RENDICONTI
*del*
SEMINARIO MATEMATICO
*della*
UNIVERSITÀ DI PADOVA

DONATO GRECO

**Su alcuni gruppi finiti che sono somma di cinque sottogruppi**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, tome 22 (1953), p. 313-333

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1953__22__313_0>

# SU ALCUNI GRUPPI FINITI CHE SONO SOMMA DI CINQUE SOTTOGRUPPI

*Nota* (*) *di* DONATO GRECO (*a Napoli*)

In un lavoro di qualche anno addietro ho effettuato la caratterizzazione dei gruppi finiti che godono della proprietà che ogni loro elemento appartiene ad almeno uno fra quattro sottogruppi fissi [1]. Tale ricerca costituiva una estensione di una precedente di G. SCORZA [3], nella quale venivano determinate delle condizioni necessarie e sufficienti perchè un gruppo, finito o non, possa pensarsi come somma di tre sottogruppi.

In una ricerca del 1950, M. SUZUKI [4] ha determinato i gruppi finiti, non semplici, che sono completamente decomponibili, intendendosi, con tale locuzione, di denotare quei gruppi finiti che sono somma di un certo numero di sottogruppi $H_i$ tutti ciclici ed aventi, a due a due, per intersezione il sottogruppo identico.

Mi son posto allora il problema di ricercare se è possibile assegnare una caratterizzazione dei gruppi finiti che possano pensarsi come somma di un certo numero $n$ di sottogruppi propri, lasciando cadere la restrizione che tali sottogruppi siano ciclici, ma imponendo la condizione che essi abbiano, a due a due, per intersezione un sottogruppo fisso. Nel caso particolare che il sottogruppo intersezione comune sia normale lo studio si riconduce, mediante passaggio al gruppo fattoriale, a quello dei gruppi finiti che sono somma di $n$ sottogruppi aventi, a due a due, per intersezione il sottogruppo identico. Quest'ultimo problema, a parte il caso trattato dal

(*) Pervenuta in Redazione il 10 Febbraio 1953.

SUZUKI, ha già formato oggetto di studio da parte di vari Autori [2], [5] e, in vari casi particolari, si sono conseguiti interessanti risultati. Nel caso generale, in cui l'intersezione comune non è supposta normale, una caratterizzazione generale dei gruppi suddetti, in dipendenza del numero dei sottogruppi addendi, non si presenta semplice, ma tuttavia non dovrebbe presentare eccessive difficoltà lo studio di casi particolari ottenuti facendo eventualmente ulteriori ipotesi semplificatrici sulla natura del gruppo e dei suoi sottogruppi o sul numero dei sottogruppi addendi.

Nella presente Nota ho effettuato lo studio di un caso particolare determinando i gruppi finiti che possono pensarsi come somma di cinque sottogruppi aventi, a due a due, per intersezione un sottogruppo fisso. Ho determinato delle condizioni necessarie e sufficienti perchè un gruppo finito $G$ goda della proprietà suddetta e tale condizione implica, come del resto i precedenti risultati lasciavano prevedere, che $G$ contenga un sottogruppo normale $N$, contenuto nell'intersezione comune dei cinque sottogruppi, tale che il gruppo fattoriale $G/N$ riesca isomorfo ad un gruppo determinato. I gruppi finiti che sono somma di cinque sottogruppi intersecantisi, a due a due, secondo un sottogruppo fisso restano così completamente caratterizzati.

**1.** — Sia $G$ un gruppo finito che possa pensarsi come somma di cinque sottogruppi:

$$G = G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + G_5 \tag{1}$$

ove i $G_k$ sono sottogruppi propri di $G$, quattro dei quali non esauriscono $G$.

Ovviamente i $G_k$ hanno, a quattro a quattro, per unione $G$, in quanto se l'unione di quattro di essi non contenesse il quinto, $G$ sarebbe somma di due sottogruppi e ciò, com'è noto, è impossibile [1]). È noto altresì [2]) che i cinque sottogruppi $G_k$ hanno, a quattro a quattro, per intersezione uno

---

1) Vedi [3].

2) Vedi [5, b].

stesso sottogruppo $H$ di $G$. Orbene noi faremo la seguente ipotesi:

$\alpha$) « *I sottogruppi* $G_k$ *hanno, a due a due, per intersezione uno stesso sottogruppo di* $G$ », sicchè risulterà:

$$G_h \cap G_k = H. \qquad (h \neq k) \tag{2}$$

Detti $L$ e $K$ due sottogruppi di $G$, con $L \subset K$, per denotare l'indice di $L$ in $K$ adotteremo la notazione $[K : L]$. In particolare porremo:

$$[G : G_k] = i_k ; \quad [G_k : G] = j_k ; \quad [G : H] = i .$$

Disposti gli indici $i_k$ in ordine non decrescente, e supposto che sia: $i_h \leq i_k$, per $h < k$, dalla (1), in forza della (2), si trae la relazione:

$$1 = \frac{1}{i_1} + \frac{1}{i_2} + \frac{1}{i_3} + \frac{1}{i_4} + \frac{1}{i_5} - \frac{4}{i}. \tag{3}$$

Poichè l'indice di $G_h \cap G_k$ in $G_k$ uguaglia l'indice di $G_h$ in $G_h \cdot G_k \subseteq G_h \cup G_k \subseteq G$, risulta, qualunque siano $h$ e $k$, con $h \neq k : j_h \leq i_k$, e quindi:

$$i = i_k j_k \leq i_k i_h \qquad (h \neq k). \tag{4}$$

La (3) allora, in forza della (4), fornisce:

$$1 + \frac{1}{i_1}\left(\frac{1}{i_2} + \frac{1}{i_3} + \frac{1}{i_4} + \frac{1}{i_5}\right) \leq \frac{1}{i_1} + \frac{1}{i_2} + \frac{1}{i_3} + \frac{1}{i_4} + \frac{1}{i_5} \tag{5}$$

da cui, per essere $i_k > 1$, in quanto i $G_k$ sono sottogruppi propri di $G$, segue:

$$1 \leq \frac{1}{i_2} + \frac{1}{i_3} + \frac{1}{i_4} + \frac{1}{i_5}. \tag{6}$$

Se ne deduce:

$$2 \leq i_1 \leq i_2 \leq 4 ,$$

cioè i due minori fra gli indici $i_k$ non possono superare 4.

**2.** — Supponiamo, in primo luogo, che sia: $i_1 = 4$. Dovendo essere, per $k > 1$, $i_k \geq 4$, la (6) fornisce: $i_2 = i_3 = i_4 = i_5 = 4$ onde, sostituendo nella (3), si trova: $i = 16$.

Sia ora: $i_1 = 2$. Poichè $G_1$ ha indice 2 in $G$, esso è normale ed è sottogruppo massimo onde risulta, qualunque sia $k > 1$, $G_1 \cup G_k = G$. Inoltre l'intersezione $H$ è normale in tutti i $G_k$, con $k > 1$, ed ha in ognuno di essi indice 2. $H$ è dunque normale in $G$. La (4) fornisce allora: $i_2 = i_3 = i_4 = i_5 = \frac{i}{2}$ e dalla (3) si trae: $i = 8$, $i_k = 4$, per $k > 1$.

Poichè sia quando è $i_1 = 2$ che quando è $i_1 = 4$ i rimanenti indici hanno tutti il valore 4, il secondo indice $i_2$ non può assumere che i valori 3 e 4, il primo di tali valori implicando: $i_1 = 3$.

