RENDICONTI
*del*
SEMINARIO MATEMATICO
*della*
UNIVERSITÀ DI PADOVA

BRUNO PINI

# Sui sistemi di equazioni lineari a derivate parziali del secondo ordine dei tipi ellittico e parabolico

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, tome 22 (1953), p. 265-280

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1953__22__265_0>

# SUI SISTEMI DI EQUAZIONI LINEARI A DERIVATE PARZIALI DEL SECONDO ORDINE DEI TIPI ELLITTICO E PARABOLICO

*Nota* (*) *di* Bruno Pini (*a Bologna*)

Passando da una singola equazione a un sistema di equazioni lineari, per esempio del secondo ordine in due variabili

$$\mathfrak{L}[\boldsymbol{u}] = A(x, y)\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial x^2} + 2B(x, y)\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial x \partial y} + C(x, y)\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial y^2} + L(x, y)\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} + \\ + M(x, y)\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y} + N(x, y)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$$

ove $A, B, C, L, M, N$ sono assegnate matrici quadrate d'ordine $n$, $\boldsymbol{f}$ un assegnato vettore ad $n$ componenti ed $\boldsymbol{u}$ un vettore incognito ad $n$ componenti, la condizione che si presenta spontaneamente come estensione della condizione di ellitticità per una sola equazione è che

$$\text{det.} \, \| \, \alpha^2 A + 2\alpha B + C \, \| = 0$$

abbia tutte le radici complesse. Non è noto se tale condizione basti ad assicurare alle soluzioni del sistema un comportamento simile a quello che si ha nel caso di una sola equazione per quanto riguarda un teorema di alternativa per il primo problema di valori al contorno

$$\mathfrak{L}[\boldsymbol{u}] = \boldsymbol{f} \quad \text{in} \quad D - \mathfrak{F}D \quad , \quad \boldsymbol{u} = \overline{\boldsymbol{u}} \quad \text{su} \quad \mathfrak{F}D \, ,$$

(ove $D$ è un fissato dominio (limitato) del piano $x$, $y$, e $\overline{\boldsymbol{u}}$ un assegnato vettore su $\mathfrak{F}D$) e, per quanto riguarda un cor-

(*) Pervenuta in Redazione il 9 Giugno 1953.

rispondente problema di autovalori, circa la discretezza dello spettro. È da ricordare che A. V. BIZADZE [1]) ha costruito un sistema di due equazioni a coefficienti costanti del tipo $A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, soddisfacente l'anzidetta condizione di ellitticità, il quale ammette una soluzione, non nulla, annullantesi sulla frontiera di un opportuno dominio (limitato) del piano $x$, $y$.

Recentemente M. I. VISCIK [2]) ha studiato sistemi lineari di equazioni d'ordine $2m$

$$\mathfrak{L}[u]=(-1)^m \sum_{(k)} A^{(k_1, k_2, \dots, k_{2m})}(x) \frac{\partial^{2m} u(x)}{\partial x_{k_1} \partial x_{k_2} \dots \partial x_{k_{2m}}} + Tu = f(x)$$

ove $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $A^{(k_1, k_2, \dots, k_{2m})}(x)$ è la matrice $\|a_{i,j}{}^{(k_1, k_2, \dots, k_{2m})}(x)\|$, $i$, $j=1$, 2, ..., $N$, $u(x)$ è il vettore di componenti $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_N(x)$, $f(x)$ il vettore di componenti $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_N(x)$ e $Tu$ indica un operatore differenziale lineare arbitrario d'ordine $< 2m$.

Egli suppone soddisfatta una condizione, che chiama di ellitticità forte, consistente nel supporre che la matrice

$$\sum_{(k)} (A^{(k_1, k_2, \dots, k_{2m})} + \bar{A}^{(k_1, k_2, \dots, k_{2m})}) \xi_{k_1} \xi_{k_2} \dots \xi_{k_{2m}},$$

ove il soprassegno indica trasposizione, sia definita positiva qualunque siano i numeri reali $\xi_1$, $\xi_2$, ..., $\xi_n$, non tutti nulli. Per un siffatto sistema, e per il suo aggiunto, VISCIK riesce a provare un teorema di alternativa per il problema consistente nell'annullare su $\mathfrak{F}D$, in un certo senso generalizzato, la soluzione e le sue prime $m-1$ derivate. Studia poi il corrispondente problema di autovalori provando, tra l'altro, la discretezza dello spettro per l'operatore $\mathfrak{L}$.

Nella presente Nota, riservandoci di ritornare sull'argomento da un punto di vista più generale, prendiamo in consi-

---

[1]) A. V. BICADZE, *Sull'unicità della soluzione del problema di Dirichlet per le equazioni ellittiche a derivate parziali,* Uspechi matematiceskich nauk, t. III, n. 6, (28) (1948) 211-212 (in russo).

