Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Antonio de Castro

Sulle oscillazioni non-lineari dei sistemi in uno o più gradi di libertà

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 22 (1953), p. 294-304
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1953__22__294_0>

SULLE OSCILLAZIONI NON-LINEARI DEI SISTEMI IN UNO O PIÙ GRADI DI LIBERTÀ

Nota (*) *di* ANTONIO DE CASTRO (*a Firenze*)

1. - Nella teoria delle oscillazioni non-lineari è noto l'interesse che presenta lo studio dei sistemi a più gradi di libertà. In alcuni lavori recenti dedicati a questo tema [1]) si ha iniziato con successo questo studio.

In questo articolo noi cominciamo con lo studio dell'equazione

$$\ddot{x} + f(x,\ \dot{x},\ t) + g(x) = 0\,,$$

e dimostriamo, sotto certe condizioni, nella sezione I, l'esistenza di una soluzione periodica. Nella sezione II generalizziamo questo risultato ai sistemi differenziali della forma

$$\begin{gathered}\ddot{x}_1 + f_1(x_1,\ \dot{x}_1,\ x_2,\ \dot{x}_2,\ t) + g_1(x_1) = 0\\ \ddot{x}_2 + f_2(x_1,\ \dot{x}_1,\ x_2,\ \dot{x}_2,\ t) + g_2(x_2) = 0\,.\end{gathered}$$

Nella sezione III stabiliamo per il sistema

$$\begin{gathered}\ddot{x}_1 + f_1(x_1,\ \dot{x}_1,\ x_2,\ \dot{x}_2)\dot{x}_1 + g_1(x_1) = 0\\ \ddot{x}_1 + f_1(x_1,\ \dot{x}_1,\ x_2,\ \dot{x}_2)\dot{x}_2 + g_2(x_2) = 0\end{gathered}$$

un nuovo criterio di esistenza di soluzioni periodiche che non rientra nel precedente.

(*) Pervenuta in Redazione il 24 Aprile 1953.

[1]) Cfr.: G. COLOMBO, *Sulle oscillazioni non-lineari in due gradi di libertà.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, XIX (1950) 413-441; D. GRAFFI, *Forced oscillations for several nonlinear circuits.* Ann. of Math., 54 (1951), 262-271; G. COLOMBO, *Sopra un sistema non-lineare in due gradi di libertà.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, XXI (1952), 64-98.

§ 1. - L'equazione $\ddot{x} + f(x, \dot{x}, t) + g(x) = 0$.

2. - Consideriamo l'equazione differenziale

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}, t) + g(x) = 0 \tag{2.1}$$

equivalente al sistema del primo ordine

$$\dot{x} = v \qquad \dot{v} = -f(x, v, t) - g(x) \tag{2.2}$$

dove $f(x, v, t)$ e $g(x)$ sono funzioni continue dei loro argomenti, $f(x, v, t)$ è lipschtiziana in x, v, $g(x)$ in x, in ogni dominio limitato, e suponniamo che sia

i) $g(x) = -g(-x)$, $g(x) \neq 0$ per $x \neq 0$, $g(x)$ crescente e $\lim\limits_{x=\infty} g(x) = \infty$,

e che esistano due costanti positive a, E e due funzioni, $\varphi_1(x, v)$ e $\varphi_2(x, v)$, anche continue e lipschitiziane, tali che si abbia

ii) $f(x, v, t) > 0$ per $x > a$, $v \geq 0$ e per $x < -a$, $v \geq E$

$f(x, v, t) < 0$ per $x > a$, $v \leq -E$ e per $x < -a$, $v \leq 0$;

iii) sia

$$\int_{-a}^{a} \frac{\varphi_i(x, v)}{v} dx \geq \alpha > 0$$

per qualunque funzione continua $v(x)$ ($|v(x)| > E$), e

$$0 < \frac{\varphi_1(x, v)}{v} < A \qquad \text{per} \quad x > a \quad v > E$$

$$0 < \frac{\varphi_2(x, v)}{v} < A \qquad \text{per} \quad x < -a \quad v < -E;$$