Sia ora: $i_1 = 3$, il che implica: $i_2 = 3$, oppure $i_2 = 4$.

Sia anzitutto: $i_1 = i_2 = 3$. I sottogruppi $G_1$ e $G_2$, avendo entrambi indice 3, sono sottogruppi massimi di $G$. Ne segue: $G_1 \cup G_2 = G_1 \cup G_k = G_2 \cup G_k = G \, (k > 2)$. In forza della (4) si ha allora: $i \leq 9$, onde, dovendo $i$ essere multiplo proprio di 3, dovrà risultare o $i = 9$, oppure $i = 6$. Se è $i = 9$, $H$ ha indice 3 sia in $G_1$ che in $G_2$ onde, qualunque sia $k > 2$, deve essere: $i_k j_k = 9$; ne segue: $i_3 = i_4 = i_5 = 3$, ed i sottogruppi $G_k$ devono avere tutti indice 3, l'intersezione comune avendo indice 9. I valori così trovati per gli indici non soddisfano alla (3), e pertanto questo caso non può effettivamente presentarsi. Se è $i = 6$, $H$ ha indice 2 in $G_1$ ed in $G_2$, quindi è normale in entrambi, cioè è normale in $G$. $H$ è dunque normale in tutti i $G_k$, e per $k > 2$ si ha: $i_k j_k = 6$, con $i_k \geq 3$. Ne segue: $i_3 = i_4 = i_5 = 3$, onde i $G_k$ devono avere tutti indice 3, l'intersezione comune avendo indice 6. I valori così trovati per gli indici soddisfano alla (3). Si dimostra però subito che questo caso non può egualmente presentarsi. Invero, $H$ dovendo essere normale e d'indice 6 in $G$, il fattoriale $G/H$ è un gruppo del sesto ordine. Considerando l'omomorfismo che si stabilisce fra $G$ e $G/H$, facendo corrispondere ad ogni elemento di $G$ il laterale di $H$ cui esso appartiene, si riconosce subito che $G/H$ è, a sua volta, somma di cinque sottogruppi tutti di indice 3, cioè di ordine 2, aventi, a due a due, per intersezione il sottogruppo identico. Un gruppo del sesto ordine avente strttura siffatta non esiste, e ciò prova che il caso in questione non può effettivamente presentarsi.

Sia infine: $i_1 = 3, i_2 = 4$. Dalla (6), si trae: $i_k = 4$, per $k > 2$, onde la (3) fornisce: $i = 16$.

Si può dunque asserire che:

I. — « *Se $G$ è somma di cinque sottogruppi aventi a due a due per intersezione uno stesso sottogruppo $H$, per gli indici $i_k$ dei $G_k$ e l'indice $i$ di $H$ possono presentarsi i seguenti casi:*

A) $i_1 = 2 \quad ; \quad i_2 = i_3 = i_4 = i_5 = 4 \quad ; \quad i = 8$

B) $i_1 = 3 \quad ; \quad i_2 = i_3 = i_4 = i_5 = 4 \quad ; \quad i = 12$

C) $i_1 = 4 \quad ; \quad i_2 = i_3 = i_4 = i_5 = 4 \quad ; \quad i = 16$ ».

**3.** — Cominciamo con l'esame del caso A).

Poichè $G_1$ ha indice 2 in $G$, esso è normale ed è sottogruppo massimo onde, qualunque sia $k > 1$, si ha: $G_1 \cup G_k = G$. L'intersezione $H = G_1 \cap G_k$ è allora normale in tutti i $G_k$, con $k > 1$, e quindi è normale nella loro unione $G$. Si può allora considerare il gruppo fattoriale $G/H$ che ha ordine 8. Considerando l'omomorfismo tra $G$ e $G/H$ si riconosce subito che $G/H$ è, a sua volta somma di cinque sottogruppi, di cui uno d'indice 2 ed i rimanenti d'indice 4, aventi, a due a due, per intersezione il sottogruppo identico. Ora gli unici gruppi di ordine 8 aventi tale proprietà sono il gruppo diedrale ed il gruppo abeliano di tipo (1, 1, 1). Pertanto il fattoriale $G/H$ deve essere isomorfo ad uno di questi.

È da notare allora, che in entrambi i casi, il gruppo $G$ può pensarsi, oltre che come somma di cinque, anche come somma di quattro o di tre sottogruppi.

**4.** — Consideriamo ora il caso B).

Per essere: $[G : G_1] = 3$, $G_1$ è sottogruppo massimo di $G$ e quindi, qualunque sia $k > 1$, si ha: $G_1 \cup G_k = G$.

Dico ora che:

II. — « *Nel caso* B) *i* $G_k$ *sono tutti sottogruppi massimi, ed hanno quindi, a due a due, per unione* $G$ ».

Evidentemente la II va dimostrata per i sottogruppi $G_k$, con $k > 1$.

Cominciamo col dimostrare che i $G_k$ hanno, a due a due, per unione $G$. Detti $h$ e $k$ due indici maggiori di 1, $h \neq k$, poichè $G_h \cap G_k = H$ ha indice 3 sia in $G_h$ che in $G_k$, $G_h$ e $G_k$ devono avere entrambi almeno indice 3 in $G_h \cup G_k$. Se $G_h \cup G_k$ fosse un sottogruppo proprio di $G$, esso dovrebbe avere in $G$ indice 2, il che è assurdo.

Supponiamo ora che $G_2$ non sia massimo, cioè che esista in $G$ un sottogruppo proprio $\overline{G}_2$ contenente propriamente $G_2$. Per essere: $[G : G_2] = 4$, si ha: $[G : \overline{G}_2] = 2$ e, avendosi, per $k \neq 2$, $G_2 \cup G_k = G$, $\overline{G}_2$ non contiene alcuno dai $G_k$ distinti da $G_2$. Ora, poichè $\overline{G}_2 \supset G_2$, si ha:

$$\overline{G}_2 \cap G_k \supseteq G_2 \cap G_k = H . \tag{7}$$

Ma, per essere $[G_k : \overline{G}_2 \cap G_k] = 2$, $[G_k : H] = 3$, la (7) è assurda. Pertanto non può esistere un sottogruppo proprio di $G$ contenente propriamente $G_2$ e resta provato che $G_2$ è sottogruppo massimo.

Dalla II segue subito che nessuno dei $G_k$, con $k > 1$, è mai normale in $G$. Invero, se ciò fosse, $G/G_k$, di ordine 4, conterrebbe un sottogruppo $K/G_k$, di ordine 2, e $K$ conterrebbe propriamente $G_k$, in contrasto col fatto che $G_k$ è massimo.

Mostriamo ora che:

III. — « *Condizione necessaria e sufficiente perchè, nel caso* B), $H$ *sia normale in* $G$ *è che* $G_1$ *sia normale* ».

Che la condizione sia sufficiente è ovvio, in forza della II. Dimostriamone quindi la necessarietà.

