RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GABRIELE DARBO

L'estremo assoluto per gli integrali su intervallo infinito

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 22 (1953), p. 399-416

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1953__22__399_0>

L'ESTREMO ASSOLUTO PER GLI INTEGRALI SU INTERVALLO INFINITO

Memoria (*) *di* GABRIELE DARBO (*a Padova*)

Nel presente lavoro, dimostro alcuni teoremi di esistenza del minimo assoluto per gli integrali del tipo

$$I_C^{+\infty} = \int_a^{+\infty} f(x,\ y,\ y')dx\,.$$

Stabilisco dapprima condizioni generali che permettono di affermare l'esistenza del minimo mediante l'applicazione di metodi diretti, e quindi indico criteri sufficienti affinchè quelle condizioni risultino soddisfatte.

In un primo tempo considero integrali in cui la $f(x, y, y')$ sia un polinomio di secondo grado in y e y' con coefficienti funzioni continue di x.

In seguito pervengo a risultati più generali, tramite una opportuna disuguaglianza, stabilita nel n. 5 e dedotta qui con un procedimento diretto, ma che volendo avrei potuto ricavare sotto più larghe ipotesi da una mia estensione del secondo teorema della media [1]).

1. - Generalità. — Chiameremo *campo* A, un insieme chiuso di punti (x, y). Supporremo che $f(x, y, y')$ sia una funzione continua relativamente al complesso degli argomenti (x, y, y') in ogni punto $(x, y) \in A$ e per ogni y'.

(*) Pervenuta in Redazione il 10 luglio 1953.

1) G. DARBO, *Una estensione del secondo teorema della media*, [Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Serie III, Vol. V, Fasc. III-IV (1951)].

Una curva di equazione $y = y(x)$ $(a \leq x < +\infty)$ è una curva ordinaria relativa all'integrale

$$I_C^{+\infty} = \int_a^{+\infty} f(x, y, y')dx$$

o, più brevemente una curva $C^{+\infty}$, se

1) *ogni suo punto* $(x, y(x))$ *appartiene al campo* A;
2) *in ogni intervallo finito* $a|\!-\!|t$, $y(x)$ *è assolutamente continua e* $f(x, y(x), y'(x))$ *integrabile* L;
3) *esiste finito l'integrale generalizzato*

$$\int_a^{+\infty} f(x, y(x), y'(x))dx = \lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x, y(x), y'(x))dx .$$

In generale chiameremo curva continua ogni curva $C \equiv \{ y = y(x);\ a \leq x < +\infty\}$ con $y(x)$ continua; se $y(x)$ è assolutamente continua in ogni intervallo finito $a|\!-\!|t$, diremo brevemente che C è una curva assolutamente continua. Il punto $(a, y(a))$ lo chiameremo punto iniziale della curva C.

Una topologia nello spazio delle curve continue si può introdurre in vari modi. Per gli sviluppi ulteriori a noi converrà definire come ρ-*intorno* della curva continua $\bar{C} \equiv \{y = \bar{y}(x);\ \bar{a} \leq x < +\infty\}$ l'insieme delle curve continue $C \equiv \{y = y(x);\ a \leq x < +\infty\}$ per le quali sia

1) $|a - \bar{a}| < \rho$,
2) $|y(x) - \bar{y}(x)| < \rho$ per ogni $x \leq \bar{a} + \dfrac{1}{\rho}$,

intendendo, nello scrivere quest'ultima relazione, $y(x)$ e $\bar{y}(x)$ prolungate a sinistra di a e $\bar{a}$ ponendole rispettivamente uguali ad $y(a)$ e $\bar{y}(\bar{a})$.

Ciò posto, risulta ovvio il significato di una curva di accumulazione di una successione $\{C_n\}$ di curve continue.

Il teorema di ASCOLI per le successioni di curve continue assume la seguente forma.

« *Se* $\{C_n\}$ *è una successione di curve continue, le quali siano in ogni intervallo finito equicontinue ed equilimitate ed abbiano tutte l'ascissa del punto iniziale appartenente ad* *un insieme limitato, esiste almeno una curva continua di accumulazione per la successione* $\{C_n\}$ ».

La dimostrazione è ovvia al pari di quella del seguente altro teorema:

« *Se le curve della successione* $\{C_n\}$ *sono equiassolutamente continue in ogni intervallo finito e l'insieme dei loro punti iniziali è limitato, le curve della successione sono anche equilimitate in ogni intervallo finito e la successione ammette pertanto una curva di accumulazione assolutamente continua* ».

2. - Condizioni generali per l'esistenza dell'estremo assoluto. — Vogliamo dimostrare un teorema di esistenza del minimo per integrali su intervallo infinito, dal quale dedurremo in seguito dei teoremi di più diretta applicabilità.