iv) essendo e, c, b, N costanti positive definite per

$$g(e) = \frac{AE^2}{\alpha},$$

$$G(c) = \frac{1}{2} E^2 + G(e) \text{ (essendo } G(x) = \int_0^x g(\xi) d\xi),$$

$$b = \max.(a,\ c)\,,\quad N = 2\,\frac{G(b)}{\alpha}\,,$$

sia

$$f(x,\ v,\ t) > \varphi_1(x,\ v) \quad \text{per} \quad |x| < b \qquad v > N$$

$$f(x,\ v,\ t) < \varphi_2(x,\ v) \quad \text{per} \quad |x| < b \qquad v < -N\,;$$

v) $f(x,\ v,\ t)$ è periodica in t a periodo T, e $f(0,\ 0,\ t) \not\equiv 0$.

È interessante considerare l'equazione differenziale

$$\frac{dv}{dx} = -\,\frac{g(x) + f(x,\ v,\ t)}{v} \tag{2.3}$$

alla quale associamo queste altre

$$\frac{dv}{dx} = -\,\frac{g(x) + \varphi_1(x,\ v)}{v} \tag{2.4}$$

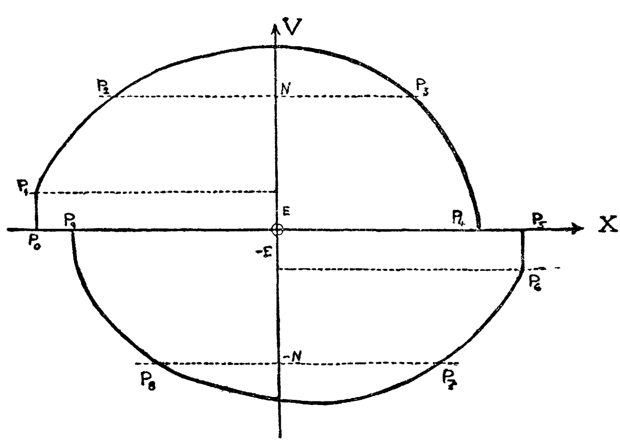
$$\frac{dv}{dx} = -\,\frac{g(x) + \varphi_2(x,\ v)}{v} \tag{2.5}$$

che sono rispettivamente l'equazioni caratteristiche dei sistemi

$$\dot{x} = v \qquad \dot{v} = -\,\varphi_1(x,\ v) - g(x) \tag{2.6}$$

$$\dot{x} = v \qquad \dot{v} = -\,\varphi_2(x, v) - g(x)\,. \tag{2.7}$$

3. - Ciò premesso consideriamo la curva C, $C \equiv P_0P_1P_2 ... P_9P_0$ (vedi figura); $P_i = P_i\,(x_i,\ v_i)$; $x_2 = b$, $v_i = 0$ per $i = 0,\ 4,\ 5$; $v_1 = E$, $v_6 = -E$, $v_2 = v_3 = N$; $v_7 = v_8 = -N$.



P_2P_1 è l'arco della curva $\lambda(x, v) = \frac{1}{2}v^2 + G(x) = c^{te}$ che passa per P_2, ed hanno anche l'equazione $\lambda(x, v) = c^{te}$ gli archi P_3P_4, P_6P_7, e P_8P_9.

P_0P_1 e P_5P_6 sono segmenti verticali, e $x_5 = |x_0|$.

P_4P_5 e P_9P_0 sono segmenti di OX.

P_2P_3 è l'arco della curva integrale dell'equazione

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{g(x) + \varphi_1(x, v)}{v}$$

che passa per P_2. Segue subito dalle condizioni iii) che l'arco P_2P_3 ha la forma indicata in figura. P_7P_8 è l'arco della curva integrale dell'equazione

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{g(x) + \varphi_2(x, v)}{v}$$

che passa per P_7.

