $|\Psi|$ di superficie razionali.

Un S_{r-2} generico dell'S_r ambiente della V_3', sega il generico piano generatore in un solo punto, quindi la varietà V_3' in una curva C' alla quale corrisponde su V_3 una curva C, unisecante le Ψ di $|\Psi|$. Sulla generica Ψ si può dunque determinare razionalmente un numero opportuno di punti, e pertanto — con semplici operazioni di proiezione — la V_3 può mutarsi in una varietà S_2-*luogo*, nella quale alle curve caratteristiche del sistema Σ_r corrispondono curve direttrici.

Se poi $s > 1$, risulta di conseguenza $r \leq 2\pi + 4$ [12]), il che contrasta con la (2).

12. — A norma dei risultati ottenuti nei nn. 8-11 si può enunciare il seguente

TEOREMA II: *Una varietà algebrica irriducibile a tre dimensioni, a superficie irregolari e contenente un sistema lineare Σ_r di superficie algebriche a curva caratteristica (variabile) irriducibile di genere $\pi \geq 3$ e di dimensione $r \geq 3\pi + 6$, è una varietà pseudo S_2-luogo e può birazionalmente mutarsi in una varietà S_2-luogo nella quale alle curve caratteristiche del sistema lineare Σ_r corrispondano curve direttrici.*

---

[12]) Ved. F. ENRIQUES, loc. cit. in [7]), n. 3.

Si può infine osservare che nessuna limitazione superiore può essere stabilita per la dimensione del sistema Σ_r in quanto una varietà S_2-*luogo,* di dato genere π, può ottenersi come proiezione di una varietà S_2-*luogo,* di uguale genere, appartenente ad uno spazio di dimensione comunque alta. Questa proprietà è l'immediata generalizzazione di quella analoga (dovuta a C. SEGRE) riguardante una superficie rigata a curve-sezioni di dato genere.