Sia $H$ normale in $G$ e supponiamo che $G_1$ non sia normale onde esso, coincidendo, perchè massimo, col proprio normalizzante in $G$, possiede tre coniugati: $G_1$, $G_1'$, $G_1''$, tutti massimi. Poichè è $H \subset G_1$ ed $H$ è normale in $G$, $H$ è contenuto in tutti i coniugati di $G_1$ e si ha: $H \subset G_1 \cap G_1' \cap G_1''$. Avendosi $[G : G_1] = 3$ ed essendo $G_1 \cup G_1' = G$, si ha: $[G_1 : G_1 \cap G_1'] \leq 3$ e quindi, essendo $G_1 \cap G_1' \supset H$ e

$[G_1 : H] = 4$, riesce: $[G_1 : G_1 \cap G_1'] = [G_1' : G_1 \cap G_1'] = 2$. Ma allora $G_1 \cap G_1'$ è normale in $G_1$ ed in $G_1'$, quindi è normale in $G_1 \cup G_1' = G$; pertanto $G_1 \cap G_1'$ è contenuto in $G_1''$ e si ha: $G_1 \cap G_1' = G_1 \cap G_1' \cap G_1'$. Il sottogruppo normale $G_1 \cap G_1' \cap G_1''$ dunque contiene $H$ ed ha indice 6 in $G$. Ne segue: $[G_1 \cap G_1' \cap G_1'' : H] = 2$. Il sottogruppo $G_1 \cap G_1' \cap G_1''$ non è contenuto in alcuni dei $G_k$, con $k > 1$, perchè se fosse: $G_1 \cup G_1' \cap G_1'' \subset G_k$ sarebbe: $H = G_1 \cap G_k \supset G_1 \cap G_1' \cap G_1''$ mentre, come si è visto, è $G_1 \cap G_1' \cap G_1'' \supset H$. Ma allora, in forza della II, si ha: $(G_1 \cap G_1' \cap G_1'') \cup G_k = G$, $(G_1 \cap G_1' \cap G_1'') \cap \cap\, G_k = H$ e, poichè $G_1 \cap G_1' \cap G_1''$ è normale in $G$, deve essere: $[G : G_1 \cap G_1' \cap G_1''] = [G_k : H]$; ciò è assurdo, per essere: $[G : G_1 \cap G_1' \cap G_1''] = 6$, $[G_k : H] = 3$.

Resta così provato che $G_k$ è normale in $G$, e la III è dimostrata.

Nel caso B) sono dunque da prendersi in considerazione le due seguenti alternative:

$B_1$) *L'intersezione $H$ è normale in $G$;*

$B_2$) *L'intersezione $H$ non è normale in $G$.*

Orbene dimostreremo che:

IV. — *Il caso* $B_1$) *si presenta effettivamente ed allora il gruppo fattoriale $G/H$ è isomorfo al gruppo alterno di grado quattro.*

V. — *Il caso* $B_2$) *è da escludersi.*

**5.** — Dimostriamo la IV.

Se $H$ è normale in $G$, $G_1$ è normale ed ha indice 3; il gruppo fattoriale $G/H$, di ordine 12, possiede il sottogruppo normale $G_1/H$, di ordine 4 che, per il teorema di Sylow, è l'unico sottogruppo di tale ordine, ed i quattro sottogruppi di ordine 3 $G_k/H$, con $k > 1$, tra loro coniugati per il teorema di Sylow. Rappresentando omorficamente $G$ su un gruppo di sostituzioni che operi sui coniugati di $G_2$, si riconosce che $G/H$ è isomorfo ad un gruppo transitivo di sostituzioni di grado quattro e quindi, avendo ordine 12, $G/H$ non è altro che il gruppo alterno di grado 4, definito dalle relazioni:

$$a^2 = b^2 = c^3 = 1$$

$$ab = ba \quad ; \quad ac = cb \quad ; \quad bc = cab\,.$$

Dimostriamo ora la V.

Supponiamo che $H$ non sia normale in $G$, ossia che $G_1$ non sia normale. Detti ancora $G_1$, $G_1'$, $G_1''$ i tre coniugati di $G_1$, tali sottogruppi hanno, a due a due, per intersezione uno stesso sottogruppo:

$$N_1 = G_1 \cap G_1' \cap G_1''$$

normale in $G$, d'indice 2 in ognuno di essi, e quindi d'indice 6 in $G$. Il gruppo fattoriale $G/N_1$ è dunque isomorfo al gruppo totale di grado tre e, come tale, contiene un sottogruppo $K$ normale e d'indice 2. Posto: $K = \overline{G}_1/N_1$, $\overline{G}_1$ è un sottogruppo normale in $G$, avente in $G$ indice 2, e che interseca i tre coniugati di $G_1$ secondo il sottogruppo $N_1$. In forza della II, $\overline{G}_1$ non contiene alcuno dei $G_k$ e, poichè, per $k > 1$, risulta $[G_k : H] = 3$, $[G_k : \overline{G}_1 \cap G_k] = 2$, $\overline{G}_1$ non contiene $H$ e quindi neanche $N_1$ contiene $H$. Posto:

$$N_1 \cap H = N\,,$$

$N$ è allora un sottogruppo proprio di $H$ e poichè $H$ ed $N_1$ sono entrambi in $G_1$ ed $N_1$ vi è massimo, si ha: $H \cup N_1 = G_1$; ne segue: $[H : N] = [G_1 : N_1] = 2$.

Consideriamo allora, per $k > 1$, i sottogruppi $N_1 \cap G_k$. Poichè $G_k$ non contiene $N_1$, in forza della II, riesce: $N_1 \cup G_k = G$ e, per essere $N_1$ normale e d'indice 6 in $G$, $N_1 \cap G$ è normale in $G_k$ e vi ha indice 6. Avendosi poi: $N \subset N_1 \subset G_1$, riesce: $N \subseteq N_1 \cap G_k \subset G_1 \cap G_k = H$; ne segue: $[H : N_1 \cap G_k] = 2$ e quindi: $N = N_1 \cap G_k$. Ma allora $N$ è normale in tutti i $G_k$, con $k > 1$, e quindi, in virtù della II, è normale in $G$.

Il sottogruppo normale $N_1$ interseca dunque i quattro sottogruppi $G_k$, con $k > 1$, secondo il sottogruppo fisso $N$ normale in $G$, contenuto in $H$, ed avente in $H$ indice 2 ossia indice 24 in $G$.

Poichè, per $k > 1$, $G_k$ è sottogruppo massimo di $G$ e non è normale, esso coincide col proprio normalizzante e quindi possiede quattro coniugati:

$$G_k = G_k^{(1)},\ G_k^{(2)},\ G_k^{(3)},\ G_k^{(4)}.$$

Dico che si ha:

$$G_k^{(1)} \cap G_k^{(2)} \cap G_k^{(3)} \cap G_k^{(4)} = N. \tag{8}$$

Invero, posto:

$$G_k^{(1)} \cap G_k^{(2)} \cap G_k^{(3)} \cap G_k^{(4)} = N_k,$$

$N_k$ è un sottogruppo normale in $G$; essendo poi $N$ normale in $G$ ed avendosi: $N \subset G_k$, $N$ è contenuto in tutti i coniugati di $G_k$ e quindi risulta: $N \subset N_k$. Pertanto l'indice $[G_k : N_k]$ deve essere un divisore dell'indice $[G_k : N] = 6$ e quindi non può avere che uno dei valori 2, 3, 6. Se fosse $[G_k : N_k] = 2$, si avrebbe $[G : N_k] = 8$ e il fattoriale $G/N_k$ sarebbe un gruppo di ordine 8 contenente il sottogruppo $G_k/N_k$ di ordine 2; $G_k/N_k$ sarebbe allora contenuto in almeno un sottogruppo $L_k$ di ordine 4 di $G/N_k$ e, posto: $L_k = \overline{G}_k/N_k$, $\overline{G}_k$ sarebbe un sottogruppo d'indice 2 in $G$ contenente $G_k$, in contrasto con la II. Se fosse $[G_k : N_k] = 3$, si avrebbe $[N_k : N] = 2$; $G_k$ conterrebbe allora i due sottogruppi $H$ ed $N_k$, entrambi d'indice 3, necessariamente distinti, e di cui uno normale, in contrasto col teorema di Sylow. Se ne deduce: $[G_k : N_k] = [G_k : N] = 6$ cioè, per essere $N \subset N_k$, la (8).

