RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

EDMONDO MORGANTINI

Sulle varietà tridimensionali contenenti una rete lineare di superficie razionali irriducibili

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 23 (1954), p. 100-126

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1954__23__100_0>

SULLE VARIETÀ TRIDIMENSIONALI CONTENENTI UNA RETE LINEARE DI SUPERFICIE RAZIONALI IRRIDUCIBILI

Nota (*) *di* EDMONDO MORGANTINI (*a Padova*)

F. ENRIQUES in una sua classica Memoria [1]) ha dato anche una prima classificazione birazionale delle varietà algebriche tridimensionali contenenti una rete lineare irriducibile di superficie razionali, assumendone come modelli i seguenti tipi:

1) S_3 semplice; oppure
2) S_3 doppio con superficie di diramazione di un certo ordine $2m$ con:
   a) una retta $(2m-4)$-pla; oppure
   b) un punto $(2m-2)$-plo; oppure
   c) due punti prossimi $(2m-3)$-pli, congiunti da una retta $(2m-6)$-pla.

D'altra parte G. FANO [2]) ha dimostrato che le V_3 a superficie sezioni razionali sono tutte razionali, ad eccezione della forma cubica dell'S_4.

U. MORIN [3]) ha poi fra l'altro determinato i diversi tipi

(*) Pervenuta in Redazione il 7 ottobre 1953.

1) F. ENRIQUES, *Sulle irrazionalità da cui può farsi dipendere la risoluzione di una equazione algebrica* $f(x, y, z) = 0$ *con funzioni razionali di due parametri* (Mathem. Annalen. Bd. 49 (1897), pp. 1-23); confr. anche F. CONFORTO, *Le superficie razionali* (Bologna, Zanichelli, 1939), pp. 501-513.

2) G. FANO, *Sulle varietà algebriche a tre dimensioni a superficie sezioni razionali* (Annali di Matem. (3), T. XXIV (1915), p. 49 e segg.).

3) U. MORIN, *Sulla classificazione proiettiva delle varietà a superficie sezioni razionali* (Annali di matem. (4), T. XVIII (1939), p. 147 e segg.).

proiettivamente distinti delle varietà studiate dal FANO, fornendo così una classificazione cremoniana dei sistemi lineari semplici di dimensione maggiore di tre di superficie razionali dell'S_3.

M. BALDASSARRI [4]) si è occupato delle V_3 contenenti un sistema lineare ∞^3 di superficie razionali, composto con una involuzione di punti. Anche queste — escluse quelle trasformabili in una forma cubica dell'S_4 — sono tutte razionali.

Successivamente lo stesso BALDASSARRI [5]) si è occupato anche delle V_3 contenenti un fascio lineare di superficie razionali, semplificando la classificazione invariantiva già datane dall'ENRIQUES [6]). Egli è riuscito a dimostrare che queste V_3 possono ridursi ai quattro tipi già ricordati sopra a proposito delle V_3 con rete lineare di superficie razionali.

Sicchè il problema della classificazione birazionale di quelle V_3 restava ancora insoluto: esso viene risolto in questa Nota, col teorema enunciato nel paragrafo seguente.

* * *

Nei lavori citati, oltre ai classici risultati [7]) inerenti alla classificazione delle superficie e delle varietà a curve sezioni razionali, allittiche od iperellittiche, si sfrutta essenzialmente il processo di aggiunzione [8]) sui sistemi lineari di curve e di

---

[4]) M. BALDASSARRI, *Sulle V_3 contenenti un sistema lineare triplamente infinito di superficie razionali* (Rendiconti Sem. Matem. Padova, Vol. XX (1951), pp. 135-152).

[5]) M. BALDASSARRI, *Una condizione per l'esistenza di unisecanti* (Rend. Acc. Naz. Lincei (8), vol. XII (1952), pp. 390-97).

[6]) l. cit. [1]).

[7]) Confr. ad es. F. ENRIQUES, *Sui sistemi lineari di superficie algebriche ad intersezioni variabili iperellittiche* (Mathem. Annalen, Bd. 46 (1895), p. 179 e segg.), dove sono citati anche i risultati precedenti di diversi Autori; G. SCORZA, *Le varietà a curve sezioni ellittiche* (Annali di Matem. (3), T. XV (1908), p. 217 e segg.).

[8]) Confr. F. SEVERI, *Fondamenti per la Geometria sulle varietà algebriche* (Rend. Circ. Matem. Palermo, t. XXVIII (1909), p. 37 e segg.); *Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche* [Annali di Matem. (4), T. XXXII (1951)].

superficie considerati. Esso permette di precisare la natura algebrica e — se occorre — anche il tipo proiettivo di quei sistemi [9]).

L'ENRIQUES perviene alla sua provvisoria classificazione delle V_3 con rete di superficie razionali applicando il procedimento di aggiunzione al sistema delle sezioni piane della singola superficie razionale e determinando i tipi di superficie razionali birazionalmente distinti di fronte alla introduzione di eventuali irrazionalità aritmetiche nei parametri del sistema in cui variano.

D'altra parte il FANO ed il MORIN hanno applicato con successo il procedimento di aggiunzione direttamente al sistema lineare delle superficie razionali considerate sulla V_3. Si può così pervenire alla costruzione di sistemi lineari di superficie razionali diversi da quello dato.

In questo lavoro si sfrutta tale procedimento globale anche per la definitiva classificazione birazionale di quelle V_3 sulle quali è data una rete lineare irriducibile $|\Phi|$ di superficie razionali. I risultati ottenuti possono riassumersi nel seguente teorema:

Una varietà tridimensionale V_3 contenente una rete lineare di superficie razionali si può sempre rappresentare:

I) *sopra un S_3 semplice; oppure*

II) *sopra un S_3 doppio, con una superficie di diramazione:*

A) *di ordine $2m$, dotata di un punto $(2m-2)$-plo; oppure*

B) *di ordine* 6, *dotata di un punto triplo, cui è prossima una retta tripla infinitesima.*

Come era prevedibile, scompaiono quei modelli (2_a, 2_c) della classificazione provvisoria dell'ENRIQUES, dai quali non ri-

---

[9]) Un ampio e recente ragguaglio sullo stato attuale della teoria e sulla vasta letteratura inerente alla varietà tridimensionali si trova nella monografia di L. ROTH: *Algebraic Threefolds* (Rend. Matem. Roma (5) vol. X (1951), p. 297 e segg.). Una monografia più vasta sullo stesso soggetto è quella che sta preparando M. BALDASSARRI per la collezione degli *Ergebnisse der Mathematik* dell'editore SPRINGER.

sulta a priori che sulla V_3 esista una rete lineare di superficie razionali. È vero che — se generali — quegli spazi doppi sono birazionalmente distinti tra loro e dagli altri; tuttavia la postulata esistenza di quella rete li particolarizza facendo appunto sparire il tipo 2_a e trasformando il tipo 2_c in quello II_B.

* * *

Premesse alcune generalità (n. 1), si costruisce (n. 2) un modello proiettivo W_3 della nostra varietà, appartenente all'S_4. Dalla sua considerazione risulta che la parte variabile delle curve caratteristiche della rete $|\Phi|$ si può sempre ritenere irriducibile.

Ricordate (nn. 4-5) le proprietà dei sistemi lineari successivi aggiunti puri a quello delle sezioni iperpiane delle singole superficie Φ, nel n. 6 si descrive il procedimento globale di aggiunzione che nei seguenti nn. 10-17 verrà usato — quando la V_3 sia completamente regolare — su di un suo modello (n. 3) in cui le superficie Φ siano prive di punti multipli propri.

Quindi, dopo aver distinto i vari casi possibili (n. 7), dapprima si studia direttamente (n. 8) il caso in cui le curve sezioni iperpiane della generica superficie razionale Φ della rete siano razionali od ellittiche. Allora sono addirittura superficie razionali o riferibili a rigate ellittiche le sezioni iperpiane della V_3, sicchè essa è razionale o riferibile ad una forma cubica dell'S_4.

