

RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

EMILIO GAGLIARDO

Un'osservazione sui criteri di unicità per gli integrali di un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 23 (1954), p. 214-223

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1954__23__214_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

UN'OSSERVAZIONE SUI CRITERI DI UNICITÀ PER GLI INTEGRALI DI UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE ORDINARIA DEL PRIMO ORDINE

Nota () di EMILIO GAGLIARDO (a Genova)*

I criteri di unicità per il problema di CAUCHY relativo ad una equazione differenziale ordinaria del primo ordine: $y' = f(x, y)$ sono stati oggetto di studio — anche recentemente — da parte di vari Autori ¹⁾.

I criteri trovati si riferiscono principalmente a soluzioni intese nel senso di CARATHÉODORY, cioè come funzioni assolutamente continue che soddisfano quasi ovunque l'equazione ²⁾.

Il principale scopo di questa Nota è quello di fare osservare come cambiando la classe delle funzioni da considerare come soluzioni dell'equazione differenziale, si possono dare dei nuovi criteri relativi all'unicità per il problema di CAUCHY, i quali non sussistono quando le soluzioni siano intese nel senso di CARATHÉODORY

(*)Pervenuta in Redazione il 21 gennaio 1954.

¹⁾ Per la bibliografia confronta: F. CAFIERO, *Sui teoremi di unicità relativi ad un'equazione differenziale*, ecc., «Giornale di Matematiche di Battaglini», serie IV, vol. 78, (1948), Memoria I, pp. 10-41, Memoria II, pp. 193-215; ed anche un lavoro di G. ZWIRNER, *Criteri di unicità per gli integrali*, ecc. «Rend. Sem. Mat.» di Padova, vol. XIX (1950), pp. 273-293. Cfr. anche: G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale*, (1949), parte II, cap. VIII.

²⁾ Alcuni teoremi delle Note citate in ¹⁾ si riferiscono a soluzioni intese come funzioni continue nel loro campo di esistenza, ivi quasi ovunque soddisfacenti all'equazione.

1. - In questo numero diamo un criterio di unicità il quale si riferisce a soluzioni intese come funzioni continue, derivabili a destra, e ovunque soddisfacenti all'equazione differenziale presa in considerazione.

Precisamente diremo che una funzione $y = y(x)$ è *soluzione di tipo (A)* dell'equazione $y' = f(x, y)$ se è *continua* e dotata di derivata destra $D^+y(x)$ in ogni punto e si ha *ovunque*: $D^+y(x) = f(x, y(x))$.

Sia $f(x, y)$ una funzione reale definita nel rettangolo $R: a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$, e ivi soddisfacente alla limitazione:

$$(1) \quad f(x, y) \leq g(x)$$

con $g(x)$ sommabile in (a, b) .

Per ogni punto α dell'intervallo $a \leq x < b$ si possano trovare un punto $\bar{\alpha} > \alpha$ e una funzione $\varphi(x)$ misurabile in $(\alpha, \bar{\alpha})$ e sommabile in ogni intervallo $(\alpha + \delta, \bar{\alpha})$ con $\delta > 0$, tali che risulti:

$$(2) \quad \min_{\delta \rightarrow 0^+} \lim_{\alpha + \delta}^{\bar{\alpha}} \int \left(\varphi(x) - \frac{1}{x - \alpha} \right) dx \neq +\infty^3)$$

$$(3) \quad f(x, y_1) - f(x, y_2) \leq \varphi(x)(y_1 - y_2)$$

quest'ultima essendo verificata per quasi tutti i valori di x appartenenti all'intervallo $(\alpha, \bar{\alpha})$, e per $y_1 > y_2$ appartenenti all'intervallo (c, d) .

Allora le eventuali soluzioni di tipo (A) dell'equazione differenziale $y' = f(x, y)$ sono, a destra del punto iniziale, univocamente determinate dal valore iniziale.

Osserviamo anzitutto che l'ipotesi (1) assicura ⁴⁾ l'assoluta continuità delle soluzioni che si considerano (e può essere soppressa se queste si suppongono già assolutamente continue ⁵⁾).

³⁾ Nel senso che questo minimo limite sia finito, oppure $-\infty$.

⁴⁾ Cfr. S. SAKS, *Theory of the Integral*, (1937), p. 271: Theorem (4.6), p. 285: Theorem (7.7). Alla (1) si potrebbe ovviamente sostituire la limitazione: $f(x, y) \geq g(x)$; in tale caso il teorema (7.7) cit., si applicherà alle funzioni in esame cambiate di segno.