[2]) M. I. VISCIK, *Sui sistemi fortemente ellittici di equazioni differenziali,* Mat. Sbornik N. S. (29) 71 (1951) 615-676 (in russo).

derazione il sistema autoaggiunto

$$(1) \quad \mathfrak{L}[\boldsymbol{u}] = \frac{\partial}{\partial x}\left(A\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} + B\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(B\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} + C\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y}\right) - N\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f},$$

ove $A, B, C, N,$ sono matrici simmetriche d'ordine $n$, continue su un dominio $D$, con $A, B, C$ dotate delle derivate prime continue, ed $\boldsymbol{f}$ un vettore continuo ad $n$ componenti, nell'ipotesi che le matrici $\left\|\begin{matrix} A & B \\ B & C\end{matrix}\right\|$ ed $N$ siano definite positive. È allora evidentemente soddisfatta la condizione di ellitticità forte di VISCIK perchè

$$(\alpha^2 A + 2\alpha\beta B + \beta^2 C)\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{c} = \left\|\begin{matrix} A & B \\ B & C\end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} \alpha \boldsymbol{c} \\ \beta \boldsymbol{c}\end{matrix}\right\| \times \left\|\begin{matrix} \alpha \boldsymbol{c} \\ \beta \boldsymbol{c}\end{matrix}\right\| .$$

Per tale sistema consideriamo il primo problema di valori al contorno nel senso generalizzato di G. CIMMINO [3]). Cioè, se $\mathfrak{C}(t)$ per $t \to 0$ è un sistema di curve approssimanti la $\mathfrak{F}D$, per esempio parallele alla $\mathfrak{F}D$, la condizione al contorno consiste nell'essere

$$\lim_{t \to 0} \int_{\mathfrak{C}(t)} |\boldsymbol{u} - \overline{\boldsymbol{u}}|^2 ds = 0$$

per un assegnato vettore $\overline{\boldsymbol{u}}$ con la norma di quadrato sommabile su $\mathfrak{F}D$.

Solo per semplicità ci limitiamo a considerare sistemi in due variabili; la trattazione si estende subito a sistemi in un numero qualsiasi di variabili.

Noi però, una volta conseguito un teorema di unicità, non svilupperemo tutti i calcoli necessari per provare l'esistenza della soluzione, limitandoci a provare quanto basta ad assicurare la possibilità di ripetere ragionamenti già fatti in altre

---

[3]) G. CIMMINO, *Nuovo tipo di condizioni al contorno e nuovo metodo di trattazione per il problema generalizzato di Dirichlet*, Rend. Circolo Mat. di Palermo, 61 (1937) 177-220; *Sul problema generalizzato di Dirichlet per l'equazione di Poisson*, Rend. Sem. Mat. Padova (7) 1 (1940) 28-96.

occasioni [4]). Insieme al sistema (1) considereremo anche un analogo sistema di tipo parabolico

$$(2)\quad \mathfrak{L}[\boldsymbol{u}]=\frac{\partial}{\partial x}\left(A\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x}+B\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(B\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x}+C\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y}\right)-\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial z}-N\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}$$

e mostreremo come anche per questo possa trattarsi il primo problema di valori al contorno nel senso generalizzato anzidetto.

## Sistemi di tipo ellittico.

Sia $D$ un dominio la cui frontiera sia una unica (per semplicità) curva semplice chiusa $\mathfrak{C}$ di classe 2, di cui $x=\bar{x}(s)$, $y=\bar{y}(s)$, $0\leq s\leq L$, siano le equazioni parametriche in funzione dell'arco. Indichiamo con $\mathfrak{C}(t)$ la curva $x=\bar{x}(s)+\lambda t$, $y=\bar{y}(s)+\mu t$, $0\leq s\leq L$, essendo $\lambda$ e $\mu$ i coseni direttori della normale interna e $t$ un numero positivo variabile in un intorno dello zero.

Sussiste il seguente teorema di unicità:

*Se $\bar{\boldsymbol{u}}(s)$ è un vettore con la norma di quadrato sommabile sull'intervallo $0\leq s\leq L$, esiste al più un vettore $\boldsymbol{u}(x, y)$ che in $D-\mathfrak{F}D$ è soluzione regolare (ha derivate prime e seconde continue) di $\mathfrak{L}[\boldsymbol{u}]=\boldsymbol{f}$ e soddisfa la condizione al contorno*

$$(3)\qquad \lim_{t\to 0}\int_{\mathfrak{C}(t)}|\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}}|^2 d\sigma=0.$$