Faremo vedere precisamente che *l'integrale*

$$I_C^{+\infty} = \int_0^{+\infty} f(x, y, y')dx$$

ammette minimo assoluto in una classe completa, $\mathfrak{K}$, (*non vuota!*) *di curve* $C^{+\infty}$ *definite tutte sull'intervallo* $0 \vdash +\infty$ [2]), *se sono soddisfatte le seguenti condizioni*:

1) $I_C^{+\infty}$ *è quasi regolare* [3]), *seminormale*;

2) *posto* $I_C^X = \int_0^X f(x, y, y')dx$ *e detta* $\mathfrak{K}^X$ *la classe delle curve di* $\mathfrak{K}$ « *troncate* », *considerate cioè solo nell'intervallo* $0 \vdash\dashv X$, I_C^X *è per ogni* $X > 0$, *limitato inferiormente nella classe* $\mathfrak{K}^X$, *da un numero che può dipendere da* X;

---

2) La condizione che tutte le curve di $\mathfrak{K}$ abbiano l'ascissa del punto iniziale nulla, è stata posta soltanto allo scopo di non introdurre complicazioni puramente formali e potrebbe essere sostituita dall'altra, meno restrittiva, che le ascisse dei punti iniziali formino un insieme limitato.

3) Qui e nel seguito, dicendo *quasi regolare,* sottintenderemo sempre *positivo.*

3) *per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste un numero* $X_\varepsilon \geq 0$ *tale che, presa comunque una curva assolutamente continua* $C \equiv \equiv \{ y = y(x);\ 0 \leq x < +\infty \}$ *appartenente al campo* A, *anche non ordinaria ma tale che risulti integrabile in ogni intervallo finito la* $f(x, y(x), y'(x))$, *si abbia*

$$\int_{x'}^{x''} f(x, y(x), y'(x))dx \geq -\varepsilon$$

purchè sia $x'' > x' \geq X_\varepsilon$;

4) *per ogni* $m > i$, *dove* i *è l'estremo inferiore, certamente finito per la* 2) *e la* 3), *di* $I_C^{+\infty}$ *in* $\mathfrak{K}$, *la classe* $\mathfrak{K}_m$ *delle curve di* $\mathfrak{K}$ *per le quali è* $I_C^{+\infty} \leq m$ *è costituita da curve equilimitate ed equiassolutamente continue in ogni intervallo finito.*

Nel fatto, da una successione minimizzante per $I_C^{+\infty}$ in $\mathfrak{K}$, potremo estrarre a norma della condizione 4), una successione di curve ordinarie $C_n \equiv \{y = y_n(x);\ 0 \leq x < +\infty\}$, convergente uniformemente in ogni intervallo $0 \vdash\!\dashv X$ ad una curva $\bar{C} \equiv \{y = \bar{y}(x);\ 0 \leq x < +\infty\}$, assolutamente continua. In virtù di noti ragionamenti di TONELLI [4]), la $f(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x))$ è integrabile in ogni intervallo finito $0 \vdash\!\dashv X$; inoltre fissati $X > 0$ ed $\varepsilon > 0$, risulta

$$I_{C_n}^X - I_{\bar{C}}^X > -\varepsilon \tag{1}$$

quando n è abbastanza grande, poichè $I_{C_n}^X$ è inferiormente semicontinuo attesa la condizione 1).

Se poi supponiamo $X \geq X_\varepsilon$, per la condizione 3) sarà anche

$$\int_X^{+\infty} f(x,\ y_n(x),\ y'_n(x))dx \geq -\varepsilon\ ; \tag{2}$$

---

4) Vedi L. TONELLI, *Sugli integrali del Calcolo delle Variazioni in forma ordinaria*, [Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Serie II, Vol. III (1934)], pp. 401-450, n. 9.

Vedi anche S. CINQUINI, *Una nuova estensione dei moderni metodi del Calcolo delle Variazioni*, [Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Serie II, Vol. IX 1940)].

sommando membro a membro la (1) con la (2) si ha

$$I_{C_n}^{+\infty} - I_{\overline{C}}^{X} > -2\varepsilon\,;$$

da cui si ottiene

$$I_{\overline{C}}^{X} \leq i + 2\varepsilon \tag{3}$$

essendo $\{C_n\}$ una successione minimizzante.