Ciò posto dimostriamo che le curve integrali della (2.2) tagliano C penetrando nel suo dominio interno.

In P_0P_1 questo segue da essere $\dot{x} > 0$, e in P_5P_6 da essere $\dot{x} < 0$. Per la funzione $\lambda(x, v)$ sarà per $x = x(t)$ e ricordando (2.2)

$$\frac{d\lambda}{dt} = v\dot{v} + g(x)v = -f(x, v, t)v$$

e perciò in virtù delle condizioni ii) sarà $\frac{d\lambda}{dt} < 0$ negli archi P_1P_2, P_3P_4, P_6P_7 e P_8P_9, cioè in questi archi le curve integrali della (1.2) tagliano C nel modo indicato. Questo accade anche per gli archi P_2P_3 e P_7P_8, come segue subito confrontando (2.3) con (2.4) e (2.5) e ricordando iv). Lo stesso accade per gli archi P_4P_5 e P_8P_9 se è $x_5 > x_4$, $|x_0| > |x_9|$.

4. - Dimostriamo che è $x_5 \geq x_4$. Le seguenti relazioni sono conseguenze immediate della definizione di C,

$$x_0 = x_1$$

$$\frac{1}{2}E^2 + G(x_1) = \frac{1}{2}N^2 + G(x_2)$$

$$\frac{1}{2}N^2 + G(x_3) = G(x_4)\,,$$

e da queste segue che è

$$G(x_0) - G(x_4) = G(x_2) - G(x_3) - \frac{1}{2}E^2 \tag{4.1}$$

Dimostriamo che il secondo membro è positivo. Integriamo (2.4) fra P_2 e P_3; si ha

$$v_3 - v_2 = -\int_{x_2}^{x_3} \frac{g(x) + \varphi_1(x,\ v)}{v}\,dx$$

$$= -\int_{x_2}^{0} \frac{g(x)}{v}\,dx - \int_{0}^{x_3} \frac{g(x)}{v}\,dx - \int_{x_2}^{|x_2|} \frac{\varphi_1(x,\ v)}{v}\,dx - \int_{|x_2|}^{x_3} \frac{\varphi_1(x,\ v)}{v}\,dx$$

perciò

$$0 < \frac{G(x_2)}{N} - \alpha - \int_{|x_2|}^{x_3} \frac{\varphi(x,\ v)}{v}\,dx$$

cioè

$$0 < -\frac{1}{2}\alpha + (|x_2) - x_3)A$$

e

$$|x_2| - x_3 > \frac{\alpha}{2A}$$

ed essendo $|x_2| > \xi > x_3$ sarà

$$G(x_2) - G(x_3) = (|x_2| - x_3)g(\xi) > \frac{\alpha}{2A}\,g(x_3)$$

Se è $x_3 \geq e$ sarà

$$\frac{\alpha}{2A}\,g(x_3) \geq \frac{1}{2}E^2$$

e se è $x_3 \leq e$ sarà

$$G(x_2) - G(x_3) \geq G(x_2) - G(e) > \frac{1}{2}E^2$$

perciò in ambedue i casi segue che è

$$G(x_0) - G(x_4) \geq 0$$

cioè

$$x_5 \geq x_4 .$$

Nel semipiano $v < 0$ la dimostrazione è la stessa, e si ha

$$x_5 \geq | x_9 |$$

e perciò, essendo $| x_0 | = x_5$ segue

$$| x_0 | \geq | x_9 | .$$

5. - Ciò premesso dimostriamo l'esistenza di almeno una soluzione periodica. Consideriamo come punto iniziale $(t = 0)$ di una curva integrale il punto $A_0[x(0), y(0)]$ interno o su C. Tutti i punti della curva restano interni a C per $t > 0$, e in particolare questo accade al punto $A_T[x(T), y(T)]$. Se consideriamo la trasformazione topologica dal dominio limitato per C in se stesso, definita per $\mathcal{T} A_0 = A_T$, trasformazione che lascia inalterata (2.1), questa trasformazione ha almeno un punto unito che corrisponde a una soluzione periodica.