Si considera poi il caso in cui il genere delle sezioni iperpiane della generica Φ è maggiore di uno. Se su di essa l'ultimo sistema lineare $|C|$ aggiunto puro al sistema di quelle sezioni è composto con il fascio delle componenti variabili delle curve caratteristiche della rete, e queste sono razionali, allora (n. 9) si cade nell'S_3 doppio con superficie di diramazione di ordine $2m$ con punto $(2m-2)$-plo, ossia in una di quelle notevoli forme $W_3{}^n$ dell'S_4 dotate di retta $(n-2)$-pla, delle quali la forma cubica è un caso particolare.

Nel n. 10 si premettono alcune osservazioni per il caso in cui il fascio delle curve caratteristiche γ appartenenti alla generica superficie Φ non coincida con quello con cui è eventualmente composto il sistema $|C|$.

Allora, se le curve C sono razionali, si dimostra che la V_3 è razionale. Invece, se le curve C sono ellittiche (nn. 12-17), la V_3 può essere razionale o riferibile ad una forma cubica dell'S_4. La dimostrazione della razionalità di V_3 è particolarmente riposta nel caso (nn. 14-16) che $|C|$ sia un fascio, e la si consegue solo dopo aver rappresentato doppiamente la V_3 su di un S_1-cono quadrico dell'S_4.

Infine si studia direttamente il caso in cui le curve γ sono ellittiche e coincidono con le curve C. Si riconosce allora (nn. 18-20), dopo averla rappresentata doppiamente su di un S_0-cono di VERONESE dell'S_6, che la V_3 si può trasformare in un S_3 doppio del tipo $\mathrm{II_B}$.

1. — Sia data, in uno spazio lineare $S_r (r \geq 4)$, una varietà algebrica irriducibile tridimensionale V_3, e su di essa sia data una *rete lineare* $|\Phi|$, *irriducibile, di superficie razionali.*

Tale rete è necessariamente composta con una *congruenza razionale* K_2, *di indice uno, di curve* Γ.

La K_2 è razionale, come l'insieme dei fasci lineari contenuti nella rete, e di indice uno, giacchè per un punto generico di V_3 passano solo le superficie Φ di uno di quei fasci, e quindi una ben determinata curva Γ, che di quel fascio è la linea base.

Su ogni Φ le altre superficie della rete segano un fascio lineare di curve Γ.

Si noti che, a prescindere dalle eventuali curve fisse, base della rete, le curve Γ possono essere riducibili:

$$\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 \dots + \gamma_\mu \qquad (\mu \geq 1).$$

Anche l'insieme delle componenti variabili ed irriducibili $\gamma_i (i = 1, \dots, \mu)$ è una congruenza k_2, ∞^2 e di indice uno.

Quelle γ_i che giacciono su una fissata delle superficie razionali Φ costituiscono un fascio k_1, necessariamente lineare, con cui è composto quello delle curve Γ che appartengono alla stessa Φ. Pertanto la congruenza k_2, pensata come ente ∞^2 (di curve γ), cioè come una superficie π i cui punti sono le immagini delle curve γ, appare ricoperta da una rete lineare di curve razionali σ (immagini dei fasci lineari k_1), composta con una involuzione di gruppi di μ punti.

Dunque la superficie π è razionale, cioè *è razionale la congruenza* k_2.

2. — Assunto, com'è lecito, come modello della superficie razionale π un piano π dell'S_4, e presa nello stesso S_4 una retta l indipendente da π, si può costruire un modello proiettivo W_3 della data V_3, contenuto nell'S_4, nel quale le curve γ hanno per immagini le curve γ variabili segate su W_3 dai piani per l.

Basta perciò dapprima riferire per proiezione la stella di piani di asse l al piano punteggiato π. Così quella stella resta riferita birazionalmente alla congruenza k_2. Quindi si proietta sul piano generico della stella la curva γ ad esso corrispondente, da un centro O fissato genericamente in S_4

Infine, se occorre, la curva piana proiezione di γ si può trasformare cremonianamente (senza introdurre irrazionalità aritmetiche nei parametri della stella) in un suo modello di proprietà proiettive opportune. Ad. es. in uno di ordine minimo; oppure, se γ non è iperellittica, tale che le sue sezioni rettilinee siano gruppi canonici.

Le superficie Φ sono segate sulla W_3 dagli S_1-coni che da l proiettano le curve della rete $|\sigma|$ del piano π. Se $|\sigma|$ è omaloidica, cioè se $\mu = 1$, cioè se la parte variabile delle curve caratteristiche della rete $|\Phi|$ è irriducibile, si può addirittura supporre che la rete $|\sigma|$ sia quella delle rette del piano π. Allora le superficie Φ sono segate sulla W_3 dagli S_3 per l.

Si noti che se la rete $|\sigma|$ non è omaloidica, ma di grado $\mu > 1$, essa è contenuta totalmente in un sistema lineare completo $L_{\mu+1}$, $\infty^{\mu+1}$, che possiede gli stessi punti base della rete.

Proiettando $L_{\mu+1}$ dalla retta l si ottiene un sistema lineare completo di coni, i quali segano sulla W_3 un sistema lineare completo $\infty^{\mu+1}$ di superficie Φ^*, che ha la stessa varietà base della rete $|\Phi|$, la quale è contenuta totalmente in esso.

D'altra parte le singolarità della superficie generica di un sistema lineare completo irriducibile cadono sulla sua varietà base, che le determina. Ma la generica Φ non può avere altre singolarità oltre quelle che possiede la generica Φ^*, altrimenti la rete $|\Phi|$ non avrebbe la stessa varietà base di $|\Phi^*|$. Dunque la generica Φ^* ha lo stesso ordine e le stesse singolarità della generica Φ. Si può anche ammettere — data la linearità della rete $|\Phi|$ — che la varietà delle trisecanti della generica Φ^* abbia gli stessi caratteri proiettivi di quella della generica Φ, cosicchè la generica Φ^* e la generica Φ hanno gli stessi caratteri birazionali.

Pertanto *anche la generica* Φ^* *è razionale.*

Ora, con l'imposizione di $\mu - 1$ punti base fissati genericamente nel piano π, dal sistema $L_{\mu+1}$ si può estrarre una rete *omaloidica* di curve σ, e quindi — tornando sulla W_3 — dal sistema $|\Phi^*|$ si può estrarre una rete lineare di superficie razionali, che indicheremo ancora con $|\Phi|$, ma tale che le componenti variabili delle sue curve caratteristiche siano irriducibili.

In altre parole: *si può sempre supporre che la parte variabile* γ *delle curve caratteristiche della rete* $|\Phi|$ *sia irriducibile.*

3. — Com'è noto [10]), la generica superficie Φ si può trasformare birazionalmente in un'altra priva di punti multipli propri (cioè tali da abbassare il genere delle sezioni iperpiane per essi) senza che si debbano introdurre irrazionalità aritmetiche nei parametri della rete. Si può anzi ammettere che si possa costruire un modello W_3^0 della W_3 — il cui spazio ambiente può essere di dimensione maggiore di quattro — tale che in esso *la generica* Φ *sia priva di punti multipli propri.*

D'altra parte — in uno spazio di dimensione opportuna — si può anche [11]) costruire un modello $\overline{W}_3$ della data V_3 che sia *privo di singolarità.*

---

10) Confr. F. ENRIQUES, l. cit. 1), p. 7.

11) Cfr. O. ZARISKI, *Reduction of the singularities of algebraic three dimensional varieties* (Annals of Math. (2) vol. 45 (1944), p. 472); B. SEGRE, *Sullo scioglimento delle singolarità delle varietà algebriche* (Annali di Matem. (4) T. 33 (1952)).

A seconda dei casi ci riferiremo nel seguito all'uno od all'altro di questi modelli.

