G. COLOMBO

Sul moto di due corpi rigidi pesanti collegati in un punto, di cui uno ha un punto fisso

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 22 (1953), p. 305-312

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1953__22__305_0>

SUL MOTO DI DUE CORPI RIGIDI PESANTI COLLEGATI IN UN PUNTO, DI CUI UNO HA UN PUNTO FISSO

Nota (*) *di* G. COLOMBO (*a Padova*)

Si considerano due sistemi rigidi, asimmetrici, pesanti, dei quali S_1 ha un punto fisso O ed S_2 è girevole intorno ad un punto Q appartenente ad S_1 [1]). Si caratterizzano quei movimenti del sistema in relazione ai quali il moto assoluto di ciascuno dei due corpi è rotatorio uniforme.

Dopo aver dimostrato che, esclusi due casi eccezionali, il sistema si muove come un unico corpo rigido si mettono in evidenza alcune proprietà di questi moti, dedotte facendo uso di una estensione [2]), recentemente introdotta nelle questioni di stereodinamica, delle nozioni di ellisse centrale e della polarità ad essa subordinata. Infine si discute qualche caso particolare.

* * *

1. — Si consideri il sistema S costituito da due corpi rigidi pesanti S_1, S_2 asimmetrici, collegati in un punto Q e di

---

(*) Pervenuta in Redazione il 9 Giugno 1953.

1) Un tale sistema dinamico è stato studiato da C. Agostinelli alcuni anni fa. Vedi:

C. AGOSTINELLI, *Moto di due corpi rigidi collegati etc.*, Atti R. Acc. Scienze di Torino, vol. 75, Tomo I, Dispensa II, Genn.-Marzo 1940, p. 249-263.

C. AGOSTINELLI, *Moto di due corpi rigidi pesanti etc.*, Rend. Ist. Lomb., vol. LXXIII, 4° della serie III, Fasc. 2, p. 66-679.

2) Tale estensione è dovuta ad A. Signorini. Vedi per es.:

A. SIGNORINI, *Lezioni di Meccanica Razionale con elementi di statica grafica e disegno.* Perella, Roma, 1947, vol. I, p. 322 e segg.

cui S_1 abbia un punto fisso O. Volendo ricercare se sono possibili per S movimenti tali che il moto assoluto di ognuno dei due corpi sia rotatorio uniforme denotiamo con ω_1, ω_2 le velocità angolari di S_1 e rispettivamente di S_2 supponendole per ora diverse.

Premetto alcune Osservazioni:

OSSERVAZIONE I. — *Se ω_1 non è parallela ad OQ, deve essere $\omega_1 = \omega_2$.*

Basta pensare al moto di Q per riconoscere che i due assi di moto devono coincidere nella retta normale al piano che contiene la circonferenza descritta da Q e passante per il suo centro, ed inoltre che le velocità angolari devono risultare uguali.

OSSERVAZIONE II. — *Esclusi due casi eccezionali* [che specificheremo in seguito] *nell'ipotesi che ω_1 sia parallelo ad OQ, $\boldsymbol{\omega}_2$ ed OQ sono verticali ed è $\omega_1 = \omega_2$.*

Se ω_1 è parallelo ad OQ, S_2 si muove come un corpo rigido pesante, con un punto fisso in Q. Sarà quindi ω_2 verticale e l'asse a_2 del moto rotatorio di S_2 sarà una retta del cono di Staude relativa ad S_2 ed al punto Q.

La forza esplicata da S_2 su S_1 è $m_2(\boldsymbol{g} - \boldsymbol{a}_2)$ essendo $\boldsymbol{a}_2$ l'accelerazione del baricentro O_2 di S_2. Il momento risultante $\boldsymbol{M}^{(m)}_{O,1}$ delle forze d'inerzia di S_1 rispetto ad O è uguale ad un vettore ruotante uniformemente intorno ad a_1, asse del moto di S_1, con velocità ω_1 ed ortogonale ad a_1. Poichè il moto di S_1 è uniforme e le forze esterne attive si riducono nei riguardi di S_1 al peso proprio ed alle reazioni di S_2 su S_1 la costanza di ω_1 implica che: o l'asse OQ sia verticale oppure che G_1 (baricentro di S_1) appartenga ad OQ.

Distinguo due casi:

I. - *OQ è non verticale e quindi G_1 appartiene alla retta OQ.* - L'equilibrio delle forze attive e di quelle d'inerzia comporta che il momento $M^{(e)}_{O,1}$ delle forze esterne agenti su S_1, rispetto al polo O sia, esso pure, un vettore ortogonale ad OQ, ruotante intorno ad OQ con velocità ω_1 costante. Poichè $\boldsymbol{M}^{(e)}_{O,1}$ è il momento risultante rispetto ad O di $m_1 g$ applicato in G_1 e di $m_2(\boldsymbol{g} - \boldsymbol{a}_2)$ applicato in Q, ne segue che devono essere separatamente nulli, il momento dei pesi, quello della forza $m_2\boldsymbol{a}_2$ applicato in Q, ed infine $M_{O,1}^{(m)}$.