L'integrale $I_{\overline{C}}^{X} = \int_0^X f(x,\ \bar{y}(x),\ \bar{y}'(x))dx$ è dunque limitato superiormente al variare di X in $0 \vdash +\infty$. Sarà perciò finito il massimo limite I di $I_{\overline{C}}^{X}$ per $X \to +\infty$ [5]). In corrispondenza ad un σ positivo arbitrario, si potrà determinare un $\overline{X} \geq X_\sigma$, tale che si abbia

$$\int_0^{\overline{X}} f(x,\ \bar{y}(x),\ \bar{y}'(x))dx \geq I - \sigma\,; \tag{4}$$

essendo poi per ogni $X > \overline{X} \geq X_\sigma$

$$\int_{\overline{X}}^{X} f(x,\ \bar{y}(x),\ \bar{y}'(x))dx \geq -\sigma\,, \tag{5}$$

dalle (4) e (5) si ricava

$$\int_0^X f(x,\ \bar{y}(x),\ \bar{y}'(x)dx \geq I - 2\sigma$$

qualunque sia $X > \overline{X}$, e quindi

$$\lim_{X \to +\infty} \int_0^X f(x,\ \bar{y}(x),\ \bar{y}'(x))dx = I\,;$$

vale a dire $\overline{C}$ è una curva ordinaria, e perciò appartiene a $\mathcal{K}$ (che per ipotesi è completa).

Dalla (3) segue ancora

$$I_{\overline{C}}^{+\infty} \leq i + 2\varepsilon\,,$$

---

5) Che sia $I > -\infty$ è conseguenza immediata della condizione 3)

e quindi

$$I_C^{+\infty} \leq i \; ;$$

anzi

$$I_{\overline{C}}^{+\infty} = i \, ,$$

per il significato di i.

La $\overline{C}$ è pertanto minimamente assoluta per $I_C^{+\infty}$ in $\mathcal{K}$.

3. - Teorema di confronto. — È utile notare che se le condizioni generali 1) 2) 3) 4) del precedente teorema sono verificate per un integrale

$$^*I_C^{+\infty} = \int_0^{+\infty} {}^*f(x, y, y')dx$$

in una classe completa $\mathcal{K}$ di curve ordinarie per l'integrale

$$I_C^{+\infty} = \int_0^{+\infty} f(x, y, y')dx \, ,$$

allora dette condizioni si trasferiscono a $I_C^{+\infty}$ tramite una semplice disuguaglianza tra le funzioni integrande ottenendo in tal modo vasti criteri per l'esistenza del minimo.

Dimostriamo precisamente i seguenti teoremi:

I. - *Se* $^*I_C^{+\infty}$ *è un integrale quasi regolare e se* $I_C^{+\infty}$ *è tale che risulti*

$$f(x, y, y') \geq {}^*f(x, y, y') \tag{6}$$

per ogni $(x, y) \varepsilon A$ *e per ogni* y', *allora ogni curva ordinaria per* $I_C^{+\infty}$ *è pure ordinaria per* $^*I_C^{+\infty}$;

II. - *Se inoltre* $^*I_C^{+\infty}$ *soddisfa alle condizioni generali* 1) 2) 3) 4) *in una classe completa* $\mathcal{K}$ *di curve ordinarie per* $I_C^{+\infty}$ *(e quindi in virtù del teorema* I *anche per* $^*I_C^{+\infty}$*), e se* $I_C^{+\infty}$ *è quasi regolare, allora* $I_C^{+\infty}$ *soddisfa le* 1) 2) 3) 4) *nella classe* $\mathcal{K}$ *ed ammette quindi in* $\mathcal{K}$ *minimo assoluto.*

Per la *quasi regolarità* di $^*I_C^{+\infty}$, fissata una curva $C \equiv \equiv \{y = y(x) \, ; \; 0 \leq x < +\infty\}$ ordinaria per $I_C^{+\infty}$, e un intervallo $0 \mid\!-\!\mid X$, esisteranno due costanti p e q tali che

$$^*f(x,\ y(x),\ y'(x)) \geq -p|y'(x)| - q$$

per $0 \leq x \leq X$. Da questa disuguaglianza e dalla (6) segue l'integrabilità di $^*f(x,\ y(x),\ y'(x))$ in $0 \mid\!-\!\mid X$.

Per la condizione 3) del teorema generale si avrà, per ogni $\varepsilon > 0$,

$$\int_{x'}^{x''} f(x,\ y(x),\ y'(x))dx \geq \int_{x'}^{x''} {}^*f(x,\ y(x),\ y'(x)dx \geq -\varepsilon \tag{7}$$

allorchè è $^*X_\varepsilon \leq x' < x''$. Il primo membro della (7) si può rendere minore di ε (essendo C ordinaria per $I_C^{+\infty}$) pur di prendere x' maggiore di un opportuno $\overline{X}$, ne segue che C è una curva ordinaria anche per $^*I_C^{+\infty}$. Resta così dimostrato il teorema I.