I quattro coniugati di $G_k$ si intersecano quindi, a tre a tre, secondo un sottogruppo d'indice 6 in ognuno di essi. Ne segue che i tre sottogruppi:

$$G_k^{(1)} \cap G_k^{(2)}; \quad G_k^{(1)} \cap G_k^{(3)}; \quad G_k^{(1)} \cap G_k^{(4)}$$

non possono coincidere fra loro e pertanto ognuno dei fattoriali $G_k^{(i)}/N$, di ordine 6, contiene tre sottogruppi di ordine 2 ed è quindi isomorfo al gruppo totale di grado 3. Ne segue che $G_k^{(i)}/N$ contiene uno ed un solo sottogruppo $\Gamma_{3,k}^{(i)}$ di ordine 3, e quindi normale in $G_k^{(i)}/N$; pertanto, posto: $\Gamma_{3,k}^{(i)} = \overline{G}_k^{(i)}/N$, $\overline{G}_k^{(i)}$ è un sottogruppo d'indice 2 in $G_k^{(i)}$, quindi normale in questo, contenente $N$. $\overline{G}_k^{(i)}$ è anzi l'unico sottogruppo contenuto in $G_k^{(i)}$ avente in questo indice 2 e contenente $N$; inoltre si ha: $\overline{G}_k^{(i)} \neq \overline{G}_k^{(j)}$, per $i \neq j$.

Consideriamo allora l'intersezione del sottogruppo $\overline{G}_1$ d'indice 2 in $G$ col generico sottogruppo $G_k^{(i)}$, con $k > 1$. Avendosi: $\overline{G}_1 \cup G_k^{(i)} = G$, $\overline{G}_1 \cap G_k^{(i)}$ è un sottogruppo normale in $G_k^{(i)}$, avente in $G_k^{(i)}$ indice 2 e contenente $N$, cioè si ha:

$$\overline{G}_1 \cap G_k^{(i)} = \overline{G}_k^{(i)} .$$

Ognuno dei sottogruppi $\overline{G}_k^{(i)}$ dando luogo, nel fattoriale $\overline{G}_1/N$, ad un sottogruppo di ordine tre, il fattoriale $\overline{G}_1/N$ deve allora contenere, per ogni $k > 1$, quattro sottogruppi di ordine tre, cioè $\overline{G}_1/N$ deve contenere più di quattro sottogruppi di ordine tre. Ma $\overline{G}_1/N$ ha ordine 12 e quindi, a norma del teorema di Sylow, non può contenere più di quattro sottogruppi di ordine tre.

L'assurdo cui si perviene dimostra la V.

**6.** — Consideriamo ora il caso C) in cui, qualunque sia $k$, si ha: $i_k = 4$, $i = 16$.

Avendosi: $[G : G_k] = [G_h : G_h \cap G_k] = 4$, per $h \neq k$, si ha: $G = G_h \cdot G_k = G_k \cdot G_h$ ed i $G_k$ sono, a due a due, permutabili ed hanno, a due a due, per unione $G$.

Supponiamo, in primo luogo, che l'intersezione $H$ sia normale in $G$, sicchè si può considerare il gruppo fattoriale $G/H$, di ordine 16, il quale, in forza dell'omorfismo intercedente tra $G$ e $G/H$, è somma di cinque sottogruppi $G_k/H$ tutti di ordine 4 ed aventi, a due a due, per intersezione il sottogruppo identico. Questo caso rientra allora in un noto risultato più generale [3]) e si può subito affermare che:

VI. — *Se, nel caso* C), *$H$ non è normale in $G$, il fattoriale $G/H$ è il gruppo di ordine $2^4$ abeliano di tipo* (1, 1, 1, 1) *e pertanto i quattro sottogruppi $G_k$ sono tutti normali in $G$.*

Ci resta quindi da esaminare il caso in cui $H$ non sia normale in $G$. Dimostriamo allora che:

---

[3]) Il risultato al quale si fa riferimento nel testo è il seguente: « *Se un gruppo $\Gamma$ è somma di $n+1$ sottogruppi $\Gamma_k$, aventi, a due a due, intersezione identica e tutti di ordine $n$, $n$ è necessariamente potenza di un numero primo e, posto*: $n = p^\alpha$, *$\Gamma$ è il gruppo di ordine $p^{2\alpha}+1$, abeliano di tipo* (1, 1, ..., 1) ». Cfr. [2], [5, a].

VII. — *Se, nel caso* C), $H$ *non è normale in* $G$, *i* $G_k$ *sono tutti sottogruppi massimi e nessuno di essi è normale.*

Che, non essendo $H$ normale in $G$, nessuno dei $G_k$ è normale segue subito dal fatto che i $G_k$ hanno, a due a due, per prodotto $G$. Dimostriamo allora che i $G_k$ sono sottogruppi massimi.

Supponiamo che $G_k$ non sia massimo, ovvero che esista un sottogruppo proprio $\overline{G}_k$ contenente propriamente $G_k$, sicchè si ha, necessariamente, $[G : \overline{G}_k] = [\overline{G}_k : G_k] = 2$ e $\overline{G}_k$ è normale in $G$. Poichè i $G_h$ hanno, a due a due, per unione $G$, $\overline{G}_k$ non contiene alcuno dei $G_h$ con $h \neq k$ e quindi, per ogni $h \neq k$, si ha: $\overline{G}_k \cup G_h = G$, mentre $\overline{G}_k \cap G_h$ ha indice 2 in $G_h$, quindi vi è normale, e contiene $H$ che ha quindi, a sua volta, indice 2 in $\overline{G}_k \cap G_h$. I sottogruppi $\overline{G}_k \cap G_h$, con $h \neq k$, si intersecano allora, a due a due, secondo il sottogruppo $H$, d'indice $2^3$ in $\overline{G}_k$, risultando ancora: $G_k \cap (\overline{G}_k \cap G_h) = H$. Poichè $\overline{G}_k$ è un sottogruppo di $G$, un elemento di $\overline{G}_k$ che non sia in $G_k$ apparterrà ad uno dei $G_h$, con $h \neq k$, e quindi sarà nel corrispondente sottogruppo $\overline{G}_k \cap G_h$; viceversa, un elemento di $\overline{G}_k$ che non sia in alcuno dei sottogruppi $\overline{G}_k \cap G_h$, con $h \neq k$, non è in alcuno dei $G_h$, con $h \neq k$, e pertanto appartiene a $G_k$. Ne segue che $\overline{G}_k$ è, a sua volta, somma di cinque sottogruppi, avendosi:

$$\overline{G}_k = G_k + \sum_{h=1}^{5}{}^{(h \neq k)}\, \overline{G}_k \cap G_h\,, \tag{9}$$

ove $G_k$ ed i $\overline{G}_k \cap G_h$ hanno, a due a due, per intersezione $H$ ed inoltre $G_k$ ha indice 2 in $\overline{G}_k$ ed i $\overline{G}_k \cap G_h$ hanno indice 4 in $\overline{G}_k$. Il sottogruppo $\overline{G}_k$ rientra dunque nel caso A), di cui al n. 3, onde $H$ è normale in $\overline{G}_k$ ed il gruppo fattoriale $\overline{G}_k/H$ è il gruppo di ordine 8, abeliano di tipo (1, 1, 1) o diedrale.