Ciò implica: a) il baricentro dei punti G_1, con masse m_1, e Q, con masse m_2, cade in O; b) G_2 appartiene all'asse di rotazione di S_2 e quindi o G_2Q è asse centrale ed allora ω_2 può essere qualunque, oppure deve essere $\omega_2 = 0$. In questo caso S_1 si muove come un corpo rigido intorno ad un punto fisso in assenza di forze e quindi: c) OQ è asse principale d'inerzia di S_1 rispetto ad O.

II. - *OQ è verticale.* - Ragionando analogamente si trova che deve essere $\omega_1 = \omega_2$, a meno che QG_2 non sia asse centrale d'inerzia, nel quale caso OQ deve essere asse permanente per S_1, potendo addirittura essere asse centrale.

In base alle due Osservazioni I e II si conclude che, se si escludono i casi eccezionali esposti più sopra, i moti dei due corpi possono essere rotatori solo se $\omega_1 = \omega_2$. *Il moto di S è cioè rigido.*

2. — Il sistema S si muova dunque di moto rigido rotatorio uniforme intorno alla retta a. Pertanto a è verticale ed appartiene al cono di Staude relativo ad S ed al punto O.

L'asse a è permanente per S e la velocità angolare ω è legata alla struttura del sistema della nota formula [3])

$$\omega_2 = \frac{|OC|}{g} \tag{1}$$

ove C è il centro d'inerzia di a relativamente ad S.

Distinguiamo anche qui due casi:

a) *ω non è parallelo ad OQ.* Il moto di S_2 è rotatorio intorno ad a. Il sistema $I_2^{(m)}$ delle forze d'inerzia di S_2 è equivalente al vettore $-m_2\boldsymbol{a}_2$ applicato in A_2 (antipolo di a relativamente ad S_2), e ad una coppia della quale per ora basta tener presente che il suo momento $\mu_2^{(m)}$ è parallelo ad $\boldsymbol{a}_2$.

Il sistema $I_2^{(m)}$ è equilibrato dal peso $m_2\boldsymbol{g}_2$ e dalla reazione

---

[3]) Cfr. testo citato in [2]) p. 328.

$\boldsymbol{\Phi}_{12}$ che S_1 esplica su S_2 in Q. Si ha ovviamente

$$\boldsymbol{\Phi}_{12} = m_2(\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{g}) . \tag{2}$$

Si consideri il sistema di riferimento solidale $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ con l'origine in Q, l'asse 2 orientato verso il basso, l'asse x incidente ad a e tale che il suo semiasse positivo non abbia punti in comune con a.

Siano x_{G_2}, y_{G_2}, z_{G_2}, ed x_{A_2}, y_{A_2}, z_{A_2} le coordinate di G_2 ed A_2 rispetto a questa terna.

La seconda equazione cardinale della dinamica porge

$$- QA_2 \wedge m_2\boldsymbol{a}_2 + QG_2 \wedge m_2\boldsymbol{g}_2 + \mu_2^{(m)} = 0, \tag{3}$$

donde si ha

$$QA_2 \wedge m\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{k} = 0$$

e quindi QA_2, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{k}$ sono complanari. Siccome $\boldsymbol{a}_2$ è parallelo al vettore $G_2G'_2$ (G'_2 proiezione di G_2 su a) possiamo intanto concludere che QA_2, $G_2G'_2$, $\boldsymbol{k}$ sono complanari. Essendo poi la retta G_2A_2 incidente ad a ne segue che il piano xz contiene A_2, G_2, $\boldsymbol{a}_2$ e risulta per la (3)

$$\mu_2^{(m)} = 0 . \tag{4}$$

Ciò implica che l'asse a è permanente per S_2 [4]).

Si considerino il punto A_2' proiezione ortogonale di A_2 sulla verticale per G_2, la retta r passante per A_2' e Q_1 ed il punto O' che r ha in comune con a.

Il sistema S_2 si muove dello stesso moto rotatorio di cui potrebbe muoversi se se ne fosse fissato il punto O'. Le sue velocità angolare ω dovrà quindi soddisfare alla relazione.

$$\omega_2 = \frac{g}{|C_2O'|} \tag{5}$$

essendo C_2 il centro d'inerzia di a relativamente ad S_2.

b) *ω sia parallelo ad OQ.* Il moto di S_2 è un moto intorno al punto fisso Q, a risulta permanente per S_2 come lo è per S.