Sia $\boldsymbol{u}$ la differenza di due eventuali soluzioni regolari distinte di $\mathfrak{L}[\boldsymbol{u}]=\boldsymbol{f}$, soddisfacenti la detta condizione al contorno. Con semplici integrazioni per parti si prova, integrando $\mathfrak{L}[\boldsymbol{u}]\times\boldsymbol{u}$ sul dominio limitato $D(t)$ avente per frontiera la $\mathfrak{C}(t)$, che

$$(4)\qquad \int_{\mathfrak{C}(t)}\left[\left(A\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x}+B\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y}\right)\times\boldsymbol{u}dy-\left(B\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x}+C\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y}\right)\times\boldsymbol{u}dx\right]=$$
$$=\int_{D(t)}\left(A\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x}\times\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x}+2B\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x}\times\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y}+C\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y}\times\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y}+N\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{u}\right)dxdy$$

[4]) Cfr. per esempio B. PINI, *Sul primo problema di valori al contorno della teoria dell'elasticità*, Rend. Sem. Mat. Padova, 21 (1952) 345-369.

da cui, integrando sull'intervallo $t$, $T$, supposto $0 < t < T$,

$$\int_t^T d\tau \int_{\mathcal{C}(\tau)} \left[\lambda\left(A\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} + B\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y}\right) + \mu\left(B\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} + C\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y}\right)\right] \times \boldsymbol{u} d\sigma = -$$

$$- \int_t^T d\tau \int_{D(\tau)} \left(A\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} + 2B\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y} + C\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y} \times \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y} + N\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u}\right) dxdy$$

tenendo presente che

$$\frac{d(\bar{y} + \mu t)}{d\sigma} = \frac{d\bar{y}}{ds} = -\lambda \ , \quad \frac{d(\bar{x} + \lambda t)}{d\sigma} = \frac{d\bar{x}}{ds} = \mu \, .$$

L'integrale a sinistra si può scrivere

$$\int_{D(t)-D(T)} \left[\lambda\left(A\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} + B\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y}\right) + \mu\left(B\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} + C\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y}\right)\right] \times \boldsymbol{u} dxdy$$

poichè $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} = \dfrac{\partial \sigma}{\partial s}$. Eseguendo delle integrazioni per parti si riconosce che questo è eguale a

$$\frac{1}{2} \int_{\mathcal{F}[D(t)-D(T)]} [(\lambda A + \mu B)\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u} dy - (\lambda B + \mu C)\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u} dx] -$$

$$- \frac{1}{2} \int_{D(t)-D(T)} \left[\frac{\partial}{\partial x}(\lambda A + \mu B) + \frac{\partial}{\partial y}(\lambda B + \mu C)\right] \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u} dxdy.$$

Infine, passando al limite per $t \to 0$, tenendo presente che

$$\lim_{t \to 0} \int_{\mathcal{C}(t)} |\boldsymbol{u}|^2 d\sigma = 0 \, , \tag{5}$$

si ha

$$\int_{\mathcal{C}(T)} (\lambda^2 A + 2\lambda\mu B + \mu^2 C)\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u} d\sigma = \int_{D-D(T)} \left[\frac{\partial}{\partial x}(\lambda A + \mu B) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial y}(\lambda B + \mu C)\right] \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u} dxdy - 2\int_0^T dt \int_{D(t)} \left(A\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} + \right.$$

$$\left. + 2B\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y} + C\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y} \times \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y} + N\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u}\right) dxdy \, .$$

Ora, poichè $(\lambda^2 A + 2\lambda\mu B + \mu^2 C)\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u} = \begin{Vmatrix} A\, B \\ B\, C \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \lambda \boldsymbol{u} \\ \mu \boldsymbol{u} \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} \lambda \boldsymbol{u} \\ \mu \boldsymbol{u} \end{Vmatrix}$, essendo per ipotesi la matrice $\begin{Vmatrix} A\, B \\ B\, C \end{Vmatrix}$ definita positiva, il primo membro è una quantità positiva per dei $T$ comunque prossimi a zero; infatti in caso contrario la $\boldsymbol{u}$ dovrebbe annullarsi in una corona attorno a $\mathfrak{C}$ e quindi, riuscendo biregolare in tutto $D$, sarebbe identicamente nulla per la (4).

Il primo integrale a secondo membro si può scrivere

$$\int_0^T dt \int_{\mathfrak{C}(t)} \left[\frac{\partial}{\partial x}(\lambda A + \mu B) + \frac{\partial}{\partial y}(\lambda B + \mu C)\right] \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u}\, d\sigma$$

e quindi, essendo $\mathfrak{C}$ di classe 2 ed essendo le matrici $A$, $B$, $C$ dotate delle derivate parziali prime continue, causa la (5), si riconosce che per $T \to 0$ esso è un infinitesimo di ordine maggiore di uno (rispetto a $T$). Il secondo integrale sulla destra è invece al più infinitesimo come $T$, poichè $A \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} + 2B \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y} + C \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y} \times \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y}$ è una quantità positiva non necessariamente sommabile su $D$, ed $N\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u}$ è non negativa. Dunque per $T$ abbastanza piccolo il secondo membro è negativo. Di qui l'assurdo.