§ 2. - Sistemi dipendenti dal tempo.

6. - Consideriamo adesso il sistema di equazioni differenziali

$$\ddot{x}_1 + f_1(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, t) + g_1(x_1) = 0 \tag{6.1}$$

$$\ddot{x}_2 + f_2(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, t) + g_2(x_2) = 0 \tag{6.2}$$

equivalenti al sistema del primo ordine

$$\dot{x}_1 = v_1 \qquad \dot{v}_1 = - f_1(x_1, v_1, x_2, v_2, t) - g_1(x_1) \tag{6.3}$$

$$\dot{x}_2 = v_2 \qquad \dot{v}_2 = - f_2(x_1, v_1, x_2, v_2, t) - g_2(x_2) \tag{6.4}$$

dove le funzioni $f_i(x_1, v_1, x_2, v_2, t)$ e $g_i(x_i)$ sono continue dei loro argomenti, f_i lipschitiziane in x_1, x_2, v_1, v_2; $g_i(x_i)$ in x_i, in ogni dominio limitato, e verificando le condizioni seguenti (per $i = 1, 2$):

i) $g_i(x_i)$ sono funzioni dispari, $g_i(x_i) \neq 0$ per $x_i \neq 0$, crescenti e $\lim_{x_i = \infty} g_i(x_i) = \infty$.

ii) essendo $\varphi_i^{j)}(x_i, v_i)$ $(i, j = 1, 2)$ funzioni continue e lipschitziane e a, E, due costanti positive tali che si abbia

$$\int_{-a}^{a} \frac{\varphi_i^{j)}(x_i, v_i)}{v_i} dx_i \geq \alpha > 0$$

per qualunque funzione continua $v(x)$ $(|v(x)| > E)$ è

$$0 < \frac{\varphi_i^{j)}(x_i, v_i)}{v_i} < A \quad \text{per} \quad x_i > a \quad v_i > E$$

$$0 < \frac{\varphi_i^{j)}(x_i, v_i)}{v_i} < A \quad \text{per} \quad x_i < -a \quad v_i < -E$$

ed essendo e_i, c_i, b_i, B_i, b, B, N, costanti positive definite per

$$g_i(e_i) = \frac{1}{\alpha} A E^2,$$

$$G_i(c_i) = \frac{1}{2} E^2 + G(e_i), \qquad \text{essendo} \qquad G(x) = \int_0^x g(\xi) d\xi$$

$$b = \max(a, c_i)$$

$$N = \frac{2}{\alpha} G(b),$$

$$G_i(B_i) = G_i(b) + \frac{1}{2}(N^2 - E^2), \qquad B = \max(B_1, B_2).$$ [2])

è

$$f_i(x_1, v_1, x_2, v_2, t) > \varphi_i^{1)}(x_i, v_i) \quad \text{per} \quad v_i \geq N \;\; |x_i| \leq b, \; |x_j| \leq B (i \neq j)$$

$$f_i(x_1, v_1, x_2, v_2, t) < \varphi_i^{2)}(x_i, v_i) \quad \text{per} \quad v_i \leq -N \;\; |x_i| \leq b \, |x_j| \leq B (i \neq j$$

iii) $f_i(x_1, v_1, x_2, v_2, t) > 0$ per $x_i \geq a$, $|x_j| \leq B$, $v_i \geq 0$ e per $x_i < -a \, |x_j| \leq B$, $v_i \geq E$,

$f_i(x_1, v_1, x_2, v_2, t) < 0$ per $x_i \geq a$, $|x_j| \leq B$, $v_i \leq -E$ e per $x_i \leq -a$, $|x_j| \leq B$, $v_i \leq 0$.

iv) le funzioni f_i sono periodiche rispetto a t, a periodo T, e $f_i(0, 0, 0, 0, t) \not\equiv 0$.

---

[2]) È chiaro che la costante B si definisce con lo scopo di avere un limite massimo per $|x|$.