Essendo poi $I_C^{+\infty} \geq {}^*I_C^{+\infty}$ per ogni curva C di $\mathfrak{K}$, la classe $\mathfrak{K}_m$ delle curve di $\mathfrak{K}$ per cui è $I_C^{+\infty} \leq m$ è contenuta nella classe $^*\mathfrak{K}_m$ delle curve di $\mathfrak{K}$ per le quali sia $^*I_C^{+\infty} \leq m$; cioè vale la condizione 4) per $I_C^{+\infty}$. Dalla (7) segue che $I_C^{+\infty}$ soddisfa pure alle condizioni 2) e 3). Essendo infine $I_C^{+\infty}$ quasi regolare, la seminormalità è conseguenza immediata della (6); $I_C^{+\infty}$ soddisfa perciò anche alla condizione 1). In virtù del teorema generale, si ha quindi l'esistenza del minimo di $I_C^{+\infty}$ in $\mathfrak{K}$. È dimostrato con ciò il teorema II.

4. - L'esistenza del minimo per funzionali quadratici.

— Facciamo una applicazione del teorema generale al caso che $I_C^{+\infty}$ sia un funzionale del tipo

$$I_C^{+\infty} = \int_0^{+\infty} \{A(x)y^2 + B(x)y'^2 + 2C(x)yy' + 2D(x)y + 2E(x)y'\}dx$$

con $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $D(x)$, $E(x)$ funzioni continue in $0 \mid\!-\!\!+\infty$.

Dimostriamo che *se sono soddisfatte le seguenti condizioni*:

a) $B(x) > 0 \quad , \quad A(x)B(x) \geq C^2(x) \quad$ per $\quad x \geq 0$,
b) $A(x)B(x) \geq (C(x) - \varepsilon)^2 \quad$ per $\quad x \geq 0$,

dove ε *è un conveniente numero positivo,*

c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} |D(x)|\, dx < +\infty$,

d) $E(x)$ *sia a variazione limitata in* $0 \vdash\!\!- +\infty$ *e infinitesima per* $x \to +\infty$,
allora in ogni classe completa $\mathfrak{K}$ *di curve ordinarie aventi tutte il punto iniziale in* $(0, y_0)$ *con* y_0 *fissato ad arbitrio, esiste il minimo assoluto per* $I_C^{+\infty}$.

DIMOSTRAZIONE. — Essendo $B(x) > 0$, $I_C^{+\infty}$ è regolare e normale; è soddisfatta perciò la condizione generale (1).

Dalle a) e b) segue che per ogni $x \geq 0$ le forme quadratiche nelle y e y'

$$Ay^2 + By'^2 + 2Cyy' \quad , \quad Ay^2 + By'^2 + 2(C - \varepsilon)yy'$$

sono definite o semidefinite positive; da cui

$$Ay^2 + By'^2 + 2Cyy' \geq 0\,, \tag{8}$$
$$Ay^2 + By'^2 + 2Cyy' \geq 2\varepsilon yy'\,. \tag{9}$$

Se $C \equiv \{y = y(x);\ 0 \leq x < +\infty\}$ è una curva assolutamente continua e se è integrabile in ogni intervallo finito la funzione

$$A(x)y^2(x) + B(x)y'^2(x) + 2C(x)y(y)y'(x) +$$
$$+ 2D(x)y(x) + 2E(x)y'(x)\,,$$

è integrabile ivi anche

$$A(x)y^2(x) + B(x)y'^2(x) + 2C(x)y(x)y'(x)$$

poichè è integrabile

$$2D(x)y(x) + 2E(x)y'(x)\,.$$

Per la (9) si dovrà avere, se $0 \leq x' < x''$.

$$\int_{x'}^{x''} \{A(x)y^2(x) + B(x)y'^2(x) + 2G(x)y(x)y'(x)\} dx \geq \tag{10}$$

$$\geq \varepsilon \int_{x'}^{x''} 2y(x)y'(x)dx = \varepsilon[y^2(x'') - y^2(x')] .$$

In particolare, se indichiamo con $M(X)$ il massimo di $|y(x)|$ in $0 \vdash\!\dashv X$, tenendo presente la (8) e la (10), avremo:

$$\int_0^X \{Ay^2 + By'^2 + 2Cyy'\} dx \geq \int_0^{\bar{x}} \{Ay^2 + By'^2 + 2Cyy'\} dx \geq \tag{11}$$

$$\geq \varepsilon[y^2(\bar{x}) - y^2(0)] = \varepsilon M^2(X) - \varepsilon y_0^2 ,$$

avendo indicato con $\bar{x}$ l'ascissa di un punto di massimo di $|y(x)|$ in $0 \vdash\!\dashv X$.