4. — Con riferimento al modello $W_3{}^0$, indichiamo con $|E|$ il sistema lineare — semplice, irriducibile e privo di curve fondamentali proprie — delle curve sezioni iperpiane della generica superficie razionale Φ. *Se il genere delle curve* E *è* >1, sulla Φ resta razionalmente determinato ed è *effettivo* il sistema lineare completo $|E_1|$, primo aggiunto puro a quello $|E| = |E_0|$. Invece è virtuale il sistema canonico $|E_1 - E| = |E_1 - E_0|$.

Saranno anche razionalmente determinati ed effettivi i sistemi lineari completi, successivi aggiunti puri (di indice uno [12]) a quello $|E|$:

$$|E_0| = |E|\,,\ |E_1|\,,\ |E_2|\,,\ \dots,\ |E_{k-1}| = |C_1|\,,\ |E_k| = |C|\,.$$

Ora G. CASTELNUOVO [13]) ha dimostrato che: *l'operazione di aggiunzione successivamente applicata nel piano a partire da un sistema lineare irriducibile, semplice e privo di curve fondamentali proprie, conduce sempre ad uno dei seguenti sistemi*:

1) *Sistema lineare* (∞^1 almeno) *di curve razionali, determinato dal gruppo dei punti base* (se il sistema ha dimensione >1 esso è semplice e non possiede curve fondamentali proprie, cioè non è rappresentativo di un cono).

2) *Sistema lineare, irriducibile, semplice* (∞^3 almeno) *di curve ellittiche, privo di curve fondamentali proprie, determinato dal gruppo base.*

3) *Rete di curve ellittiche, riducibile* (per trasformazione birazionale) *alla rete delle cubiche passanti per 7 punti base.*

---

12) Usando la terminologia di L. NOLLET, *Recherches sur les systémes linéaires de courbes algébriques planes* (Mém. Soc. R. d. Sc. Liége (4) T. VII (1947), pp. 469-554).

13) Vedi F. ENRIQUES, *Sui piani doppi di genere uno* (Mem. Soc. It. delle Scienze, (3), T. X (1896), pp. 201-221), p. 209, e la nota aggiunta a p. 222 da G. CASTELNUOVO.

4) *Sistema lineare* ∞^3 *di curve di genere due, riducibile al sistema delle sestiche con otto punti base doppi.*

Si tenga inoltre presente che:

a) Nel caso 1), quando l'ultimo sistema aggiunto è composto con le curve razionali R di un fascio, queste bisecano le curve (iperellittiche) C_1 del penultimo aggiunto, che è irriducibile.

b) Nel caso 4) l'aggiunto successivo è un fascio $|C|$ di curve ellittiche, trasformabile cremonianamente nel fascio delle cubiche per gli 8 punti base del sistema delle sestiche C_1.

Sicchè intanto si può sempre supporre che il sistema $|C|$ sia almeno ∞^1 e che le curve C siano irriducibili ed ellittiche o razionali, oppure — se riducibili — composte con le curve razionali di un fascio R.

5. — Inoltre, nel caso che $|C|$ sia un fascio di curve ellittiche, il penultimo aggiunto $|C_1|$ è un sistema lineare ∞^3 di curve di genere due e grado quattro, di cui fa parte la rete lineare delle curve spezzate in coppie di curve C, ed è composto con una involuzione di coppie di punti I_2.

La rappresentazione della generica superficie Φ nel piano semplice e la trasformazione cremoniana del sistema $|C_1|$ nel sistema delle sestiche con 8 punti base doppi $A_1, A_2, \ldots, A_8$ possono anche comportare l'introduzione di irrazionalità aritmetiche nei parametri della rete $|\Phi|$. Il fascio $|C|$ diviene il fascio delle cubiche per $A_1, \ldots, A_8$, il quale possiede anche un ulteriore punto base A_9, determinato dai precedenti. La I_2 diviene la involuzione di BERTINI, che su ogni cubica ellittica C determina una serie lineare g_2^1, uno dei cui quattro punti doppi cade in A_9.

Tuttavia, ritornando sulla Φ, si riconosce a posteriori che su ciascuna delle C resta determinato razionalmente un punto $A = A_9$, fisso o variabile con C, e quindi sulla Φ resta determinata una curva razionale a, infinitesima o finita, unisecante le C.

Converrà osservare esplicitamente che per un punto generico P di Φ passano ∞^2 curve C_1 ed una curva C, che contiene il punto P' coniugato di P nella I_2, anche per il quale passano tutte le $\infty^2\, C_1$.

Tra queste $\infty^2\, C_1$ ve ne sono ∞^1 spezzate nella C per P ed in un'altra C arbitraria.

Se però la scelta di P è tale che sulla C per esso sia $P = P' = A$, allora tutte le ∞^2 curve C_1 per P si spezzano nella curva fondamentale α ed in una coppia arbitraria di curve C. In particolare se ne deduce che la curva fondamentale α si deve pensare come facente parte di tutte le C_1 spezzate in coppie di curve C.

La Φ, senza introdurre irrazionalità aritmetiche e riferendo proiettivamente le curve C_1 ai piani di un S_3, si può trasformare in un *cono quadrico doppio con sestica di diramazione* di genere quattro, trisecante le generatrici del cono e situata sopra una superficie cubica. Le generatrici del cono sono le immagini delle curve ellittiche C, sulle quali il vertice è il quarto punto di diramazione $A = A_9$.

Infine, determinato che sia un punto del cono distinto dal vertice, cioè una coppia generica della I_2, proiettandolo da esso su di un piano generico del suo ambiente S_3, la Φ si trasforma in un *piano doppio con sestica di diramazione, dotata di due punti tripli infinitamente vicini*[14]).

6. — Sul modello W_3^0 della nostra V_3 sono per ipotesi razionalmente determinati due sistemi lineari di superficie: quello $|F|$ delle sezioni iperpiane e la rete $|\Phi|$.

Sul modello privo di singolarità $\overline{W}_3$ saranno quindi razionalmente determinati anche il sistema lineare completo $|F + \Phi|$ ed il suo aggiunto, spogliato dalle eventuali componenti fisse, e si potrà scrivere:

$$|(F + \Phi)'| = |F + \Phi'| \,. \tag{1}$$

Le superficie del sistema (1) tagliano sulla generica Φ,

---

14) Cfr. F. ENRIQUES - L. CAMPEDELLI, *Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche* (Padova, C.E.D.A.M., 1930), p. 409.

fuori di eventuali curve fisse, curve del sistema effettivo:

$$|(F,\ \Phi) + (\Phi',\ \Phi)| = |E_1|.$$

Dunque anche il sistema lineare (1) è effettivo.

È da notare che sulla W_3 e quindi sulla V_3 il sistema virtuale $|\Phi'|$ resta definito dalla (1) come differenza dei due sistemi lineari effettivi $|(F + \Phi)'|$ ed $|F|$.

Analogamente saranno razionalmente determinati sulla V_3 ed effettivi anche i sistemi lineari completi:

$$|F + 2\Phi'|,\ \ldots,\ |F + (k-1)\Phi'| = |\Psi_1|,\ |F + k\Phi'| = |\Psi|.$$

Essi, *fuori di eventuali curve fisse,* tagliano sulla generica superficie Φ sistemi lineari rispettivamente contenuti in quelli completi:

$$|E_2|\ ,\ \ldots\ ,\ |E_{k-1}| = |C_1|\ ,\ |E_k| = |C|,$$

delle cui curve s'è detto sopra.

Se poi la V_3 è *completamente regolare,* il sistema lineare di curve $|E_i|$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ segato sulla generica Φ dal sistema lineare completo di superficie $|F + i\Phi'|$ sarà anch'esso *completo.*

7. — Con riferimento al modello $W_3{}^0$ converrà, prima di procedere, distinguere i seguenti casi:

I) Il genere delle sezioni iperpiane della generica Φ è ≤ 1.

II) Il genere delle sezioni iperpiane della generica Φ è > 1.

A sua volta il caso II) darà luogo ai seguenti sottocasi:

A) il fascio delle curve γ appartenenti alla generica Φ non coincide con quello con cui è eventualmente composto il sistema $|C|$.