Se dunque $G_k$ non è massimo e $\overline{G}_k$ è un sottogruppo contenente $G_k$, $\overline{G}_k$ contiene normalmente l'intersezione $H$. Ne segue che se $G_k$ non è massimo, esso è l'unico avente tale proprietà, mentre i rimanenti sottogruppi $G_h$, con $h \neq k$, sono tutti massimi in $G$.

Poichè $H$ è normale in $\overline{G}_k$ e, per ipotesi, non è normale in $G$, $H$ possiede due coniugati in $G$, $H$ ed $H'$, entrambi contenuti in $\overline{G}_k$, perchè $\overline{G}_k$ è normale, aventi per intersezione un sottogruppo $K$ normale in $G$ ed avente indice 2 sia in $H$ che in $H'$, ossia indice $2^5$ in $G$. Ne segue che il fattoriale $G/K$ ha ordine $2^5$ e, per essere $K \subset H \subset G_h$, contiene, per ogni $h \neq k$, il sottogruppo $G_h/K$, di ordine $2^3$. Tale sottogruppo è allora necessariamente contenuto in un sottogruppo $\Gamma_h$ di ordine $2^4$ del gruppo $G/K$. Posto: $\Gamma_h = \overline{G}_h/K$, $\overline{G}_h$ è un sottogruppo d'indice 2 in $G$ contenente $G_h$. Ciò è assurdo in quanto, per essere $h \neq k$, $G_h$ è, per quanto dianzi si è visto, massimo in $G$.

La VII è così dimostrata e si può in più affermare che se $H$ non è normale in $G$, non solo i $G_k$ sono massimi, ma due qualunque di essi non sono mai coniugati in $G$. Invero, poichè i $G_k$ sono a due a due permutabili, si ha, ad es. $G = G_1 \cdot G_2$ onde ogni elemento di $G$ è del tipo $g_1 g_2$, con $g_1 \varepsilon G_1$ e $g_2 \varepsilon G_2$

Se $G_1$ e $G_2$ fossero coniugati esisterebbe allora un elemento $g_1 \varepsilon G_1$, tale che: $g_1^{-1} G_2 g_1 = G_1$; ne seguirebbe $G_1 \equiv G_2$, e ciò è assurdo.

**7.** — Se $H$ non è normale in $G$, la VII ci assicura che, qualunque sia $k$, $G_k$ coincide col proprio normalizzante in $G$ e quindi possiede quattro coniugati in $G$:

$$G_k = G_k^{(1)},\ G_k^{(2)},\ G_k^{(3)},\ G_k^{(4)}.$$

Posto:

$$N_k = G_k^{(1)} \cap G_k^{(2)} \cap G_k^{(3)} \cap G_k^{(4)},$$

$N_k$ è normale in $G$, ed inoltre non esiste alcun sottogruppo $K$ normale in $G$, contenente propriamente $N_k$, e contenuto in uno dei $G_k^{(i)}$.

Poichè $G_k$ possiede quattro coniugati in $G$, il gruppo $G$ può rappresentarsi omomorficamente su un gruppo transitivo di sostituzioni $\Phi$ di grado quattro operante sui coniugati di $G_k$. Nell'omorfismo $\omega$ tra $G$ e $\Phi$ che così si stabilisce, al sottogruppo $N_k$ intersezione dei coniugati di $G_k$ corrisponde il sottogruppo identico $E$ di $\Phi$, ed inoltre i due gruppi $G/N_k$ e $\Phi$ sono tra loro isomorfi. Ai sottogruppi $G_k^{(i)}$, coniugati di

$G_k$ in $G$, corrispondono allora quattro sottogruppi d'indice 4 coniugati in $\Phi$ ed isomorfi ai fattoriali $G_k^{(i)}/N_k$. Se ne deduce che $\Phi$ è un sottogruppo del gruppo totale di grado 4 che possiede quattro sottogruppi d'indice quattro, tra loro coniugati; pertanto $\Phi$ non può essere che il gruppo totale stesso od il gruppo alterno. Il fattoriale $G/N_k$ non può dunque avere che uno degli ordini 12 o 24 e quindi le alternative possibili per l'indice $[G_k : N_k]$ sono le seguenti:

$$(\mathrm{C}_1) \qquad [G_k : N_k] = 3\,; \qquad\qquad (\mathrm{C}_2) \qquad [G_k : N_k] = 6$$

**8.** — Cominciamo con l'esaminare il caso $(\mathrm{C}_1)$ in cui i quattro coniugati di $G_k$ si intersecano, a due a due, secondo il sottogruppo $N_k$, normale in $G$ e d'indice 3 in ognuno di essi, il fattoriale $G/N_k$ essendo isomorfo al gruppo alterno di grado 4.

Posto, per semplicità, $k = 1$, osserviamo che, avendosi: $[G_1 : H] = 4$, $[G_1 : N_1] = 3$, il sottogruppo $N_1$ non contiene $H$ e, poichè $N_1$ è massimo in $G_1$, risulta: $H \cup N_1 = G_1$. Posto allora:

$$H \cap N_1 = N \tag{10}$$

$N$ è normale in $H$ e vi ha indice 3.

Dico che $N$ è normale in $G$. Invero, osserviamo anzitutto che, per essere $N_1 \subset G_1$, per $k > 1$ $N_1$ non è in $G_k$, altrimenti sarebbe $N_1 \subset H$. Ne segue: $N_1 \cup G_k = G$, e quindi: $[G_k : N_1 \cap G_k] = [G : N_k] = 12$. Avendosi allora: $N = H \cap N_1 \subseteq G_k \cap N_1$, e $[G_k : N] = [G_k : H] \cdot [H : N] = 12$, risulta: $N = N_1 \cap G_k$. Pertanto $N$ è normale in tutti i sottogruppi $G_k$, con $k > 1$, e quindi è normale in $G$. Ma allora, per ogni $k > 1$, $N$ è contenuto in tutti i coniugati di $G_k$ e quindi nella loro intersezione $N_k$. Avendosi, di conseguenza, per $k > 1$, $N \subset H \cap N_k$, l'indice $[H : H \cap N_k]$, per ogni $k > 1$, deve essere un divisore dell'indice $[H : N] = 3$ e quindi, non potendo essere $H \cap N_k = H$, si ha: $[H : H \cap N_k] = 3$, cioè qualunque sia $k > 1$, si ha pure $N = H \cap N_k$. Ma allora essendo $[G : N_k] = 12$, riesce $[G_k : N_k] = 3$ e quindi, per ogni $k > 1$, i quattro coniugati di $G_k$ si intersecano, a due a due, secondo uno stesso sottogruppo $N_k$ d'indice 3 in ognuno di essi e quindi d'indice 12 in $G$ e tale sottogruppo interseca $H$ secondo il sottogruppo fisso $N$.