⁵⁾ Pertanto quasi ovunque si ha: $D^+y(x) = y'(x)$.

Supponiamo ora per assurdo che da un punto P di R escano (verso destra) due integrali (del tipo (A)) distinti: siano essi: $y = y(x)$, $y = \bar{y}(x)$.

Sia allora β un valore interno ad (a, b) e maggiore dell'ascissa di P , dove si abbia: $\bar{y}(\beta) > y(\beta)$; per la continuità di $y(x)$, e $\bar{y}(x)$, la disuguaglianza: $\bar{y}(x) - y(x) > 0$ sarà verificata in un intorno sinistro di β avente estremo inferiore α (maggiore o eguale all'ascissa di P) in cui: $\bar{y}(\alpha) = y(\alpha)$.

Le funzioni: $y(x)$, $\bar{y}(x)$, dovendo soddisfare anche per $x = \alpha$ all'equazione differenziale data, hanno per $x = \alpha$ la stessa derivata destra, e quindi per x compreso nell'intervallo $\alpha < x \leq \beta$ si potrà scrivere:

$$(4) \quad \bar{y}(x) - y(x) = (x - \alpha)\varepsilon(x)$$

con:

$$(5) \quad \lim_{x \rightarrow \alpha+} \varepsilon(x) = 0$$

essendo inoltre nello stesso intervallo $\varepsilon(x) > 0$.

La funzione $\log \varepsilon(x)$ è ovviamente assolutamente continua in ogni intervallo chiuso interno all'intervallo $\alpha < x \leq \beta$ (poichè ivi $\varepsilon(x)$ — assolutamente continua — resta, per continuità, maggiore di una costante positiva) e la sua derivata è ivi quasi ovunque data da: $\varepsilon'(x)/\varepsilon(x)$.

È lecito scrivere pertanto, per ogni α^* compreso tra α e β :

$$(6) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_{\alpha+\delta}^{\alpha^*} \frac{\varepsilon'(x)}{\varepsilon(x)} dx = \lim_{\delta \rightarrow 0+} [\log \varepsilon(\alpha^*) - \log \varepsilon(\alpha + \delta)] = +\infty$$

Tenendo conto dell'ipotesi (3) si ha quasi ovunque in (α, β) :

$$\varphi(x) \geq \frac{f(x, \bar{y}(x)) - f(x, y(x))}{\bar{y}(x) - y(x)} = \frac{\bar{y}'(x) - y'(x)}{\bar{y}(x) - y(x)}$$

Dalla (4) segue allora, quasi ovunque in (α, β) :

$$\varphi(x) \geq \frac{1}{x - \alpha} + \frac{\varepsilon'(x)}{\varepsilon(x)}$$

Infine tenendo conto anche della (6) si ottiene:

$$(7) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{\alpha+\delta}^{\alpha^*} \left(\varphi(x) - \frac{1}{x-\alpha} \right) dx = +\infty.$$

Quest'ultima relazione sussiste ovviamente anche se α^* è maggiore di β , cioè per ogni $\alpha^* > \alpha$, purchè naturalmente la funzione $\varphi(x)$ sia sommabile in ogni intervallo del tipo: $(\alpha + \delta, \alpha^*)$ con $\delta > 0$.

Si è giunti con ciò ad un assurdo, in quanto per il valore trovato α non si può determinare alcun valore $\bar{\alpha} > \alpha$ per cui sia verificata l'ipotesi (2).

Il teorema resta così dimostrato.

Osserviamo ora che il criterio dimostrato non è valido rispetto alle (eventuali) soluzioni continue che non soddisfacciano ovunque all'equazione.

Consideriamo infatti il seguente esempio: sia $f(x, y)$ una funzione definita con la seguente legge: $f(x, y) = 0$ per $x = 0$, $f(x, y) = y/x$ per $|y| \leq |x| \neq 0$, $f(x, y) = xy/|xy|$ per $|y| > |x| \neq 0$; in tal caso sono verificate tutte le ipotesi del teorema ove si prenda: $g(x) = 1$, $\varphi(x) = 1/x$. Dal punto $(0, 0)$ escono infiniti integrali soddisfacenti quasi ovunque all'equazione (le rette: $y = mx$, con $|m| \leq 1$), ma uno solo di essi ($y = 0$) soddisfa *ovunque* all'equazione (anche nel punto iniziale).