B) Le curve γ sono razionali e col fascio di curve γ appartenente alla generica Φ è composto $|C|$.

C) Le curve γ sono ellittiche ed il fascio di curve γ appartenente alla generica Φ coincide con $|C|$.

8. — Nel caso I) la rete $|\Phi|$ taglia sulla generica sezione iperpiana F della V_3 una rete lineare di curve razionali od ellittiche. Sicchè la F può essere razionale, oppure riferibile ad una rigata ellittica [15]).

È noto [16]) che nel primo caso *la* V_3 *è razionale, o riferibile ad una forma cubica dell'*S_4.

L'altra alternativa non può verificarsi, giacchè: *su una* V_3 *non può esistere un sistema lineare* ∞^2 (*almeno*) *di superficie* Ψ *trasformabili in rigate iperellittiche* (*di genere* $p \geq 1$) *ed a curve caratteristiche* (*variabili*) *irriducibili.*

Infatti, se un tale sistema ∞^2 esistesse, su ogni Ψ resterebbe determinato un fascio iperellittico di curve razionali g (le generatrici della rigata), e la generica g non potrebbe essere comune a due Ψ, altrimenti, essendo le curve caratteristiche del sistema $|\Psi|$ irriducibili, il sistema della g appartenenti alla generica Ψ sarebbe un fascio razionale e non iperellittico di genere $p \geq 1$.

Sicchè sulla V_3 dovrebbe esistere un sistema di ∞^3 curve g. Quelle passanti per un punto generico P di V_3 formerebbero un sistema K_P, ∞^1, razionale ed irriducibile, come il sistema lineare delle Ψ per P. Inoltre le g di K_P sarebbero riferibili a rette, senza che si debbano introdurre irrazionalità aritmetiche.

Sicchè le g di K_P genererebbero una superficie G_P, linearmente razionale, in quanto riferibile ad un piano semplice π in cui le ∞^1 curve g avrebbero per immagini le rette g' di un fascio di centro P'.

Presa nel piano π una retta q' non passante per P', su G_P, resterebbe determinata una curva razionale q unisecante le sue g in un punto variabile Q. Si potrebbe considerare il sistema razionale ∞^1 delle superficie linearmente razionali G_Q, Esse ricoprirebbero tutta la V_3, per un punto generico della quale passerebbero un numero finito μ di G_Q.

Dunque la V_3 risulterebbe *unirazionale,* potendosi porre in

---

15) Cfr. G. CASTELNUOVO, *Sulle superficie algebriche che contengono una rete di curve iperellittiche* (Rend. Accad. Lincei (5), Vol. III (1894); oppure in *Memorie Scelte*, Bologna, Zanichelli, 1937, p. 233).

16) Cfr. G. FANO, l. cit. 2).

corrispondenza $(1, \mu)$ con un S_3 dove la congruenza razionale di indice μ delle ∞^2 curve g appartenenti alle ∞^1 G_Q si potrebbe rappresentare sulle rette in una stella fissata di centro O.

Ma allora, essendo la V_3 completamente regolare, non potrebbe possedere un sistema lineare almeno ∞^2 di superficie Ψ irregolari, a curve caratteristiche variabili irriducibili [17]).

Si osservi che il ragionamento ed il risultato precedente valgono anche nella ipotesi più generale che *le curve sezioni iperpiane delle Φ siano iperellittiche* (di genere > 1), purchè la rete di curve iperellittiche che allora si ottiene sulla generica sezione iperpiana F delle V_3 abbia la *serie caratteristica non speciale* [18]).

9. — Andiamo ora ad esaminare il *caso* II); facendo anzitutto vedere che *nelle ipotesi* A) *e* B) *la V_3 è completamente regolare,* sicchè, essendo > 1 il genere delle sezioni iperpiane della generica Φ, alla V_3 si possono applicare i ragionamenti dei nn. 4-6, ivi compresa l'osservazione finale del n. 6.

È infatti noto [19]) che nel *caso* I, A) la V_3 è unirazionale, quindi completamente regolare.

D'altra parte, essendo nel *caso* II, B) le curve γ razionali, si può sempre suppporre che sul modello W_3 costruito al n. 2 le curve γ abbiano per immagini delle coniche. Si tratta dunque di una $W_3{}^n$ dell'S_4 con retta $(n-2)$-pla, notoriamente regolare.

In tal caso, essendo le curve C_1, e quindi le superficie Ψ_1, bisecanti le γ, fissate genericamente due Ψ_1 restano determinate su ogni γ due coppie di punti, e quindi la $g_2{}^1$ che li congiunge. Pertanto, riferite birazionalmente le ∞^2 curve γ alle rette di una stella di centro O dell'S_3, e riferiti proiettivamente i punti di ciascuna retta ai gruppi della $g_2{}^1$ della γ

---

17) Cfr. G. CASTELNUOVO ed F. ENRIQUES, *Sur les intégrales simples de premiére espéce d'une surface ou d'une variété algébrique à plusieurs dimensions* (Annales de l'Ec. Norm. Sup. (3), T. 22 (1896), p. 339).

18) Cfr. G. CASTELNUOVO, l. cit. [15]).

19) Cfr. F. ENRIQUES, l. cit. [1]), pp. 21-22.

corrispondente, la nostra V_3 si rappresenta su di un S_3 *doppio con superficie di diramazione di ordine* $2m$ *dotata di un punto* O $(2m-2)$*-plo.*

Nel *caso* II, C) si può solo asserire [20]) che sono nulli la irregolarità superficiale ed il genere aritmetico della V_3.

10. — Nel *caso* II, A) *le curve* C *sono generalmente irriducibili.* Infatti, se fossero riducibili, quelle giacenti su una generica Φ sarebbero composte con le curve razionali R di un fascio lineare (n. 3). Sicchè, viceversa, su di una Ψ fissata le superficie Φ segherebbero un sistema lineare ∞^2 di curve riducibili, composte con le curve di un altro fascio $\{R\}$, oltre ad una eventuale parte fissa (che dovrebbe coincidere con la eventuale linea base della rete $|\Phi|$). Ma allora per una R generica dovrebbero passare ∞^1 superficie Φ, sicchè la R coinciderebbe con una γ, contro all'ipotesi.

D'altra parte, sempre nel *caso* II, A), *non può accadere che due diverse* Φ *seghino sulla generica* Ψ *la stessa curva* C, altrimenti quella Ψ sarebbe contenuta in (o coinciderebbe con) una Φ, e le curve γ coinciderebbero con le C, contro all'ipotesi.

Dunque le superficie Φ segano sulla generica Ψ una *rete* lineare di curve ellittiche o razionali (fuori di una eventuale componente fissa).

Cosicchè anche *le superficie* Ψ *sono razionali, oppure riferibili a rigate ellittiche* [21]), questa seconda alternativa potendo verificarsi solo quando le curve C sono ellittiche.

11. — Supponiamo dapprima che *le curve* C *siano razionali.*

Dal sistema $|\Psi|$ si può sempre estrarre un fascio lineare, che seguiteremo ad indicare con $|\Psi|$, in modo che il sistema $|C|$ segato sulla generica Φ dalle superficie del fascio $|\Psi|$ sia un fascio di curve C razionali ed irriducibili (n. 10). Se $|C|$ non fosse un fascio, la generica superficie della rete $|\Phi|$

---

[20]) Cfr. G. FANO, l. cit. [2]), n. 1.

[21]) Cfr. G. CASTELNUOVO, l. cit. [15]).

sarebbe contenuta in una delle superficie del fascio $|\Psi|$, il che è assurdo.

Su di una Φ genericamente fissata tra le Φ si potrà [22]) determinare una curva razionale g, unisecante le ∞^1 curve C, e quindi le ∞^1 superficie Ψ del fascio $|\Psi|$. Detto P un punto generico di g, sulla Ψ per esso resta determinato un fascio di curve razionali C, di cui P è un punto base semplice. Pertanto quella Ψ si può riferire, senza introdurre ulteriori irrazionalità aritmetiche, ad un piano semplice ω, dove le curve C hanno per immagini le rette di un fascio prefissato, di centro O.