D'altra parte, per la c) avremo anche

$$\left| \int_{x'}^{x''} D(x)y(x)dx \right| \leq M(x'') \int_{x'}^{+\infty} |D(x)| dx \qquad (0 \leq x' < x''); \tag{12}$$

e dalla d), applicando opportunamente il secondo teorema della media,

$$\left| \int_{x'}^{x''} E(x)y'(x)dx \right| \leq 2M(x'') \overset{+\infty}{\underset{x'}{V}} [E(x)] . \tag{13}$$

Dalle (12) e (13) otteniamo

$$\left| \int_0^X \{2D(x)y(x) + 2E(x)y'(x)\} dx \right| \leq kM(X) \qquad (X > 0) , \tag{14}$$

dove si è posto $k = 4 \overset{+\infty}{\underset{0}{V}} [E(x)] + 2 \int_0^{+\infty} |D(x)| dx$.

Infine dalle (11) e (14) si ricava

$$I_C^X = \int_0^X f(x, y(x), y'(x))dx \geq \varepsilon M^2(X) - kM(X) - \varepsilon y_0^2 \geq -\frac{k}{4\varepsilon} - \varepsilon y_0^2; \tag{15}$$

da cui segue intanto che I_C^X è limitato inferiormente in $\mathfrak{K}^X$. Vale dunque la condizione 2) del teorema generale.

Supponiamo ora che la C sia una curva ordinaria. Allora I_C^X converge al divergere di X e la (15) implica che la funzione monotona non decrescente $M(X)$ si mantiene limitata. Posto

$$M = \lim_{X \to +\infty} M(X)$$

la (15) porge

$$I_C^{+\infty} \geq \varepsilon M^2 - kM - \varepsilon y_0^2 .$$

Se m è un numero maggiore dell'estremo inferiore di $I_C^{+\infty}$ in $\mathfrak{K}$ e se C è una curva di $\mathfrak{K}_m$ risulta

$$m \geq I_C^{+\infty} \geq \varepsilon M^2 - kM - \varepsilon y_0^2 ,$$

da cui

$$M \leq \frac{K + \sqrt{k^2 + 4\varepsilon y_0^2 + 4\varepsilon m}}{2\varepsilon} = Y_m ;$$

e quindi

$$|\, y(x) \,| \leq Y_m \qquad (0 \leq x < +\infty) . \tag{16}$$

Le curve della classe $\mathfrak{K}_m$ sono dunque tutte appartenenti alla semistriscia $A^* \equiv \{|\, y \,| \leq Y_m ;\ 0 \leq x < +\infty\}$ e sono di conseguenza equilimitate in $0 \vdash\!\!- +\infty$.

Ma in ogni punto (x, y) di A^* il quoziente $\dfrac{f(x, y, y')}{|\, y' \,|}$ diverge a $+\infty$ per $|\, y' \,|$ divergente, quindi per un noto teorema di Tonelli [6]) le curve di $\mathfrak{K}_m$ sono equiassolutamente continue in ogni intervallo finito $0 \vdash\!\!\dashv X$. È soddisfatta quindi la condizione generale 4).

Qualunque sia la curva $C \equiv \{y = y(x);\ 0 \leq x < +\infty\}$ appartenente al campo A^*, assolutamente continua e tale che

---

6) Cfr. L. TONELLI, *Sugli integrali del Calcolo delle Variazioni in forma ordinaria*, [Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Serie II, Vol. III (1934)].

risulti integrabile $f(x, y(x), y'(x))$ in ogni intervallo finito, per le (8), (12), (13) si ha

$$\int_{x'}^{x''} f(x, y(x), y'(x)dx \geq 2 \int_{x'}^{x''} \{D(x)y(x) + E(x)y'(x)\}\, dx \geq$$

$$\geq -2M(x'') \left\{ 2 \overset{+\infty}{\underset{x'}{V}} [E(x)] + \int_{x'}^{+\infty} |D(x)| \right\} dx \geq -$$

$$-2Y_m \left\{ 2 \overset{+\infty}{\underset{x'}{V}} [E(x)] + \int_{x'}^{+\infty} |D(x)|\, dx \right\}$$

se è $0 \leq x' < x''$; e poichè l'ultimo membro è infinitesimo per $x' \to +\infty$, è soddisfatta anche la condizione generale 3). Donde l'esistenza del minimo assoluto di $I_C^{+\infty}$ in $\mathfrak{K}$.

Una proprietà asintotica: Dimostriamo ora che le curve ordinarie relative all'integrale $I_C^{+\infty}$ precedentemente considerato, hanno limite finito (non necessariamente lo stesso per tutte) al divergere di x.