Osserviamo ancora che, se nell'integrando della (2) in luogo di $\frac{1}{x-\alpha}$ si scrive $\frac{k}{x-\alpha}$, il teorema non è più vero non appena si prende $k > 1$. Infatti per l'equazione: $y' = f(x, y)$ con $f(x, y)$ definita dalla seguente legge: $f(x, y) = 0$ per $x = 0$, $f(x, y) = ky/x$ per $|y| \leq |x|^k \neq 0$, $f(x, y) = xy \cdot k |x|^{k-1} / |xy|$ per $|y| > |x|^k \neq 0$, sarebbero verificate tutte le ipotesi di tale enunciato (con $k > 1$) ove si prenda: $g(x) = k |x|^{k-1}$, $\varphi(x) = k/x$, mentre dal punto $(0, 0)$ escono infiniti integrali (del tipo: $y = mx^k$ con $|m| \leq 1$) tutti soddisfacenti all'equazione anche nel punto iniziale.

2. - Il primo dei due esempi dati sopra prova che il criterio del n. 1 non rientra in alcuni dei criteri noti che si riferiscono a soluzioni assolutamente continue soddisfacenti all'equazione differenziale quasi ovunque⁶⁾.

Se nell'enunciato del n. 1 la funzione $\varphi(x)$ che compare nella (3) si suppone sommabile in $(\alpha, \bar{\alpha})$ — con il che la (2) è certamente verificata — allora l'unicità è assicurata rispetto alle soluzioni nel senso di CARATHÉODORY da un noto criterio di TONELLI⁷⁾.

In base a questa osservazione si può porre la questione di sapere se, sostituendo nell'enunciato precedente l'ipotesi (2) con un'altra meno generale, il nuovo criterio è valido rispetto a soluzioni intese in senso più generale di quanto fatto precedentemente.

Dimostriamo nei nn. seguenti che la risposta a questo quesito è affermativa.

3. - Diremo che una funzione $y = y(x)$ è una *soluzione di tipo (B)* dell'equazione data se $y(x)$ è una funzione *continua* e la sua derivata destra approssimativa (o asintotica)⁸⁾: $D_{ap}^+ y(x)$ esiste ovunque e soddisfa *ovunque* all'equazione.

Sotto le stesse ipotesi del teorema del n. 1, quando la (2) si sostituisca con la:

$$(2') \quad \max_{\delta \rightarrow 0+} \lim_{ap} \int_{\alpha+\delta}^{\bar{\alpha}} \left(\varphi(x) - \frac{1}{x-\alpha} \right) dx \neq +\infty$$

le eventuali soluzioni di tipo (B) dell'equazione differenziale

⁶⁾ Esso non rientra neppure, come è ovvio, nei noti criteri in cui la $f(x, y)$ è supposta continua (o uniformemente continua rispetto ad y) appunto perchè nella presente Nota non viene formulata per la $f(x, y)$ alcuna ipotesi di continuità.

⁷⁾ Per una forma più affinata confronta: G. SCORZA DRAGONI, *Sugli integrali dell'equazione $y' = f(x, y)$* . «Rend. Acc. Naz. Lincei», (6) (1929) IX, pp. 378-382.

⁸⁾ Per la definizione e le proprietà del limite e delle derivate approssimative (o asintotiche), vedi S. SAKS, loc. cit., pp. 218-220.

$y' = f(x, y)$ sono, a destra del punto iniziale univocamente determinate dal valore iniziale.

Osserviamo a tale scopo anzitutto che una soluzione di tipo (B) dell'equazione $y' = f(x, y)$ è, per la (1)⁹⁾, assolutamente continua¹⁰⁾.

Per dimostrare il criterio ora enunciato basta ragionare come si è fatto al n. 1; si ottiene però in luogo della (5) la relazione:

$$(5') \quad \lim_{x \rightarrow \alpha^+} \text{ap } \varepsilon(x) = 0.$$

Infatti, chiamando M il comune valore delle derivate destre approssimative di $y(x)$, $\bar{y}(x)$, calcolate in $x = \alpha$, per ogni fissato $\sigma > 0$ gli insiemi (a destra di α) ove sono verificate le disuguaglianze:

$$\left| \frac{y(x) - y(\alpha)}{x - \alpha} - M \right| < \sigma/2; \quad \left| \frac{\bar{y}(x) - \bar{y}(\alpha)}{x - \alpha} - M \right| < \sigma/2$$

devono avere α come punto di densità 1; α sarà allora anche punto di densità 1 per il prodotto di questi due insiemi, sul quale sussisterà la relazione:

$$0 < \varepsilon(x) = \frac{\bar{y}(x) - y(x)}{x - \alpha} = \frac{\bar{y}(x) - \bar{y}(\alpha)}{x - \alpha} - \frac{y(x) - y(\alpha)}{x - \alpha} < \sigma$$

la quale dimostra la (5').