---

[4]) Cfr. testo citato in [2]) p. 329.

Inoltre per l'uguaglianza delle velocità angolari dovrà risultare $| CO | = | C_2Q |$.

* * *

In base alle considerazioni svolte qui sopra si può dire che *i due corpi possono muoversi rigidamente di moto rotatorio uniforme intorno ad un asse passante per O, allora e solo allora che siano soddisfatte le seguenti condizioni*:

1) *Esista una retta a per O che sia asse permanente per S e per S_2;*
2) *I due punti G_2, Q sono complanari con a;*
3) *Vale l'uguaglianza $|CO| = |C_2O'|$ ovvero l'altra $|CO| = |C_2Q|$ a seconda che a non è, oppure è, parallelo ad OQ.*

OSSERVAZIONE III. — Con un ragionamento analogo a quello seguito sopra, si dimostra che *se ω non è parallelo ad OQ, e G_1 appartiene alla retta OQ, allora l'asse a è permanente anche per S_1.*

3. — Possono ora porsi varie questioni. La prima è la seguente. Prefissata la mutua posizione dei due corpi, prefissati O e Q esiste una retta a soddisfacente alle condizioni 1), 2), 3) del n. precedente?

È ovvio che in generale non si può dare risposta affermativa a tale quesito, almeno se la struttura di S non è del tutto particolare giacchè le 4 rette, che (in generale) hanno in comune i due coni di Staude relativi ad O di S e di S_2, non soddisferanno alle condizioni 2) e 3).

La seconda questione è la seguente. Prefissati O e Q si può orientare S_2 rispetto ad S_1 in maniera che esiste una almeno di tali rette a?

Questo secondo problema ammette (in generale) ovviamente soluzioni, anzi (sempre in generale) ne ammette ∞^1 giacchè i parametri a disposizione sono 3 (per esempio i 3 angoli di Eulero di una terna solidale con S_2 rispetto ad una terna solidale con S_1) e le condizioni cui deve soddisfare la retta a comune ai due coni di Stande sono solo due (le 2) e 3)).

Una discussione generale di tale problema è certamente malagevole e forse è conveniente la via diretta attraverso le equazioni dinamiche del problema.

Nel prossimo numero ci poniamo un problema un po' più particolare che permette una discussione abbastanza semplice.

4. — Vogliamo ora vedere se prefissati O e Q sia possibile orientare S_2 rispetto ad S_1 in maniera tale che disposta la retta OQ verticalmente, sia possibile un moto rotatorio uniforme di insieme intorno alla retta OQ.

Siano $\boldsymbol{c}_1$, $\boldsymbol{c}_2$, $\boldsymbol{c}_3$ i versori di una terna $\mathcal{T}$ solidale con S_1, con l'origine in O, $\boldsymbol{c}_3$ sia il versore di OQ ed il piano $O\boldsymbol{c}_2\boldsymbol{c}_3$ contenga O_1, se G_1 non appartiene ad OQ, o sia qualunque, se G_1 appartiene alla retta OQ.

Indicando com'è d'uso con A_1', B_1' due dei tre prodotti d'inerzia e con C_1 il momento d'inerzia rispetto all'asse OQ, il momento della quantità di moto di S_1 è dato da:

$$K_O^{(1)} = -(B_1'\boldsymbol{c}_1 + A_1'\boldsymbol{c}_2 - C_1\boldsymbol{c}_3)\omega\,, \tag{6}$$

e quindi si ha

$$\dot{K}_O^{(1)} = (A_1'\boldsymbol{c}_1 - B_1'\boldsymbol{c}_2)\omega^2\,. \tag{7}$$

Se si denota con y_{O_1} la seconda coordinata di G_1 rispetto a $\mathcal{T}$, dalla seconda equazione cardinale della dinamica, applicata ad S_1, si ha

$$|(A_1'\boldsymbol{c}_1 - B_1'\boldsymbol{c}_2)\omega^2 + m_1 g y_{G_1}\boldsymbol{c}_1| = |l m_2 \boldsymbol{a}_2| \tag{8}$$

dove abbiamo posto $l = |OQ|$.