Osserviamo ora che, per $h \neq k$, riesce: $N_h \neq N_k$. Invero, se fosse $N_h = N_k$, per essere $N_k \subset G_k$, $N_h \subset G_h$, sarebbe: $N_h = N_k \subset G_h \cap G_k = H$, il che è assurdo. Inoltre si ha, per $h \neq k$, $N_h \cap N_k = N$. Invero, per essere $N \subset N_h$, $N \subset N_k$, riesce: $N \subseteq N_h \cap N_k$. Si ha poi: $N_h \cap N_k \subseteq N_h \cap G_k \subseteq H$ cioè $N_h \cap N_k \subseteq N_h \cap H = N$. Ne segue, come volevasi: $N_h \cap N_k = N$.

Dunque i cinque sottogruppi $N_k$ si intersecano, a due a due, secondo il sottogruppo $N$, normale e d'indice 48 in $G$. Orbene dico che i cinque sottogruppi $N_k$ hanno per unione, uno stesso sottogruppo di $G$. Consideriamo invero il gruppo fattoriale $G/N$, di ordine 48. $G/N$ contiene i cinque sottogruppi $N_k/N$, normali, di ordine 4 ed intersecantisi, a due a due, secondo il sottogruppo identico. L'unione $(N_h/N) \cup (N_k/N)$ è, per $h \neq k$, un sottogruppo normale $\Lambda$ di ordine $2^4$, cioè d'indice 3, in $G$ che, a norma del teorema di Sylow, è l'unico sottogruppo normale di ordine 16 di $G/N$. Ne segue che $\Lambda$ contiene tutti i sottogruppi $N_k/N$ e quindi rappresenta l'unione di questi a due a due. Posto: $\Lambda = M/N$, $M$ è un sottogruppo normale, d'indice 3 in $G$, unione dei sottogruppi $N_k$, a due a due. Si ha allora, per ogni $k$: $M \cap G_k = N$ e, poichè $M$ è un sottogruppo di $G$, con un ragionamento già fatto altrove, si riconosce che $M$ è somma dei cinque sottogruppi $N_k$.

Consideriamo di nuovo il fattoriale $G/N$, di ordine $2^4 \cdot 3$, che contiene il sottogruppo $M/N$, normale e di ordine 16 il quale, in forza dell'omomorfismo $\omega$ intercedente tra $G$ e $G/N$ è somma dei cinque sottogruppi $N_k/N$ di ordine 4 aventi, a due a due, per intersezione il sottogruppo identico. Per la VI, $M/N$ è il gruppo di ordine 16 abeliano di tipo (1, 1, 1, 1).

Nell'omomorfismo $\omega$ ai cinque sottogruppi $G_k$ di cui $G$ è somma corrispondono cinque sottogruppi $G_k/N$, di ordine 12, intersecantisi a due a due, secondo uno stesso sottogruppo di ordine 3, $H/N$, non normale in $G/N$. Ognuno dei sottogruppi $N_k/N$, di cui $M/N$ è somma, si presenta poi come intersezione di quattro sottogruppi di ordine 12, coniugati in $G/N$.

Osserviamo infine che $H$ avendo indice 16 in $G$ e non essendo contenuto normalmente in alcun sottogruppo d'indice minore, $H$ coincide col proprio normalizzante in $G$ e quindi possiede 16 coniugati in $G$. Ne segue che il fattoriale $G/N$ deve contenere 16 elementi di ordine 3, ossia $G/N$ deve contenere il massimo numero di elementi di ordine 3 che, a norma del teorema di Sylow, un gruppo di ordine $2^4 \cdot 3$ possa contenere. Ne segue che $G/N$ non può contenere elementi di periodo 6.

Il gruppo fattoriale $G/N$ si ottiene dunque ampliando il gruppo $M/N$ di generatori:

$$a_k^2 = 1 \,, \qquad a_h a_k = a_k a_h \qquad (h,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

mediante un elemento di periodo 3, l'ampliamento essendo tale che ognuno dei sottogruppi $N_k/N$ di cui $M/N$ è somma risulti normale in $G/N$, che ad ognuno di essi corrispondano, in $G/N$, quattro sottogruppi, di ordine 12, coniugati in $G/N$ ed in esso intersecantisi, e che $G/N$ sia dotato del massimo numero possibile di elementi di periodo 3. Detto allora $b$ un elemento di periodo 3, $b$ deve trasformare in se i quattro sottogruppi $N_k/N$ di cui $M/N$ è somma. Inoltre $b$ non può essere permutabile con alcun elemento $x$ del gruppo $M/N$, altrimenti l'elemento $xb$ avrebbe periodo 6 e $G/N$ non conterrebbe il massimo numero possibile di elementi di periodo 3. $G/N$ è dunque definito dalle relazioni:

$$\text{(11)} \qquad \begin{array}{lcll} a_k^2 = b^3 = 1 & ; & a_h a_k = a_k a_h & (h,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ 4) \\ a_1 b = b a_2 & ; & a_2 b = b a_1 a_2 & \\ a_3 b = b a_4 & ; & a_4 b = b a_3 a_4 & \end{array}$$

9. — Mostriamo ora come il caso ($C_2$) è senz'altro da escludersi.

Posto ancora, per semplicità, $k = 1$, osserviamo che siccome i quattro coniugati di $G_1$ si intersecano secondo il sottogruppo $N_1$ d'indice 6 in ognuno di essi, ossia d'indice 24 in $G$ ed il gruppo $G/N_1$ è isomorfo al gruppo simmetrico di grado quattro, due coniugati di $G_1$, $G_1^{(i)}$ e $G_1^{(j)}$ hanno per intersezione un sottogruppo $G_1^{(i)} \cap G_1^{(j)}$ d'indice 12 in $G$, cui corrisponde, nell'omomorfismo fra $G$ e $G/N_1$, un sottogruppo $\Gamma^{(i,j)} = (G_1^{(i)} \cap G_1^{(j)})/N_1$ di ordine 2; i sottogruppi $G_1^{(i)}$ si intersecano invece, a tre a tre, secondo $N_1$. Il fattoriale $G/N_1$ contiene allora uno ed un solo sottogruppo $\Lambda$ d'indice 2, isomorfo al gruppo alterno di grado quattro, ed uno ed un solo sottogruppo $\Delta$ di indice 6 normale in $G/N$ perchè intersezione dei suoi tre sottogruppi di Sylow di ordine 8, e contenuto in $\Lambda$, inoltre $\Lambda$ contiene i tre sottogruppi $\overline{\Gamma}_1^{(i)}$ di ordine 3 del gruppo simmetrico $G/N_1$. Posto:

$$\Lambda = M/N_1 \quad ; \quad \Delta = K/N_1 \quad ; \quad \overline{\Gamma}_1^{(i)} = \overline{G}_1^{(i)}/N_1\,, \tag{12}$$

$M$ è un sottogruppo normale e d'indice due in $G$, $K$ è un sottogruppo normale e d'indice 6 in $G$, contenuto in $M$ e contenente $N_1$, $\overline{G}_1^{(i)}$ è un sottogruppo contenente $N_1$, contenuto in $G_1^{(i)}$ ed avente in questo indice 2, e si ha:

$$M = K \cup \overline{G}_1^{(i)} = \overline{G}_1^{(i)} \cup \overline{G}_1^{(j)}\,.$$

Ovviamente, poichè ognuno dei $G_k$ è massimo in $G$, $M$ non contiene alcuno dei $G_k$. Inoltre, essendo $[G:K] = 6$, $[G:G_k] = 4$, $K$ non contiene alcuno dei $G_k$ nè è contenuto in alcuno di essi, onde si ha: $K \cup G_k = G$; ne segue: $[G_k : K \cap G_k] = [G:K] = 6$ e quindi, essendo $N_1 \subset K$, $N_1 \subset G_1^{(i)}$, si ha: $K \cap G_1^{(i)} = N_1$.