Procedendo come al n. 1 otterremo in luogo delle (6), (7), le relazioni:

$$(6') \quad \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \text{ap}_{\alpha+\delta}^{\alpha^*} \int \frac{\varepsilon'(x)}{\varepsilon(x)} dx = +\infty$$

$$(7') \quad \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \text{ap}_{\alpha+\delta}^{\alpha^*} \int \left(\varphi(x) - \frac{1}{x - \alpha} \right) dx = +\infty$$

⁹⁾ S. SAKS, loc. cit., p. 240: nota in calce, p. 225: Theorem (6.1), p. 285: Theorem (7.7).

¹⁰⁾ Pertanto quasi ovunque si ha: $D_{\text{ap}}^+ y(x) = y'(x)$.

la quale ultima contraddice all'ipotesi (2'). Il teorema è così dimostrato.

4. - Seguendo ancora l'ordine di idee del n. 2 ci riferiamo alle soluzioni intese come funzioni *continue* soddisfacenti ovunque all'equazione con la loro derivata destra superiore.

Precisamente diremo che una funzione *continua* $y = y(x)$ è una *soluzione del tipo (C)* se la derivata destra superiore $\bar{D}^+ y(x)$ esiste ovunque finita, e si ha ovunque: $\bar{D}^+ y(x) = f(x, y(x))$.

Sussiste il seguente criterio:

Sotto le stesse ipotesi del teorema del n. 1, quando la (2) si sostituisce con la:

$$(2'') \quad \max_{\delta \rightarrow 0^+} \lim_{\alpha + \delta} \int_{\alpha}^{\alpha + \delta} \left(\varphi(x) - \frac{1}{x - \alpha} \right) dx \neq +\infty$$

le eventuali soluzioni di tipo (C) dell'equazione differenziale sono, a destra del punto iniziale univocamente determinate dal valore iniziale.

Una soluzione di tipo (C) dell'equazione differenziale data, a causa della (1) è intanto assolutamente continua¹¹⁾.

Per dimostrare questo criterio basta ancora ragionare come al n. 1 pervenendo però in luogo della (5) alla relazione:

$$(5'') \quad \min_{x \rightarrow \alpha^+} \lim \varepsilon(x) = 0.$$

Infatti, chiamando M il comune valore delle derivate destre superiori di $\bar{y}(x)$, $y(x)$, calcolate per $x = \alpha$, si ha:

$$(8) \quad \begin{aligned} \max_{x \rightarrow \alpha^+} \lim \frac{y(x) - y(\alpha)}{x - \alpha} &= M \\ \max_{x \rightarrow \alpha^+} \lim \frac{\bar{y}(x) - \bar{y}(\alpha)}{x - \alpha} &= M \end{aligned}$$

Per la prima di queste due relazioni, si potrà trovare una

¹¹⁾ Per i Teoremi citati in 4).

successione decrescente: $\{x_n\} \rightarrow \alpha +$ tale che:

$$(9) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y(x_n) - y(\alpha)}{x_n - \alpha} = M$$

ricordando ora la disuguaglianza:

$$\varepsilon(x) = \frac{\bar{y}(x) - y(x)}{x - \alpha} = \frac{\bar{y}(x) - \bar{y}(\alpha)}{x - \alpha} - \frac{y(x) - y(\alpha)}{x - \alpha} > 0$$

si ottiene:

$$\min \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{y}(x_n) - \bar{y}(\alpha)}{x_n - \alpha} \geq M$$

ma tenendo conto della (8) si deduce:

$$(10) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{y}(x_n) - \bar{y}(\alpha)}{x_n - \alpha} = M$$

e quindi, dalle (9), (10):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\bar{y}(x_n) - \bar{y}(\alpha)}{x_n - \alpha} - \frac{y(x_n) - y(\alpha)}{x_n - \alpha} \right] = 0$$

ed essendo $\varepsilon(x) > 0$ la (5'') resta dimostrata.

Inoltre in luogo delle (6), (7), porremmo alle relazioni:

$$(6'') \quad \max_{\delta \rightarrow 0+} \lim_{\alpha+\delta}^{\alpha^*} \int \frac{\varepsilon'(x)}{\varepsilon(x)} dx = +\infty$$

$$(7'') \quad \max_{\delta \rightarrow 0+} \lim_{\alpha+\delta}^{\alpha^*} \int \left(\varphi(x) - \frac{1}{x - \alpha} \right) dx = +\infty$$

la quale ultima contraddice all'ipotesi (2''). Il teorema è così dimostrato.