Ma allora la data V_3 risulta *linearmente razionale* [23]), in quanto si può rappresentare birazionalmente su di un S_3, in modo che alle ∞^1 superficie razionali Ψ (cioè agli ∞^1 punti P di g) corrispondano i piani ω di un fascio di asse o, ed alle ∞^3 curve C le rette di una stella il cui centro O appartenga ad o.

12. — Supponiamo ora che *le curve C siano ellittiche e le superficie Ψ razionali.*

Se *il sistema* $|\Psi|$ *è almeno* ∞^3 e semplice, oppure composto con una involuzione di gruppi di punti, risulta dai lavori di G. FANO [24]) e M. BALDASSARRI [25]) che la nostra V_3 *è razionale, oppure riferibile ad una forma cubica dell'S_4.*

D'altra parte, se $|\Psi|$ fosse composto con una congruenza di curve β ed almeno una di queste giacesse sulla generica Φ, le Φ coinciderebbero con (o sarebbero contenute ne) le Ψ, le curve γ coinciderebbero con le β e con le C, ellittiche, di cui su ogni Φ ce ne sarebbe un fascio, e si ricadrebbe nel caso II, C).

---

22) Cfr. M. NOETHER, *Ueber Flaechen welche Schaaren rationaler Curven besitzen.* (Mathem. Annalen, Bd. 3 (1871)).

23) Secondo la terminologia di U. MORIN, *Sulle varietà algebriche che contengono un fascio di curve razionali.* (Rend. Sem. Matem. Padova, Vol. IX (1938)).

24) l. cit. 2).

25) l. cit. 4).

Se invece nessuna delle curve β appartenesse alla generica Φ, questa non potrebbe essere contenuta o coincidere con una Ψ, sicchè la dimensione del sistema $|C|$, ultimo aggiunto a quello delle sezioni iperpiane della Φ, sarebbe almeno tre. Ma allora il sistema di curve ellittiche $|C|$ sarebbe semplice, mentre dovrebbe essere composto con la involuzione di gruppi di punti segata su Φ dalla congruenza delle curve β, razionale, ∞^2 e di indice uno. Rimane perciò solo possibile il caso che le β siano unisecanti le Φ, nel qual caso le β sarebbero razionali e la V_3 sarebbe *linearmente razionale,* potendosi ad es. riferire birazionalmente ad un S_3 in modo che le curve β abbiano per immagini le rette di una stella.

13. — Sempre nel *caso* II, A), *con le curve C ellittiche e le superficie* Ψ razionali, supponiamo che $|\Psi|$ *sia una rete.*

Si può subito osservare che anche il sistema lineare completo $|C|$ segato dalle Φ sulla Ψ generica è una rete, altrimenti si ricadrebbe ancora nel caso II, C). Quindi la generica Φ non è contenuta né coincide con una Ψ. Inoltre su di essa la rete $|C|$, essendo completa, è di grado due.

In altre parole una generica D delle curve caratteristiche della rete $|\Psi|$ è tagliata in due punti variabili P, P' dalla generica Φ.

Se una delle componenti variabili della D non avesse intersezioni variabili con le Φ, apparterrebbe a tutte le ∞^1 Φ per un suo punto e quindi, non potendo coincidere con una componente (fissa) della eventuale curva base della rete $|\Phi|$, dovrebbe coincidere con una γ, e si ricadrebbe nel caso II, C). Dunque la D non può avere componenti variabili che non intersechino le Φ in punti variabili.

Se la parte variabile della D generica è riducibile, deve esserlo in due componenti d_1, d_2, ciascuna delle quali unisecante le Φ, e quindi razionale. Il sistema di queste d è una congruenza razionale (d) di indice uno (vedi il ragionamento analogo fatto per le γ al n. 1). Fissata genericamente una Φ, questa interseca tutte le ∞^2 Ψ, e quindi è unisecante per tutte le ∞^2 curve razionali d. Pertanto *la* V_3 *è linearmente* *razionale,* potendosi riferire birazionalmente ad un S_3 semplice, in cui le curve d hanno per immagini le rette di una stella.

Supponiamo ora che (la parte variabile de) la generica curva D sia irriducibile. *Se D non appartiene ad una Φ, le Φ* tagliano su di essa una g_2^2, quindi D è razionale. In tal caso la rete $|\Psi|$ è a curve caratteristiche D razionali ed irriducibili. La congruenza, razionale e di indice uno, delle curve D ammette come superficie bisecante la generica Φ, sicchè V_3 si può trasformare birazionalmente in una V_3^n *dell'S_4 con retta g $(n-2)$-pla,* oppure in un S_3 *doppio con superficie di diramazione di ordine $2m$ dotata di punto $(2m-2)$-plo* (confr. n. 8). Sulla V_3^n le curve D hanno per immagini le coniche variabili segate dai piani per g, mentre le superficie Ψ hanno per immagini le sezioni di V_3^n con gli S_3 per g.

Se invece la generica D appartenesse ad una Φ^* delle Φ, nel fascio di Ψ che l'ha come linea base ce ne sarebbe almeno una Φ coincidente con (o contenente la) Ψ^*. Sicchè sulla $\Psi^* \supseteq \Phi^*$ le curve C sarebbero solo ∞^1 e necessariamente coinciderebbero sia col fascio delle γ, sia col fascio delle D che appartengono ad essa.

Poichè le curve D ricoprono tutta la V_3, di queste $\Phi^* \subseteq \Psi^*$ ce ne sarebbero almeno ∞^1, quindi le curve caratteristiche D della rete $|\Psi|$ coinciderebbero con le curve γ. Ma allora ogni $|\Psi|$ coinciderebbe con (o sarebbe contenuta in) una Φ, e si ricadrebbe nel caso II, C).

14. — Ancora nel *caso* II, A), *con le curve C ellittiche e le superficie Ψ razionali,* supponiamo che $|\Psi|$ *sia un fascio,* e quindi che sia un fascio di curve ellittiche il sistema $|C|$ appartenente alla generica Φ.

Ricordiamo che per una C generica, distinta per ipotesi dalle γ, non può passare più di una Φ (n. 10).

Preso un punto generico P di V_3, si considerino le ∞^1 superficie Φ per esso, aventi in comune la curva γ per P. Su ciascuna di queste Φ resta determinata una curva C, e queste ∞^1 C descrivono un fascio giacente sulla Ψ per P. Su ognuna di queste curve C resta determinato il punto P' coniugato di P nella g_2^1 segata su essa dalle superficie Ψ_1 (n. 5).

Se P' è variabile, la curva γ che passa per P è segata in quel solo punto (variabile con Ψ) dalla Ψ per P. Cioè le curve γ sono unisecate dalle superficie del fascio $|\Psi|$, e quindi razionali. Pertanto la V_3 *è linearmente razionale,* giacchè fissata una Ψ^* dalle Ψ, la V_3 si può riferire birazionalmente ad un S_3 semplice in modo che le curve γ abbiano per immagini le rette di una stella.

Se P' è fisso, appartiene alla curva γ per P, che perciò è bisecata dalla Ψ per P. Dunque la generica curva γ è bisecata dalla generica superficie Ψ, ossia la rete $|\Phi|$ sega sulla generica Ψ una rete lineare di grado due — e quindi completa — di curve ellittiche C. Sicchè la generica Ψ si può riferire, senza introdurre irrazionalità aritmetiche, ad un piano doppio con quartica di diramazione, e la V_3 si potrebbe intanto trasformare in un S_3 doppio con superficie di diramazione d'ordine $2m$ con retta $(2m-4)$-pla. È da notare che sul piano doppio immagine di una Ψ, la quartica di diramazione si spezza necessariamente in una cubica ed in una retta, giacchè uno dei suoi quattro punti di intersezione con una retta generica (immagine di una C) è sempre razionalmente determinato e separato dagli altri tre (n. 5).