7. - Nello stesso modo che abbiamo usato nella sezione precedente per l'equazione differenziale (2.1), si può definire nei piani $x_i v_i$ $(i = 1, 2)$ due curve C_i in modo che le curve integrali delle (6.1), 6.2) le taglino penetrando nel suo dominio interno.

Restano così definiti due domini R_i limitati per C_i (topologicamente equivalenti ciascuno a un circolo) dei quali non escono integrali del sistema (6.1), (6.2).

8. - Per dimostrare adesso l'esistenza di almeno una soluzione periodica consideriamo lo spazio S_4 dove x_1, v_1, x_2, v_2 sono coordinate di punto, e in S_4 la regione chiusa R^* luogo dei punti M, $M = (x_1, v_1, x_2, v_2)$ tale che il punto $M_1 = (x_1, v_1)$ appartenga a R_1 ed il punto $M_2 = (x_2, v_2)$ appartenga a R_2. Segue di quello che abbiamo detto prima che una traiettoria che penetra in R^* non esce mai di questa regione.

Definita adesso una trasformazione topologica di R in se stessa facendo corrispondere a ogni punto $[x_1(0), v_1(0), x_2(0), v_2(0)]$ il punto $[x_1(T), v_1(T), x_2(T), v_2(T)]$, questa ha almeno un punto unito, che corrisponde a una soluzione periodica.

§ 3. - Sistemi indipendenti dal tempo.

9. - Consideriamo il sistema di equazioni differenziali

$$\ddot{x}_1 + f_1(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2)\dot{x}_1 + g_1(x_1) = 0 \tag{9.1}$$

$$\ddot{x}_2 + f_2(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2)\dot{x}_2 + g_2(x_2) = 0 \tag{9.2}$$

equivalente al sistema del primo ordine

$$\dot{x}_1 = v_1 \qquad \dot{v}_1 = -f_1(x_1, v_1, x_2, v_2)v_1 - g_1(x_1) \tag{9.3}$$

$$\dot{x}_2 = v_2 \qquad \dot{v}_2 = -f_2(x_1, v_1, x_2, v_2)v_2 - g_2(x_2) \tag{9.4}$$

dove le funzioni $f_i(x_1, v_1, x_2, v_2)$ e $g_i(x_i)$ $(i = 1, 2)$ sono funzioni continue e lipschitziane dei loro argomenti in ogni dominio limitato e verificano le condizioni (per $i = 1, 2$),

i) $g_i(x_i)$ sono funzioni dispari crescenti, $x_i g(x_i) > 0$ per $x_i \neq 0$ e $\lim\limits_{x_i = \infty} g_i(x_i) = \infty$

ii) $f_1(0, 0, x_2,, v_2) < 0$, $f_2(x_1, v_1, 0, 0) < 0$

iii) esistono due funzioni $\varphi_i(x_i, v_i) [\varphi_i(x_i, v_i) = \varphi_i(-x_i - v_i)]$ anche continue e lipschitziane dei loro argomenti, e tali che essendo per $i = 1, 2$

$$f_i(x_1, v_1, x_2, v_2) > \varphi_i(x_1, v_1)$$

esistano quattro costanti positive a_i, b_i, $b_i \geq a_i$, tali che sia

$$\varphi_i(x_i, v_i) \geq 0 \quad \text{per} \quad |x_i| \geq a_i$$

$$\int_{-a_i}^{b_i} \varphi_i(x_i, v_i)\, dx_i \geq \alpha > 0$$

per qualunque funzione continua $v_i(x)$.

10. - Se consideriamo la funzione $\lambda(x, v)$

$$\lambda(x, v) = \frac{1}{2} v^2 + \int_0^x g(\xi) d\xi$$

sarà per $x = x_i(t)$ e ricordando (9.3), (9.4)

$$\frac{d\lambda}{dt} = v_i \dot{v}_i + g_i(x_i) v_i = - v_i^2 f_i(x_1, v_1, x_2, v_2)$$

e per tanto $\lambda(x, v)$ è crescente in un dintorno abbastanza piccolo di $x_i = 0$, $v_i = 0$.