Dico ora che il sottogruppo normale $M$, d'indice 2 in $G$, non contiene $H$. Supponiamo invero: $M \supset H$. Poichè è $[G:M] = 2$ ed $M$ non contiene alcuno dei $G_k$, in quanto questi sono massimi, si ha: $M \cup G_k = G$, quindi è $[G_k : M \cap G_k] = 2$ ed $M \cap G_k$ è normale in $G_k$ e contiene $H$ come sottogruppo d'indice 2. Si ha allora: $M = \sum_{k=1}^{5} (M \cap G_k)$ ove i sottogruppi $M \cap G_k$, tutti di indice 4 in $M$, si intersecano, a due a due, secondo $H$. Il sottogruppo $H$ è allora normale in $M$, ed il fattoriale $M/H$ ha ordine 8 ed è somma di cinque sottogruppi di ordine 2. Ciò è assurdo e quindi $M$ non contiene $H$. Ne segue che $H$ non è contenuto in alcun sottogruppo contenuto in $M$, cioè $H$ non è nè in $N_1$, nè in $\overline{G}_1^{(i)}$, nè in $K$. Risulta pertanto: $N_1 \cup H = G_1$ e, posto ancora:

$H \cup N_1 = N$, $N$ ha indice 6 in $H$ e quindi indice $3 \cdot 2^5$ in $G$.

Il sottogruppo $N$ è contenuto in tutti i sottogruppi $G_k$ e vi ha indice 24. Ragionando come già si è fatto al n. 8 si riconosce essere: $N = N_1 \cap G_k (k > 1)$, il che implica che $N$ è normale in $G$ ed è contenuto quindi, per ogni $k > 1$, nel sottogruppo $N_k$. Ora, i risultati del n. precedente ci garantiscono che nel caso ($C_2$) si ha, per ogni $k$, $[G_k : N_k] = 6$. Pertanto, avendosi: $N = H \cap N_1 \subset N_k$, per $k > 1$, risulta: $N \subset N_1 \cap N_k$ e, poichè d'altra parte si ha: $H \cap N_1 = G_k \cap N_1 \supseteq N_k \cap N_1$, i cinque sottogruppi $N_k$ si intersecano, a due a due, secondo il sottogruppo $N$. Osserviamo ora che, avendosi, per $k > 1$, $N_1 \cup G_k = G$, $N_1 \cap G_k = N$, i fattoriali $G/N_1$ e $G_k/N$ risultano tra loro isomorfi. Ne segue che i cinque gruppi $G_k/N$ sono tutti isomorfi al gruppo simmetrico di grado quattro e, poichè questo contiene uno ed uno solo sottogruppo normale di ordine quattro e tale ordine hanno i sottogruppi $N_k/N$, il sottogruppo $N_k$ è l'unico sottogruppo normale contenuto in $G_k$ e contenente $N$.

Dico ora che i cinque sottogruppi $N_k$ hanno, a due a due, per unione uno stesso sottogruppo normale e d'indice 6 in $G$, e che inoltre si ha: $N_k \cup N_h = K$, $K$ essendo il sottogruppo definito dalle (12) che pertanto non dipende da $G_1$.

Cominciamo col dimostrare che i sottogruppi $M$ e $K$ definiti dalle (12) non dipendono dal sottogruppo $G_1$, a partire dal quale sono stati costruiti. Invero, scelto $h > 1$, il sottogruppo $G/N_h$ è isomorfo al gruppo simmetrico di grado quattro, onde esistono due sottogruppi $M_h$ e $K_h$ definiti, rispetto a $G_h$, come $M$ e $K$ rispetto a $G_1$. Supponiamo che sia: $M_h \neq M$. Risulta: $M_h \supset N_h$, $M \supset N_1$; poichè si ha: $M \cup G_h = G$, $M \cap G_h$ è normale in $G_h$, vi ha indice 2 e contiene $N$. Ma il fattoriale $G_h/N$, isomorfo al gruppo simmetrico di grado quattro, contiene uno ed un sol sottogruppo d'indice 2, isomorfo al gruppo alterno e contenente il sottogruppo di ordine quattro $N_h/N$. Ne segue: $M \cap G_h \supset N_h$, cioè: $M \supset N_h$. Per essere inoltre $M \supset N_1$, risulta allora: $M \supset N_h \cup N_1$. In modo do analogo si prova essere: $M_h \supset N_h \cup N_1$. Ne segue: $M_h \cap M \supset N_h \cup N_1$. Ma ciò è ssurdo, avendosi: $[G : M_h \cap M] = 4$, $[G : N_h \cup N_1] = 6$. Ciò prova che non può essere $M \neq M_h$

e quindi il sottogruppo $M$ definito dalle (12) a partire da $G_1$ non dipende da $G_1$ e contiene i cinque sottogruppi $N_k$.

Il sottogruppo $M$ contiene poi il sottogruppo $K$ definito dalle (12) ed il sottogruppo $K_h$ definito, a partire da $G_h$, come $K$ a partire da $G_1$. Ora il gruppo fattoriale $M/N$ ha ordine $3 \cdot 2^4$ e contiene i due sottogruppi $K/N$ e $K_h/N$ come sottogruppi di ordine 12. Poichè $K$ e $K_h$ sono normali in $G$, deve essere, a norma del teorema di Sylow: $K/N \equiv K_h/N$. Ne segue: $K \equiv K_h$, cioè anche $K$ è indipendente da $G_1$. Poichè il fattoriale $M/N$ contiene i cinque sottogruppi normali $N_k/N$, risulta allora, qualunque siano $h$ e $k$: $(N_h/N) \bigcup (N_k/N) = = K/N$, cioè: $N_h \bigcup N_k = K$, e resta provato che i sottogruppi $N_k$ hanno, a due a due, per unione $K$.

Consideriamo ora il gruppo fattoriale $G/N$, di ordine $3 \cdot 2^5$. Considerando il solito omomorfismo che intercede tra $G$ e $G/N$, si riconosce che $G/N$ è somma di cinque sottogruppi di ordine 24, $G_k/N$, fra loro distinti ed aventi, a due a due, per intersezione uno stesso sottogruppo di ordine 6, $H/N$, non normale in $G/N$. I $G_k/N$ sono poi tutti isomorfi al gruppo totale di grado 4 e quindi il gruppo $H/N$ non è ciclico. Ognuno dei sottogruppi $G_k/N$ deve contenere pertanto uno ed un solo sottogruppo normale di ordine 4, $N_k/N$, ed i cinque sottogruppi $N_k/N$ devono intersecarsi, a due a due, secondo il sottogruppo identico, ed anche secondo il sottogruppo identico ognuno di essi deve intersecare $H/N$; l'unione dei cinque sottogruppi $N_k/N$ deve poi essere un sottogruppo $K/N$, di ordine $2^4$, normale in $G/N$ e che, essendo somma dei cinque sottogruppi $N_k/N$, deve essere abeliano di tipo (1, 1, 1, 1).