15. — D'altra parte si consideri il sistema $|\Psi_1|$, che sulla generica Φ sega il sistema lineare $|C_1|$, ∞^3, di grado 2 e composto con una involuzione I_2 del tipo di BERTINI (n. 5). Il sistema $|C_1|$ contiene la rete *lineare* delle curve spezzate in coppie di curve C, anzi queste sono le sole curve variabili e riducibili di $|C_1|$. Perciò intanto di $|\Psi_1|$ fa parte anche la rete lineare e riducibile R delle coppie di superficie Ψ.

Inoltre al sistema $|\Psi_1|$ di partenza se ne può sostituire un altro — *di dimensione tre* — che indicheremo ancora con $|\Psi_1|$, ottenuto congiungendo la rete R (alla quale si aggiunga eventualmente una superficie fondamentale fissa) con una generica Ψ_1^* delle superficie Ψ_1. Questo sistema $|\Psi_1|$ non possiede superficie *variabili* e riducibili diverse da quelle della rete R. Le altre Ψ_1 segano sulla generica Ψ un fascio di curve K_1. Queste K_1 costituiscono una congruenza (K_1) razionale e di indice uno.

È da notare che in ogni fascio di Ψ_1 ce n'è almeno una appartenente ad R, sicchè *le curve caratteristiche del sistema* $|\Psi_1|$ *sono coppie di curve* K_1.

Torniamo a considerare il punto generico P di V_3. Per esso passano una curva γ, una curva K_1 ed una superficie Ψ che contiene K_1. Per ipotesi tutte le C passanti per P e giacenti su Ψ si appoggiano a γ in un altro punto fisso P'. La coppia PP' è una coppia della $g_2{}^1$ segata su una di quelle C dalle superficie Ψ_1. Dunque anche la curva K_1 passante per P deve passare per P', cioè, non avendo altri punti di intersezione variabili con le ∞^1 curve C per P, deve coincidere con una C.

Ossia: *la generica curva* K_1 *coincide con una* C, *e quindi è contenuta in una* Φ' *delle* Φ *per* γ. Ciò risulta anche dal fatto che K_1 ha con le $\Phi\ {}_1\infty$ per γ solo le intersezioni fisse PP'.

Poichè per un punto generico P di V_3 passa una sola curva K_1, ci deve essere almeno un fascio di queste superficie Φ^0.

Oltre alle superficie Ψ_1 spezzate in coppie di superficie Ψ, anche delle Ψ_1 irriducibili (quelle per $K_1 = C$) segano su una di queste Φ^0 curve C_1 spezzate in coppie di curve C. Ma allora la dimensione di $|C_1|$ non può superare 2. Dunque ogni Φ^0 è contenuta o coincide con una Ψ_1. Anzi, poichè le sole Ψ_1 spezzate e variabili sono quelle composte di due superficie Ψ, e poichè il fascio $|\Psi|$ non può coincidere col sistema $|\Phi^0|$ (altrimenti si ricadrebbe nel caso II, C), necessariamente *ogni* Φ^0 (eventualmente con l'aggiunta di una componente fissa) *coincide con una* Ψ_1.

Ma allora ogni $\Phi^0 = \Psi_1$ contiene ∞^1 curve K_1, quindi effettivamente *il sistema* $|\Phi^0|$ *è un fascio,* necessariamente *lineare.*

16. — Poichè la rete lineare $|\Phi|$ ed il sistema lineare ∞^3 $|\Psi_1|$ hanno in comune un fascio $|\Phi^0|$, essi sono contenuti in un sistema lineare ∞^4, che indicheremo con $|F|$.

Come quelle di $|\Phi|$ e di $|\Psi_1|$, anche le superficie di $|F|$ sono unite nella involuzione di coppie di punti J_2 che su ognuna delle curve ellittiche C, in essa unite — in particolare su quelle K_1 —, subordina una g_2^1 di cui è razionalmente determinato uno dei quattro punti doppi.

Il grado del sistema $|F|$ — cioè il numero delle intersezioni variabili di due Ψ_1 e di una Φ; ossia il numero dei punti variabili comuni a due curve C_1 della medesima Φ — è uguale a *quattro*: si tratta di due coppie della J_2. Sicchè l'immagine proiettiva del sistema $|F|$ è una *quadrica* W_3^2 *dell'*S_4, su cui la nostra V_3 si rappresenta *doppiamente.*

Si tenga inoltre presente che una curva C ha per immagine doppia una retta c, essendo incontrata in una sola coppia variabile PP' della J_2 da una Ψ_1 o da una Φ (cioè da una C_1 o da una γ della Φ per essa), e quindi anche dalla generica F.

Le superficie Ψ, che contengono una rete di grado due di curve C, hanno per immagini dei piani $\overline{\Psi}$, sui quali quella rete diviene la rete delle rette. Della loro quartica di diramazione abbiamo già detto (n. 14) che si spezza in una cubica ed in una retta.

Poichè tra le superficie F ve n'è una rete lineare di spezzate in coppie di superficie Ψ, i piani $\overline{\Psi}$ sono a due a due contenuti in uno degli ∞^2 S_3 passanti per una retta fissata g dell'S_4. D'altra parte due piani di un S_3 si tagliano in una retta, e poichè due Ψ non hanno intersezioni variabili, necessariamente i piani $\overline{\Psi}$ devono tutti passare per la retta fissa g.

Dunque la W_3^2 è un cono quadrico, generato dai piani $\overline{\Psi}$ che dalla retta g — doppia per il cono — proiettano i punti di una conica irriducibile il cui piano è sghembo con g.

Il sistema $|\Psi_1|$ ha per immagine il sistema ∞^3 di coni quadrici doppi $|\overline{\Psi}_1|$ segati sulla W_3^2 dagli ∞^3 S_3 uscenti da un punto fissato O di g.

La rete $|\Phi|$ ha per immagine una rete $|\overline{\Phi}|$ di coni quadrici doppi, segata sulla W_3^2 dagli S_3 per una retta fissata f, sghemba con g. Il fascio $|\Phi^0|$ ha per immagine il fascio $|\overline{\Phi}^0|$

dei coni quadrici doppi segati su W_3^2 dagli S_3 passanti per il piano (O, f).

Si tenga presente che su ciascuno degli ∞^2 coni Φ il vertice O è un punto di diramazione, quello che su ciascuna delle ∞^3 rette $\bar{c}$ è razionalmente separato dagli altri tre.

Sicchè intanto sulla W_3^2 la retta g è di diramazione, e su ciascuno dei piani doppi Ψ la componente rettilinea della quartica di diramazione coincide con la retta fissa g.

Una curva C_1, intersezione di una Φ con una Ψ_1, ha per immagine una conica $\overline{C}_1$ il cui piano è l'interezione di un S_3 per O con un S_3 per f. Si tratta dunque di un piano generico tra quelli — ∞^5 — incidenti ad f.

Ognuna di queste ∞^5 coniche incontra la superficie di diramazione — e quindi la forma dell'S_4 che la taglia sulla W^2_3 — in sei punti. Dunque:

Sul cono doppio quadrico W_3^2 sono punti di diramazione — oltre quelli della retta g — i punti di una superficie del 6° ordine segata su di esso da una forma cubica dell'S_4.

Ma allora, non solo le ∞^2 Φ, ma *tutte le ∞^4 superficie F* (ed in particolare anche le ∞^3 Ψ_1) *sono razionali,* in quanto la generica di esse si rappresenta doppiamente su di un cono quadrico con sestica di diramazione, segata su di esso da una superficie cubica del suo S_3 ambiente.

Sicchè *la nostra V_3 è razionale,* giacchè[26]) contiene un sistema lineare ∞^4 di superficie razionali, composto con una involuzione di coppie di punti, ed a curve caratteristiche di genere > 1.

17. — Sempre nel *caso* II, A), *con le curve C ellittiche,* andiamo a considerare l'ipotesi che *le superficie Ψ siano riducibili a rigate ellittiche.* Come sappiamo (n. 8) ciò può verificarsi solo quando le componenti variabili delle curve caratteristiche D del sistema $|\Psi|$ sono riducibili, oppure quando $|\Psi|$ è un fascio.