In seguito alla limitazione (14), relativa alla parte lineare di $I_C^{+\infty}$, per ogni curva ordinaria l'integrale

$$\int_0^X \{A(x)y^2(x) + B(x)y'^2(x) + 2C(x)y(x)y'(x)\}\, dx, \tag{17}$$

è limitato rispetto ad X in $0 \vdash +\infty$, e quindi convergente, poichè la funzione integranda non è mai negativa. Per la (10) è, se $0 \leq x' < x''$,

$$y^2(x'') - y^2(x') \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{x'}^{x''} \{A(x)y^2(x) + B(x)y'^2(x) + 2C(x)y(x)y'(x)\} dx;$$

se in quest'ultima si fa tendere x'' saltuariamente a $+\infty$ in modo che $y^2(x'')$ tenda al minimo limite λ^2 di $y^2(x)$, si ottiene

$$\lambda^2 - y^2(x') \leq \int_{x'}^{+\infty} \{A(x)y^2(x) + B(x)y'^2(x) + 2C(x)y(x)y'(x)\} dx;$$

e infine, per $x' \to +\infty$, segue

$$\lim_{X \to +\infty} y^2(x) = \lambda^2 ;$$

da cui

$$\lim_{X \to +\infty} y(x) = \lambda \quad \text{oppure} \quad \lim_{X \to +\infty} y(x) = -\lambda ,$$

come conseguenza ovvia della continuità di $y(x)$.

5. - Un lemma. — Dimostriamo il seguente lemma, che ci sarà utile nel seguito:

« *Se* $Q(x, y)$ *è una funzione continua con la derivata* $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ *in un dominio* D *semplicemente connesso e se* $C \equiv \{y = y(x);\ a \leq x \leq b\}$ *è una curva contenuta in* D, *con* $y(x)$, *assolutamente continua in* $a \vdash\!\dashv b$, *sussiste la relazione*:

$$(18) \qquad \left| \int_a^b Q(x, y(x))\, y'(x) dx - \int_{y(a)}^{y(b)} Q(\bar{x}, \eta) d\eta \right| \leq \iint_D \left| \frac{\partial Q}{dx} \right| dx dy ,$$

essendo $\bar{x}$ *soggetto all'unica condizione che i tre segmenti (eventualmente degeneri) di estremi*

$$(b, y(b)),\ (\bar{x}, y(b))\ ;\ (\bar{x}, y(b)),\ (\bar{x}, y(a))\ ;\ (\bar{x}, y(a)),\ (a, y(a))$$

appartengano tutti a D ».

Indichiamo con σ_1, σ_2, σ_3 rispettivamente i tre segmenti orientati

$$\overrightarrow{(b, y(b))(\bar{x}, y(b))} \quad , \quad \overrightarrow{(\bar{x}, y(b))(\bar{x}, y(a))} \quad , \quad \overrightarrow{(\bar{x}, y(a))(a, y(a))}$$

e consideriamo la curva C orientata nel verso crescente delle ascisse. Allora C, σ_1, σ_2, σ_3 sono archi orientati consecutivi e la loro somma,

$$\Gamma = C + \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

è una curva chiusa, orientata e rettificabile appartenente a D.

Per la formula di Green, potremo scrivere ovviamente

$$(19) \qquad \int_\Gamma Q(x, y) dy = \iint_D \mathrm{Ord}\ (x, y;\ \Gamma) \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx dy$$

avendo indicato con Ord $(x, y; \Gamma)$ l'ordine topologico del punto (x, y) rispetto alla curva Γ [7]).

Osserviamo che Ord $(x, y; \Gamma)$, non può assumere che i valori $+1$, 0, -1 in quanto la curva Γ è attraversata da ogni retta parallela all'asse delle y in due punti al più (eccezion fatta per la retta $x = \bar{x}$), e ad ogni attraversamento l'ordine può variare di una unità. Avremo quindi

$$\left| \int_\Gamma Q(x, y) dy \right| \leq \iint_D \left| \frac{\partial Q}{\partial x} \right| dx dy .$$

---

7) Accenniamo brevemente alla dimostrazione della (19), limitandoci al caso che la curva Γ appartenente a D sia costituita dalla somma

$$\Gamma = S_1 + C_1 + S_2 + C_2 ,$$

essendo C_1 e C_2 le curve di equazione

$y = y_1(x)$; $a \leq x \leq b$ orientata nel cerso delle x crescenti.

$y = y_2(x)$; $a \leq x \leq b$ orientata nel verso delle x decrescenti.

con $y_1(x)$ e $y_2(x)$ assolutamente continue in $a|\!-\!|b$, ed S_1 e S_2 i due segmenti orientati

$$S_1 \equiv \overrightarrow{(a, y_2(a))(a, y_1(a))}$$

$$S_2 \equiv \overrightarrow{(b, y_1(b))(b, y_2(b))} .$$

Consideriamo le funzioni $\Phi(t)$ e $\Psi(t)$ così definite in $a|\!-\!|b$:

$$\Phi(t) = \int_a^t Q(x, y_1(x)) y_1'(x) dx - \int_a^t Q(x, y_2(x)) y_2'(x) dx + \int_{y_1(t)}^{y_2(t)} Q(t, \eta) d\eta - \int_{y_1(a)}^{y_2(a)} Q(a, \eta) d\eta,$$

$$\Psi(t) = \int_a^t dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} Q_x(x, y) dy ;$$

esse sono assolutamente continue e hanno la stessa derivata quasi ovunque in $a|\!-\!|b$. Inoltre, essendo $\Phi(a) = \Psi(a) = 0$ esse devono coincidere in tutto $a|\!-\!|b$.