Indicando con δ_2 la distanza di Q_2 dall'asse a di rotazione, si ha da (8)

$$(A_1'^2 + B_1'^2 - l^2 m_2^2 \delta_2^2)\omega^4 + 2m_1 g y_{G_1} A_1'\omega^2 + m_1 g^2 x_{G_1}^2 = 0. \tag{9}$$

Dalla (9) seguono intanto alcune condizioni necessarie affinchè il problema abbia soluzioni. Intanto occorre che sia

$$B_1'^2 \leq l^2 m_2 \delta_2^2, \tag{10}$$

e quindi a maggior ragione

$$B_1'^2 \leq l^2{}_2^2 |QO_2|^2\,, \tag{11}$$

ed inoltre che si verifichi una delle seguenti circostanze:

$$(12) \qquad \begin{cases} \text{I.} & y_{G_2} A_1' < 0 \\ \text{II.} & y_{G_2} A_1' > 0, \; A_1'^2 + B_1'^2 - l^2 m_2^2 \delta_2^2 > 0. \end{cases}$$

Ricordiamo ora che la verticale per Q deve essere asse permanente per S_2, onde se denotiamo con A_2, B_2, C_2 i momenti principali d'inerzia relativi a Q di S_2 ed assumiamo come terna di riferimento, $\mathcal{T}'$, la terna principale relativa a Q, l'equazione del cono di Stande che fornisce tutti gli assi, di coseni γ_1, γ_2, γ_3, passanti per Q che sono assi permanenti per S_2 è

$$(13) \qquad \begin{aligned} (B_2 - C_2) x_{G_2} \gamma_2 \gamma_3 + (C_2 - A_2) y_{G_2} \gamma_3 \gamma_1 + \\ + (A_2 - B_2) z_{G_2} \gamma_1 \gamma_2 = 0 \end{aligned}$$

ove con x_{G_2} etc. abbiamo denotato le coordinate di G_2 rispetto a $\mathcal{T}'$.

Inoltre è noto che ogni retta di coseni γ_1, γ_2, γ_3 rispetto a $\mathcal{T}'$, è asse di rotazione uniforme con velocità ω espressa da

$$(14) \quad \omega^2 = \frac{P(\gamma_2 z_{G_2} - \gamma_3 y_{G_2})}{(B_2 - C_2)\gamma_2\gamma_3} = \frac{P(\gamma_3 x_{G_2} - \gamma_1 z_{G_2})}{(C_2 - A_2)\gamma_3\gamma_1} = \frac{P(\gamma_1 y_{G_2} - \gamma_1 x_{G_2})}{(A_2 - B_2)\gamma_1\gamma_2}$$

mentre si ha pure

$$(15) \quad \delta_2^2 = \gamma_1^2(y_{G_2}^2 + z_{G_2}^2) + \gamma_2^2(x_{G_2}^2 + z_{G_2}^2) + \gamma_3^2(x_{G_2}^2 + y_{G_2}^2).$$

Il problema è ricondotto quindi a determinate i coseni direttori $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$ in maniera da soddisfare alle (13) ed alle (9), tenuto conto di (14) e (15).

Una discussione dettagliata sarebbe lunga e laboriosa. Ci limitiamo ad osservare che le rette di S_2 che godono di questa proprietà non possono superare il numero di 16, come intersezioni del cono quadrico (13) col cono dell'ottavo ordine quale risulta da (9), tenuto conto di (14) e (15), e della ovvia relazione $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$.

Una volta determinata una di tali rette e la relativa velocità angolare si può sempre orientare S_2 intorno ad essa, disposta verticalmente, in maniera da soddisfare non soltanto alla (8), ma all'equazione vettoriale da cui deriva, così che risultino quindi soddisfatte le equazioni dinamiche in relazione al moto rigido rotatorio.

La discussione precedente si semplifica notevolmente se G_1 appartiene alla retta OQ.

In questo caso le equazioni cui devono soddisfare γ_1, γ_2, γ_3 sono la (13) e la seguente

$$\begin{aligned}(16) \qquad & \gamma_1^2[A_1'^2 + B_1'^2 - m_2^2(y_{G_2}^2 + z_{G_2}^2)] + \\ & + \gamma_2^2[A_1'^2 + B_1'^2 - m_2^2(z_{G_2}^2 + x_{G_2}^2)] + \\ & + \gamma_3^2[A_1'^2 + B_1'^2 - m_2^2(x_{G_2}^2 + y_{G_2}^2)] = 0,\end{aligned}$$

oltre beninteso alla relazione $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$.

Ci si riduce così a trovare l'intersezione di due coni quadrici (13 e (16). Questi due coni quadrici hanno certamente qualche retta reale in comune, se il cono (16) è reale, cioè se i coefficienti di γ_1^2, γ_2^2, γ_3^2 non hanno tutti lo stesso segno. Se ciò succede avremo sempre almeno due rette di S_2 che possono essere assi permanenti tali da soddisfare alle condizioni imposte e ne potremo avere al più quattro. Disponendo S_2 in maniera che una di queste 4 rette risulti verticale, orientando S_2 intorno a tale retta in maniera opportuna rispetto ad S_1, ed imprimendo ad S una velocità data da (14), S si muove come un unico corpo rigido e di moto rotatorio uniforme.