Se $|\Psi|$ non è un fascio, su una generica Ψ^* delle sue

---

[26]) Cfr. M. BALDASSARRI, l. cit. [4]), p. 152.

superficie le altre Ψ segano dunque curve D composte con quelle d di un fascio. *Se la dimensione di* $|\Psi|$ *fosse maggiore di due,* per una curva d passerebbero almeno $\infty^2 \Psi$. Ricordando che la generica Φ non può essere contenuta in una Ψ, e che quindi su di essa il sistema lineare $|C|$ ha la stessa dimensione di quello $|\Psi|$, se ne trarrebbe che sulla generica Φ il sistema $|C|$, costituito da curve ellittiche irriducibili ed almeno ∞^3, sarebbe composto con una involuzione.

Ma ciò è assurdo, a meno che le d — dal cui insieme si può estrarre una congruenza razionale di indice uno — non siano unisecanti le Φ, e quindi razionali. In tal caso si vede come al solito che *la* V_3 *è linearmente razionale,* rispetto alla congruenza di curve d prescelta.

Supponiamo quindi che $|\Psi|$ *sia una rete,* le cui curve caratteristiche variabili D sono per ipotesi riducibili in almeno due componenti variabili d.

Teniamo presente che sulla Φ generica la rete $|\Psi|$ sega una rete lineare completa — e quindi di grado due — di curve ellittiche C. Dunque le curve D segano in due punti variabili la generica Φ. Perciò la generica D si spezza in due componenti d_1, d_2, unisecanti le Φ, e quindi razionali. Ma allora se ne deduce come al solito che *la* V_3 *è linearmente razionale,* rispetto alla congruenza — razionale e di indice uno — delle curve d.

Se $|\Psi|$ *è un fascio,* si consideri sulla sua generica Ψ il fascio ellittico di curve razionali g (immagini delle generatrici della rigata ellittica) che resta razionalmente determinato su di essa. Com'è noto [27]) le curve C (immagini di direttrici della rigata) sono unisecanti le g.

Le ∞^2 curve g giacenti sulle ∞^1 superficie Ψ del fascio costituiscono dunque una congruenza razionale di indice uno di curve razionali che ricopre la V_3 ed ammette come superficie unisecante la generica Φ. Se ne trae ancora che *la* V_3 *è linearmente razionale,* rispetto alla congruenza delle curve g.

---

[27]) Cfr. G. CASTELNUOVO, l. cit. [15]).

Si noti che quest'ultimo ragionamento è valido anche per il caso che il sistema $|\Psi|$ non sia un fascio; tuttavia in tal caso le considerazioni precedenti chiariscono meglio la struttura della V_3.

18. — Andiamo infine a considerare il *caso* II, C), in cui le curve γ sono ellittiche, ed il fascio di curve γ appartenente alla generica Φ coincide col sistema $|C|$. In questo caso la V_3 può non essere completamente regolare (n. 9). Quindi non si può più affermare (n. 6) che i sistemi $|\Psi|$ e $|\Psi_1|$ seghino sulla generica Φ i sistemi completi $|C|$ e $|C_1|$ di cui ai nn. 4, 5.

Tuttavia al sistema $|\Psi|$ *si può sostituire la stessa rete* $|\Phi|$, dato che le altre superficie della rete segano su di una Φ genericamente fissata proprio il fascio $|C| = |\gamma|$.

Inoltre si ricordi (nn. 4, 5) che su quella Φ il sistema lineare ∞^3 $|C_1|$ (di grado 4, genere 2 e composto con una involuzione I_2 del tipo di BERTINI) contiene la rete lineare riducibile delle coppie di curve $\gamma = C$, ed è determinato come congiungente quella rete con una generica C_1 irriducibile. Sicchè, *appena si conosca una superficie* Ψ_1 *che seghi sulla generica* Φ *una curva irriducibile* C_1, *al sistema* $|\Psi_1|$ *si può sostituire quello* ∞^6 — *che indicheremo ancora con* $|\Psi_1|$ — *congiungente la superficie isolata* Ψ_1 *con il sistema lineare minimo* ∞^5 *contenente il sistema algebrico* ∞^4 *delle coppie di superficie* Φ (in senso astratto l'S_5 contenente la V_4^3 immagine delle coppie di punti di un piano).

Se una superficie $\overline{\Psi}_1$ soddisfacente ai requisiti richiesti non è già contenuta nel sistema $|F + (k-1)\Phi'|$, la si può costruire direttamente come segue.

Anzitutto si osservi che le involuzioni I_2 relative alle ∞^1 superficie Φ passanti per una curva $\gamma = C$ fissata genericamente subordinano su di essa sempre la medesima g_2^1. Altrimenti, fissato un punto P su γ, il suo coniugato P' nella g_2^1 dovrebbe — variando con continuità assieme alla Φ — descrivere tutta la curva γ, e questa risulterebbe razionale, contro all'ipotesi che sia ellittica.

In particolare quindi sulla generica $\gamma = C$ rimangono fissi i quattro punti doppi della g_2^1, compreso quello A razionalmente separabile dagli altri tre (n. 5).

Inoltre sulla V_3 si viene a porre in evidenza una involuzione di coppie di punti J_2. cui sono subordinate le involuzioni I_2 relative alle singole Φ e le g_2^1 pertinenti alle singole curve γ.

Si fissino quindi genericamente tre superficie, Φ_1, Φ_2, Φ_3 della rete $|\Phi|$, non appartenenti ad un medesimo fascio, e siano

$$\gamma_1 = (\Phi_2, \Phi_3) \quad , \quad \gamma_2 = (\Phi_3, \Phi_1) \quad , \quad \gamma_3 = (\Phi_1, \Phi_2)$$

le loro mutue intersezioni, fuori della eventuale varietà base della rete.

Siano P_1P_1', P_2P_2', P_3P_3' tre coppie non paraboliche fissate genericamente nelle g_2^1 relative a γ_1, γ_2, γ_3.

Su Φ_1 vi è un fascio di curve C_1 passanti per le due coppie P_2P_2', P_3P_3'. Tra queste ∞^1 C_1 l'unica degenere è quella spezzata nelle due curve γ_1, γ_2 (ed in una eventuale curva fondamentale). Si può quindi (in ∞^3 modi diversi) determinare rispettivamente su Φ_1, Φ_2, Φ_3, una terna di curve $C_1^{(1)}$, $C_1^{(2)}$, $C_1^{(3)}$ che seghino su γ_1, γ_2, γ_3 le medesime coppie fissate P_1P_1', P_2P_2', P_3P_3'.

Si noti che la scelta di queste tre coppie dipende da tre parametri essenziali, cosicchè vi sono ∞^6 terne di curve il cui comportamento è analogo a quello della terna $C_1^{(1)}$, $C_1^{(2)}$, $C_1^{(3)}$.

Si consideri poi una generica Φ delle superficie Φ, non appartenente quindi ai tre fasci aventi per linee base rispettivamente γ_1, γ_2, γ_3. Essa taglia su Φ_1, Φ_2, Φ_3 rispettivamente le curve $\bar{\gamma}_1$, $\bar{\gamma}_2$, $\bar{\gamma}_3$, e su queste le curve $C_1^{(1)}$, $C_1^{(2)}$, $C_1^{(3)}$ tagliano tre coppie di punti distinti $\bar{P}_1\bar{P}_1'$, $\bar{P}_2\bar{P}_2'$, $\bar{P}_3\bar{P}_3'$, per le quali passa una irriducibile e ben determinata $\bar{C}_1$ delle ∞^3 curve C_1 appartenenti a Φ.

Si tratta infine di verificare che *al variare di* Φ *nella rete* $|\Phi|$ *le* ∞^2 *curve* $\bar{C}_1$ *così ottenute descrivono una medesima superficie* Ψ_1.

Basta perciò verificare che quelle $\overline{C}_1$ che la incontrano segano *la stessa* coppia PP' su una generica tra le curve γ.