Osserviamo ora che, a norma del teorema di Sylow, $G/N$ deve contenere uno o tre sottogruppi di ordine $2^5$, e poichè $K/N$ è normale in $G/N$, esso deve essere contenuto in tutti i sottogruppi di Sylow di ordine $2^5$ e deve, naturalmente, esservi normale. Osserviamo ancora che i sottogruppi di Sylow di ordine $2^5$ di $G/N$ non possono essere abeliani. Invero $G/N$ contiene i sottogruppi $G_k/N$ isomorfi al gruppo totale di grado quattro; ognuno dei $G_k/N$ contiene quindi tre sottogruppi di Sylow di ordine $2^3$, isomorfi al gruppo diedrale e quindi non abeliani, e questi sono necessariamente contenuti nei sottogruppi di Sylow di ordine $2^5$ di $G/N$.

Il gruppo $G/N$ deve ovviamente ottenersi da un gruppo non abeliano $\Gamma_{32}$, di ordine $2^5$, che possegga un sottogruppo di ordine $2^4$, $\Gamma_{16}$, abeliano di tipo (1, 1, 1, 1), e contenga normalmente i cinque sottogruppi $\Gamma_4^{(k)}$, di ordine 4, di cui $\Gamma_{16}$ è somma.

Per mostrare dunque che il caso ($C_2$) non può presentarsi, basta far vedere che non esistono gruppi non abeliani di ordine $2^5$ che contengano un sottogruppo di ordine $2^4$, abeliano di tipo (1, 1, 1, 1), e contengano normalmente i cinque sottogruppi di ordine 4 di cui questo è somma. Invero, sia $\Gamma_{32}$ un gruppo di ordine $2^5$ che contenga un sottogruppo $\Gamma_{16}$, di ordine $2^4$, abeliano di tipo (1, 1, 1, 1), e che contenga normalmente i cinque sottogruppi $\Gamma_4^{(k)}$ di ordine 4 di cui $\Gamma_{16}$ è somma. Ognuno dei $\Gamma_4^{(k)}$ contiene allora almeno un sottogruppo $\Gamma_2^{(k)}$ di ordine 2, normale in $\Gamma_{32}$, ed è contenuto in almeno un sottogruppo $\Gamma_8^{(k)}$, di ordine $2^3$, normale in $\Gamma_{32}$ e contenuto in $\Gamma_{16}$. Inoltre, poichè i $\Gamma_4^{(k)}$ hanno, a due a due, per intersezione il sottogruppo identico e per unione $\Gamma_{16}$, $\Gamma_2^{(h)}$ non è contenuto in alcuno dei $\Gamma_4^{(k)}$, con $h \neq k$, nè $\Gamma_8^{(h)}$ contiene alcuno dei $\Gamma_4^{(k)}$, con $h \neq k$. A partire dai sottogruppi $\Gamma_2^{(k)}$, $\Gamma_4^{(k)}$ e $\Gamma_8^{(k)}$, con sole operazioni di intersezione e di unione possono allora costruirsi tutti i sottogruppi di ordine 2 di $\Gamma_{16}$ sicchè questi risultano tutti normali in $\Gamma_{32}$. Pertanto tutti i sottogruppi del secondo ordine di $\Gamma_{16}$ sono contenuti nel centro $C$ di $\Gamma_{32}$ e quindi è pure $\Gamma_{16} \subset C$. Ma allora, l'aggiunto $\Gamma_{32}/C$ non potendo esser ciclico, risulta necessariamente $\Gamma_{32} = C$ e quindi $\Gamma_{32}$ è abeliano.

Resta così escluso il caso ($C_2$).

**10.** — Lo studio effettuato ai n.ri precedenti ha portato a stabilire che un gruppo finito $G$ che sia somma di cinque sottogruppi aventi, a due a due, per intersezione un sottogruppo fisso contiene un sottogruppo normale $N$ tale che il gruppo fattoriale corrispondente $G/N$ riesca isomorfo ad uno dei gruppi seguenti: A) di ordine 8, abeliano di tipo (1, 1, 1) e diedrale; B) di ordine 12, isomorfo al gruppo alterno di grado quattro; C) di ordine $2^4$ abeliano di tipo (1, 1, 1, 1), oppure di ordine $3 \cdot 2^4$ avente i generatori (11). Resta così determinata una condizione necessaria perchè $G$ sia somma di cinque sottogruppi, aventi, a due a due, una stessa intersezione.

Tale condizione si dimostra subito essere sufficiente. Sia invero $G$ un gruppo finito che contenga un sottogruppo normale $N$ tale che il fattoriale $G/N$ sia isomorfo ad uno dei gruppi menzionati al comma precedente. Il gruppo $G/N$ è allora somma di cinque sottogruppi aventi a due a due in comune uno stesso sottogruppo $H/N$. Nell'omomorfismo $\omega$ intercedente tra $G$ e $G/N$, che fa corrispondere ad ogni elemento di $G$ il laterale di $N$ cui esso appartiene, ogni elemento di $G/N$ proviene da almeno un elemento di $G$, ed i cinque sottogruppi di cui $G/N$ è somma provengono da cinque sottogruppi (ognuno dei quali è il massimo sottogruppo di $G$ cui corrisponde, in $\omega$, uno dei cinque sottogruppi di cui $G/N$ è somma), necessariamente distinti, intersecantisi a due a due secondo uno stesso sottogruppo, e che esauriscono $G$.

Si può dunque concludere affermando che i gruppi finiti che sono somma di cinque sottogruppi aventi, a due a due, per intersezione un sottogruppo fisso, sono completamente caratterizzati dal seguente teorema:

VIII. — *Condizione necessaria e sufficiente perchè un gruppo finito $G$ possa pensarsi come somma di cinque sottogruppi aventi, a due a due, per intersezione un sottogruppo fisso, è che $G$ contenga un sottogruppo normale $N$ tale che il gruppo fattoriale $G/N$ sia isomorfo ad uno dei gruppi seguenti:*

A) *di ordine $2^3$, abeliano di tipo* (1, 1, 1), *o diedrale;*
B) *gruppo alterno di grado quattro;*
C′) *di ordine $2^4$, abeliano di tipo* (1, 1, 1, 1);
C″) *di ordine $3 \cdot 2^4$, avente i generatori* (11).

*Nell'omomorfismo $\omega$ intercedente tra $G$ e $G/N$, ai cinque sottogruppi di cui $G$ è somma, corrispondono cinque sottogruppi di cui è somma il gruppo fattoriale $G/N$.*

## BIBLIOGRAFIA

[1] D. GRECO, *I gruppi finiti che sono somma di quattro sottogruppi.* Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat. della Soc. Naz. di Sc. Lett. ed Arti in Napoli, Serie 4, vol. XVIII (1951).

[2] G. A. MILLER, *Groups in which all the operators are contained in a series of subgroups such that any two have only identity in common.* Bulletin of the Am. Math. Soc., vol. 12 (1906), pp. 446-449.

[3] G. SCORZA, *I gruppi finiti che possono pensarsi come somma di tre loro sottogruppi.* Bollettino U.M.I., vol. 5 (1926), pp. 216-218.

[4] M. SUZUKI, *On the finite groups with a complete partition.* Journal of the Math. Soc. of Japan, vol. 2, N. 1-2 (1950), pp. 165-185.

[5, a] G. ZAPPA, *Reticoli e geometrie finite* (litografia), ed. Liguori, Napoli (1952).

[5, b] G. ZAPPA, *Sulla relazione tra il rango ed il tipo di un gruppo.* Rend. Acc. It., Classe di Sc. Fis. Mat. e Nat., Serie VII, vol. II (1941), pp. 574-585.