5. - I criteri precedentemente trovati si riferiscono a soluzioni che soddisfano *ovunque* l'equazione differenziale; il criterio che ora diamo si riferisce invece a soluzioni continue che soddisfano *quasi ovunque* l'equazione differenziale, ma che hanno in ogni punto numeri derivati finiti.

Diremo che una funzione continua $y = y(x)$ è una *soluzione di tipo (D)* dell'equazione differenziale $y' = f(x, y)$ se $y(x)$ ha numeri derivati destri finiti in ogni punto e di conseguenza derivata quasi ovunque¹²⁾, per la quale si abbia quasi ovunque: $y'(x) = f(x, y(x))$.

A questo proposito dimostriamo il seguente criterio:

Sotto le stesse ipotesi del teorema del n. 1, quando la (2) si sostituisca con la seguente:

$$(2''') \quad \min \lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_{\alpha+\delta}^{\bar{\alpha}} \left(\varphi(x) - \frac{1}{x-\alpha} \right) dx = -\infty$$

le eventuali soluzioni di tipo (D) dell'equazione differenziale $y' = f(x, y)$ sono, a destra del punto iniziale, univocamente determinate dal valore iniziale.

Analogamente a quanto abbiamo già osservato nei nn. precedenti, anche le soluzioni di tipo (D) della equazione data sono, a causà della (1), assolutamente continue¹³⁾.

Procedendo nella dimostrazione in modo analogo al n. 1 otteniamo in luogo della (5) la relazione:

$$(5''') \quad \max\text{-}\lim_{x \rightarrow \alpha+} \varepsilon(x) \neq +\infty.$$

Infatti chiamando M, N , i numeri derivati destri rispettivamente superiore e inferiore di $\bar{y}(x)$, e di $y(x)$, calcolati per $x = \alpha$, si ha ovviamente:

$$\begin{aligned} \max \lim_{x \rightarrow \alpha+} \varepsilon(x) &= \max \lim_{x \rightarrow \alpha+} \left[\frac{\bar{y}(x) - y(x)}{x - \alpha} \right] = \max \lim_{x \rightarrow \alpha+} \left[\frac{\bar{y}(x) - \bar{y}(\alpha)}{x - \alpha} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{y(x) - y(\alpha)}{x - \alpha} \right] \leq \max \lim_{x \rightarrow \alpha+} \left[\frac{\bar{y}(x) - \bar{y}(\alpha)}{x - \alpha} \right] - \\ &\quad - \min \lim_{x \rightarrow \alpha+} \left[\frac{y(x) - y(\alpha)}{x - \alpha} \right] = M - N \neq +\infty. \end{aligned}$$

¹²⁾ S. SAKS, loc. cit., p. 270: Theorem (4.2)

¹³⁾ Ancora per i Teoremi citati in 4).

Seguitando a ragionare come al n. 1 otterremo, in luogo delle (6), (7), le relazioni:

$$(6''') \quad \min \lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_{\alpha+\delta}^{\alpha^*} \frac{\varepsilon'(x)}{\varepsilon(x)} dx \neq -\infty$$

$$(7''') \quad \min \lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_{\alpha+\delta}^{\alpha^*} \left(\varphi(x) - \frac{1}{x-\alpha} \right) dx \neq -\infty$$

la quale ultima contraddice all'ipotesi (2'''). Il teorema è così dimostrato.

Mostriamo ora, con un esempio, che le ipotesi del criterio di questo numero non sono sufficienti ad assicurare l'unicità delle soluzioni nel senso di CARATHÉODORY. Sia $f(x, y) = 0$ per $x = 0$; $f(x, y) = ky/x$, con $0 < k < 1$, per $|y| \leq |x|^k \neq 0$; $f(x, y) = xy \cdot k|x|^{k-1}/|xy|$ per $|y| > |x|^k \neq 0$. Le ipotesi del teorema sono verificate assumendo $g(x) = k|x|^{k-1}$, $\varphi(x) = = k/x$. Gli integrali, assolutamente continui e soddisfacenti quasi ovunque all'equazione, che escono dal punto $(0, 0)$ sono infiniti ($y = mx^k$, $|m| \leq 1$) ma uno solo di essi ($y = 0$) ha anche nel punto iniziale numeri derivati destri finiti.