Si considerino perciò le ∞^1 $\overline{C}_1$ relative alle superficie Φ del fascio che ha per curva base γ. Si può supporre che γ non appartenga nè a Φ_1, nè a Φ_2, nè a Φ_3.

Se queste ∞^1 $\overline{C}_1$ segassero su γ una coppia *variabile* di punti PP', tra le Φ per γ ce ne sarebbe una Φ^* contenente quella $\overline{C}_1 = C_1^*$ per cui $P = P' = A$. Ma allora quella C_1^* dovrebbe spezzarsi in una coppia di curve γ ed in quella curva fondamentale α finita od infinitesima che taglia *tutte* le $\gamma = C$ di Φ^* nel punto doppio A della relativa g_2^1 (n. 5).

Sicchè in particolare la C_1^* dovrebbe segare il punto doppio A anche sulle curve γ_1^*, γ_2^*, γ_3^* che Φ^* ha in comune con Φ_1, Φ_2, Φ_3. Almeno una di queste — ad es. γ_1^* — non coincide con le due componenti di C_1^* e su di essa — appartenente a Φ_1 — la C_1^* deve segare la stessa coppia di punti PP' segata dalla $C_1^{(1)}$. Quindi, dovendo essere $P = P' = A$, anche la $C_1^{(1)}$ dovrebbe spezzarsi in una coppia di curve γ e nella curva fondamentale $\alpha^{(1)}$ unisecante le γ di Φ_1 nel punto doppio A della loro g_2^1. E ciò è assurdo, giacchè la $C_1^{(1)}$ è per ipotesi irriducibile.

19. — Tra le ∞^{10} curve caratteristiche C^* del sistema $|\Psi_1|$ ve ne sono ∞^8 costituite da una coppia di curve C_1 di genere 2, giacenti su due diverse Φ e seganti la loro intersezione $\gamma = C$ in una medesima coppia PP' della relativa g_2^1. Si riconosce così che le C^* hanno il *genere*

$$\pi^* = 2 + 2 + 2 - 1 = 5 .$$

In modo analogo si riconosce che è uguale ad 8 il *grado* del sistema $|\Psi_1|$. Infatti è 8 il numero dei punti variabili comuni a due coppie di C_1 appartenenti a due diverse Φ.

Una Φ sega una C^* in due coppie di punti PP', QQ' della sua involuzione I_2 (e quindi della J_2), appartenenti a due diverse curve γ. Sicchè ad es. le Φ passanti per la curva γ contenente la coppia PP' segano sulla C^* una g_2^1, luogo delle coppie QQ' e subordinata dalla J_2.

Dunque le C^* sono *iperellittiche* (di genere 5); inoltre la *serie caratteristica* (segata su una di esse, base di un fascio di Ψ_1, dalle Ψ_1 rimanenti) è la loro $g_8{}^4$ *canonica.*

Pertanto l'immagine proiettiva del sistema $|\Psi_1|$, sulla quale la nostra V_3 si rappresenta doppiamente, è una $V_3{}^4$ *dell'S_6 a curve sezioni razionali.*

Com'è noto [28]) una tale $V_3{}^4$ è razionale ed i suoi modelli proiettivi nell'S_6 possono essere o una varietà normale contenente un fascio lineare di piani, oppure un S_0-cono di VERONESE, generato cioè dalle rette che dal suo vertice O proiettano i punti di una superficie di VERONESE $F_2{}^4$ appartenente ad un S_5 non contenente O.

Nel nostro caso *si tratta di un cono di Veronese.* Per dimostrarlo basta far vedere [29]) che la sua generica sezione iperpiana $\overline{\overline{\Psi}}_1$ è una superficie di Veronese $F_2{}^4$.

Perciò si osservi intanto che una curva C_1 irriducibile, intersezione di una Φ e di una Ψ_1 generiche, essendo segata da un'altra Ψ_1 (cioè da un'altra C_1 della Φ) in due coppie PP', QQ' aventi per immagini due punti $\overline{\overline{P}}$, $\overline{\overline{Q}}$ della $V_3{}^4$, ha per immagine doppia una conica $\overline{\overline{C}}_1$.

Inoltre due C_1 sezioni della medesima Ψ_1 con due diverse Φ , hanno in comune solo una coppia PP', appartenente alla curva $\gamma = C$ intersezione delle due Φ) e quindi le coniche $\overline{\overline{C}}_1$ loro immagini doppie hanno in comune un solo punto $\overline{\overline{P}}$.

D'altra parte sulla Ψ_1 generica — quindi irriducibile — la rete $|\Phi|$ sega una rete lineare di curve C_1, mutuamente bisecantesi. Sicchè la $\overline{\overline{\Psi}}_1$ contiene una rete lineare di coniche mutuamente unisecantesi; ossia, appartenendo all'S_5, è una $F_2{}^4$ di Veronese, c. v. d.

20. — Sul cono doppio $V_3{}^4$ le superficie $\Phi = \Psi$ hanno per immagini i coni quadrici $\overline{\Phi}$ che dal vertice O proiettano le ∞^2 coniche di una sua sezione iperpiana generica $F_2{}^4$. Le rette

---

[28]) Cfr. F. ENRIQUES, l. cit. [4]), p. 190; E. BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi.* (Messina, Principato 1923), p. 400-402.

[29]) Con C. SEGRE, cfr. E. BERTINI, l. cit. [28]), pag. 422.

$\overline{\overline{C}}$ uscenti da O, generatrici di quei coni e della V_3^4, sono le immagini (doppie) delle curve $\gamma = C$.

Su una $\overline{\overline{C}}{}^*$ delle quartiche sezioni della V_3^4 con gli S_4 dell'S_6 ambiente ci sono $12 = 2(\pi^* + 1) = 2(5 + 1)$ punti di diramazione, tanti quanti sono i punti doppi della g_2^1 esistenti sulla C^* iperellittica di genere 5, di cui la $\overline{\overline{C}}{}^*$ è l'immagine doppia. Sicchè *la superficie di diramazione è segata sulla* V_3^4 *da una forma cubica* F_5^3 *dell'*S_6.

Dei quattro punti di diramazione appartenenti ad una $\overline{\overline{C}}$ delle generatrici di V_3^4, tre cadono nelle sue intersezioni con la F_5^3, mentre il quarto, razionalmente distinto dagli altri (n. 5), cade nel vertice O.

Dal piano π di una conica k fissata genericamente in una sua sezione iperpiana F_2^4 il cono V_3^4 si proietta semplicemente in un S_3.

Un S_5 generico per π taglia la V_3^4 in una superficie di Veronese F, cui appartiene la conica k, e che si proietta in un piano generico F' dell'S_3. Le ∞^2 rette r di F' sono le proiezioni delle ∞^2 coniche $\overline{\overline{C}}_1$ di F, tutte unisecanti k.

Sicchè una retta generica r dell'S_3 è la proiezione di una conica $\overline{\overline{C}}_1$ della V_3^4, e quindi su di essa giacciono *sei* punti di diramazione, provenienti dai sei punti doppi della g_2^1 canonica della C_1 di partenza.

Detta O' la proiezione del vertice O della V_3^4, le rette g dell'S_3 che passano per O' appaiono invece come le proiezioni delle generatrici $\overline{\overline{C}}$ del cono V_3^4. Su di esse — fuori di O' — giacciono solo *tre* punti di diramazione.

I piani η per O' sono poi le proiezioni dei coni quadrici $\overline{\overline{\Phi}}$, e su di essi la curva di diramazione è una sestica con un punto triplo in O' ed un altro punto triplo O'' prossimo a questo.

Sicchè in definitiva *la nostra* V_3 *di partenza nel caso* II, C) *si può rappresentare su di un* S_3 *doppio con superficie di diramazione del* 6° *ordine, dotata di un punto triplo* O', *cui è prossima una retta tripla infinitesima.* Le superficie razionali della rete $|\Phi|$ data hanno ivi per immagini doppie i piani della stella di centro O'.