Ma è pure

$$\Phi(b) = \int_\Gamma Q(x, y) dy$$

$$\Psi(b) = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} Q_x(x, y) dy = \iint_D \text{Ord}\,(x, y; \Gamma) Q_x(x, y) dx dy$$

da cui segue l'asserto.

Inoltre essendo

$$\int_{\Gamma} Q(x, y)dy = \int_{C} Q(x, y)dy + \int_{\sigma_1} Q(x, y)dy + \int_{\sigma_2} Q(x, y)dy +$$

$$+ \int_{\sigma_3} Q(x, y)dy = \int_a^b Q(x, y(x))y'(x)dx - \int_{y(a)}^{y(b)} Q(x, \eta)d\eta,$$

se ne ricava proprio la (18).

OSSERVAZIONE: Si noti che il secondo membro della (18) si può scrivere nella forma seguente

$$\iint_D \left| \frac{\partial Q}{\partial x} \right| dxdy = \int_{y_1}^{y_2} V(\eta)d\eta, \tag{20}$$

dove $V(\eta)$ è la variazione totale di $Q(x, \eta)$ sull'insieme lineare D_η costituito dai punti x per cui $(x, \eta) \in D$ e y_1 ed y_2 sono le ordinate estreme dei punti di D. Poichè il secondo membro di (20) non presuppone l'esistenza nè la continuità di $\frac{\partial Q}{\partial x}$, è presumibile che la (18) sussista sotto condizioni più larghe per la $Q(x, y)$ quando sia scritta nella forma seguente

$$\left| \int_a^b Q(x, y(x))y'(x)dx - \int_{y(a)}^{y(b)} Q(\bar{x}, \eta)d\eta \right| \leq \int_{y_1}^{y_2} V(\eta)d\eta. \tag{21}$$

Invero si può dimostrare che la (21) vale nella sola ipotesi della continuità per la $Q(x, y)$ in D [8]).

A tale risultato si può giungere approssimando uniformemente la $Q(x, y)$ con una opportuna successione di funzioni $Q_n(x, y)$ continue assieme alle $\frac{\partial Q_n}{\partial x}$ e tali che

$$\lim_{n \to +\infty} \iint_D \left| \frac{\partial Q_n}{\partial x} \right| dxdy = \int_{y_1}^{y_2} V(\eta)d\eta.$$

---

8) È evidente che in tale caso il secondo membro della (21) potrebbe non essere finito.

6. - Teorema di esistenza del minimo. — Nel seguito chiameremo *campo normale* un campo A connesso e tale, che se esso contiene un punto (x_0, y_0), esso contiene anche tutti i punti (x, y_0) con $x \geq x_0$. Un campo normale è di conseguenza semplicemente connesso.

La funzione $Q(x, y)$ sia continua insieme con $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ in un campo normale A; per quasi ogni y (che sia ordinata di qualche punto di A) risulti

$$\lim_{x \to +\infty} Q(x, y) = 0 \; ; \tag{21}$$

inoltre sia finito l'integrale

$$\iint_A \left| \frac{\partial Q}{\partial x} \right| dxdy.$$

In virtù del lemma precedente, se $C \equiv \{y = y(x);\ a \leq x < +\infty\}$ è una curva assolutamente continua appartenente al campo A, potremo scrivere

$$\left| \int_{x'}^{x''} Q(x, y(x))y'(x)dx - \int_{y(x')}^{y(x'')} Q(\bar{x}, \eta)d\eta \right| \leq \iint_{A \cdot T_{x'}} \left| \frac{\partial Q}{\partial x} \right| dxdy \, , \tag{22}$$

dove è $a \leq x' < x'' \leq \bar{x}$ e $T_{x'}$ indica il semipiano $x \geq x'$.

Inoltre dalla (21) segue

$$| Q(\bar{x}, y) | \leq \int_{\bar{x}}^{+\infty} \left| \frac{\partial Q}{\partial x} \right| dx \, ,$$

per quasi ogni y; quindi

$$\left| \int_{y(x')}^{y(x'')} Q(\bar{x}, \eta)d\eta \right| \leq \left| \int_{y(x')}^{y(x'')} dy \int_{\bar{x}}^{+\infty} \left| \frac{\partial Q}{\partial x} \right| dx \right| \leq \iint_{A \cdot T_{\bar{x}}} \left| \frac{\partial Q}{\partial x} \right| dxdy \, .$$

Da quest'ultima si ricava

$$\lim_{\bar{x} \to +\infty} \int_{y(x')}^{y(x'')} Q(\bar{x}, \eta)d\eta = 0 \, . \tag{23}$$