Le curve $\lambda(x, v) = c^{te}$ sono curve chiuse simmetriche rispetto ad O, « concentriche ». Segue che in un dintorno abbastanza piccolo di $(0, 0)$, le curve integrali delle (9.3), (9.4) tagliano queste curve $\lambda(x, v) = c^{te}$ verso il dominio esterno.

Interessa considerare anche le due equazioni

$$\dot{x}_i = v_i \qquad \dot{v}_i = - \varphi(x_i, v_i) v_i - g_i(x_i) \ (i = 1, 2) \tag{10.1}$$

In un lavoro precedente (*) abbiamo dimostrato sotto condizioni più generali delle poste in 9, che esiste per ciascuna delle (10.1) una curva chiusa nel piano $x - v$ in modo che le

---

3) A. DE CASTRO, *Sol. per. di una eq. diff. del secondo ordine.* Boll. della U.M.I. (3), 8 (1953) 26-29.

altre curve integrali la tagliano penetrando nel suo dominio interno. Nello stesso modo possiamo qui costruire due curve chiuse C_i simmetriche rispetto ad O (formata ciascuna da due archi di curva integrale e due segmenti paralleli ad OV) con la stessa proprietà. E basta confrontare l'equazione caratteristica di (10.1)

$$\frac{dv_i}{dx_i} = -\varphi_i(x_i, v_i) - \frac{g_i(x_i)}{v_i} \qquad (i = 1, 2) \qquad (10.2)$$

con quest'altra che segue da (9.3), (9.4)

$$\frac{dv_i}{dx_i} = -f_i(x_1, v_1, x_2, v_2) - \frac{g_i(x_i)}{v_i} \qquad (i = 1, 2)$$

e ricordare iii) per trovare che anche le curve integrali del sistema (9.1), (9.4) tagliano C_i penetrando nel suo dominio interno.

Siano R_i i domini (ciascuno topologicamente equivalente a una corona circolare) limitati da C_i e da una curva $\lambda(x, v) = c$, con c abbastanza piccolo; una curva che penetra R_i non esce mai da questo dominio.

11. - Consideriamo adesso lo spazio S_4 ove x_1, v_1, x_2, v_2 sono coordinate di punto, e applichiamo un noto ragionamento di G. Colombo. Una soluzione generica del sistema (9.1), (9.2) rappresenta una traiettoria in tale spazio. L'unico punto singolare per il sistema è l'origine O. Consideriamo la regione finita chiusa R^* di questo S_4 definita come il luogo dei punti M, $M = (x_1, v_1, x_2, v_2)$ tali che il punto M_1, $M_1 = (x_1, v_1)$ appartenga a R_1 ed il punto M_2, $M_2 = (x_2, v_2)$ appartenga a R_2. Una traiettoria che abbia un punto $M = (M_1, M_2)$ completamente a questo dominio.

Premesso ciò consideriamo l'intersezione di R^* con il semiiperpiano π definito dalle $v_1 = 0$, $v_2 \geq 0$. Se denotiamo con x_{1n}, x_{1N}, gli estremi del segmento di intersezione di R_1 con il semiasse OX_1, l'intersezione di π con R^* è una tricella C_3 definita per

$$x_{1n} \leq x \leq x_{1N}, \qquad v_1 = 0, \qquad M_2 = (x_2, v_2) \qquad M_2 \varepsilon R_2$$

e consideriamo anche la tricella C_3' simmetrica di C_3 rispetto ad O.

Consideriamo la trasformazione topologica di C_3 in sè stessa che fa corrispondere ad ogni punto M il simmetrico di M' (intersezione della traiettoria per M con C_3') rispetto ad O. In detta transformazione esiste almeno un punto unito M^* che corrisponde a un ciclo in virtù della simmetria del sistema.