Passando al limite nella (22) per $\bar{x} \to +\infty$, e tenendo presente la (23), si ottiene

$$(24) \qquad \left| \int_{x'}^{x''} Q(x,\ y(x)) y'(x) dx \right| \leq \iint_{A.T_{x'}} \left| \frac{\partial Q}{\partial x} \right| dxdy.$$

Premesso ciò, ci sarà facile ora dare un teorema di esistenza del minimo assoluto per gli integrali $I_C^{+\infty}$, dimostrando che sotto certe ipotesi sulla $f(x,\ y,\ y')$, sono soddisfatte le condizioni generali 1), 2), 3), 4).

Supponiamo dunque che

$$I_C^{+\infty} = \int_0^{+\infty} f(x,\ y,\ y') dx$$

sia un integrale quasi regolare e che:

α) esista una funzione continua $\Phi(x,\ y')$, *definita per* $x \geq 0$ *e per ogni* y', *tale che*

$$\lim_{|y'| \to +\infty} \frac{\Phi(x,\ y)}{|y'|} = +\infty \qquad (x \geq 0),$$

e per la quale valga la disuguaglianza

$$f(x,\ y,\ y') \geq \Phi(x,\ y')$$

in ogni punto $(x,\ y)$ *di un campo normale* A *e per ogni* y';

β) esistano una funzione $\psi(x)$ *integrabile in senso generalizzato in* $0 \vdash +\infty$, *e una funzione* $Q(x,\ y)$ *continua con* $\frac{\partial Q}{\partial x}$ *nel campo* A, *siffatta da aversi*

$$\iint_A \left| \frac{\partial Q}{\partial x} \right| dxdy < +\infty,$$

$$\lim_{x \to +\infty} Q(x,\ y) = 0$$

per quasi ogni y, *ed*

$$f(x,\ y,\ y') \geq Q(x,\ y) \cdot y' + \psi(x)$$

per ogni $(x,\ y) \in A$ *e per ogni* y';

allora in ogni classe completa $\mathcal{K}$ *di curve ordinarie aventi* *tutte il punto iniziale fisso (o, più in generale, appartenente ad un insieme limitato), esiste il minimo assoluto di* $I_C^{+\infty}$.

Riferendoci alle condizioni generali del n. 2 si vede che la 1) è immediata conseguenza della ipotesi α); detta ipotesi ci assicura poi l'equiassoluta continuità in ogni intervallo finito, della classe $\mathcal{K}_m$ (teorema di Nagumo-Tonelli); ed essendo il punto iniziale fisso per le curve di $\mathcal{K}$, la $\mathcal{K}_m$ è altresì costituita da curve equilimitate in ogni intervallo finito; risulta con ciò verificato pure la 4).

Tenendo presente la relazione (24), dalla β) si ottiene

$$(25)\quad \int_{x'}^{x''} f(x,\ y(x),\ y'(x))dx \geq \int_{x'}^{x''} Q(x,\ y(x))y'(x)dx + \int_{x'}^{x''} \psi(x)dx \geq$$

$$\geq -\iint_{A.T_{x'}} \left|\frac{\partial Q}{\partial y}\right| dxdy + \int_{x'}^{x''} \psi(x)dx\,,$$

se è $0 \leq x' < x''$, qualunque sia la curva assolutamente continua $C \equiv \{y = y(x);\ 0 \leq x < +\infty\}$.

Dalla (25) si trae

$$I_C^X = \int_0^X f(x,\ y(x),\ y'(x))dx \geq -\iint_A \left|\frac{\partial Q}{\partial x}\right| dxdy + \int_0^X \psi(x)dx\,;$$

da cui segue che I_C^X è limitato inferiormente in $\mathcal{K}^X$; vale dunque la condizione 2).

Inoltre, osservando che

$$\lim_{x' \to +\infty} \iint_{A.T_{x'}} \left|\frac{\partial Q}{\partial x}\right| dxdy = 0,$$

potremo determinare un X_ε tale che per $X_\varepsilon \leq x' < x''$ si abbia simultaneamente

$$\iint_{A.T_{x'}} \left|\frac{\partial Q}{\partial x}\right| dxdy < \frac{\varepsilon}{2}\ ,\qquad \left|\int_{x'}^{x''} \psi(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ε essendo un numero positivo prefissato a piacere; dalla (25) si ottiene allora

$$\int_{x'}^{x''} f(x, y(x), y'(x))dx > -\varepsilon \qquad (X_\varepsilon \leq x' < x'').$$

Risulta con ciò soddisfatta pure la condizione 3), ed esiste quindi in virtù del teorema generale, il minimo assoluto di $I_C^{+\infty}$ nella classe $\mathcal{K}$.