Notiamo espressamente che se $\boldsymbol{u}$ è una soluzione di $\mathfrak{L}[\boldsymbol{u}] = 0$ soddisfacente la (3), il ragionamento ora fatto porta a stabilire la seguente maggiorazione

$$(6) \qquad \int_{\mathfrak{C}(t)} (\lambda^2 A + 2\lambda\mu B + \mu^2 C)\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u}\, d\sigma < \int_{\mathfrak{C}} (\lambda^2 A + 2\lambda\mu B + \mu^2 C)\bar{\boldsymbol{u}} \times \bar{\boldsymbol{u}}\, ds$$

della media, sulle curve approssimanti, di una certa forma quadratica nelle componenti di $\boldsymbol{u}$ mediante la media di una analoga forma quadratica nelle componenti del vettore $\bar{\boldsymbol{u}}$ assegnato su $\mathfrak{C}$, se $\left|\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y}\right|^2$ non è sommabile su $D$.

Il teorema di unicità ora provato, insieme a una opportuna formola di media [5]), permette di stabilire l'esistenza

---

[5]) Cfr. B. PINI, *Sulle equazioni lineari a derivate parziali d'ordine 2n di tipo ellittico* ecc..., Rend. di Mat. e delle sue appl. V (XI) (1952) 176-195.

della soluzione per il teorema in oggetto. La prova si conduce su uno schema noto [6]), sul quale qui non ci soffermiamo.

Lo stesso tipo di ragionamento permetterebbe anche di acquisire un teorema di esistenza per il primo problema di valori al contorno, ordinario

$$\mathfrak{L}[\boldsymbol{u}] = \boldsymbol{f} \quad \text{in } D - \mathfrak{F}D \quad , \quad \boldsymbol{u} = \overline{\boldsymbol{u}} \quad \text{su} \quad \mathfrak{F}D \, ,$$

(nel senso che $\lim \boldsymbol{u}(x, y) = \overline{\boldsymbol{u}}(s)$ al tendere di $(x, y)$ a un punto qualsiasi della $\mathfrak{F}D$) qualora si possedesse una formola di maggiorazione puntuale, anzichè globale come la (6), della soluzione in funzione dei dati [7]).

Di ciò ci occuperemo in un'altra Nota. Vogliamo però fare fin d'ora un'osservazione.

È notissimo che se in un campo $A$ l'equazione

$$\mathfrak{L}[\boldsymbol{u}] = a(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + l(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + \\ + m(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + n(x, y)u = 0$$

è ellittico-parabolica ($a\alpha^2 + 2b\alpha\beta + c\beta^2$ semidefinita positiva), se in $A$ è $n < 0$, una soluzione non può avere in $A$ nè un minimo negativo nè un massimo positivo.

Passando da una equazione singola a un sistema, non sembra possibile ripetere i ragionamenti elementari coi quali si consegue il risultato riportato. Sembra invece possibile conseguire dei risultati in tal senso basandosi su una opportuna formola di media [8]).

---

6) Cfr. i lavori citati in 3).

7) Cfr. B. PINI, *Sul problema di Dirichlet per le equazioni a derivate parziali del secondo ordine di tipo ellittico*, Rend. Acc. Naz. Lincei (8) II (1951) 325-333.

8) Indicando con $\mathfrak{M}$ l'operatore differenziale aggiunto di $\mathfrak{L}$ (in convenienti ipotesi di regolarità dei coefficienti e supponendo $a > 0$, $ac - b^2 > 0$), G. CIMMINO in *Nuove proprietà caratteristiche per le soluzioni delle equazioni lineari alle derivate parziali di tipo ellittico del secondo ordine*, (Atti del 2° Congresso U.M.I., Aprile 1940) ha stabilito la formola di media

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi\sqrt{(ac - b^2)_{x_0, y_0}}} \int_{\mathfrak{D}_r} (u\mathfrak{M}[V] - fV) dx dy$$

Consideriamo il sistema particolare

$$(7) \qquad \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial y^2} - N(x, y)\boldsymbol{u} = 0$$

nell'ipotesi che $N$ sia una matrice continua definita positiva.

Fissato nel campo $A$ un punto $(x_0, y_0)$, indicando con $\mathfrak{D}_r$ il cerchio $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq r^2$, con $r$ opportunamente piccolo in modo che $\mathfrak{D}_r$ appartenga ad $A$, detto $\alpha$ un numero positivo $< 1$ e posto $\rho = [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]^{1/2}$, si può provare che la

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{D}_r} \left[ u(x, y) \frac{\alpha \rho^{\alpha-2}}{r^\alpha} - \left( \lg \frac{r}{\rho} + \frac{\rho^\alpha - r^\alpha}{\alpha r^\alpha} \right) f(x, y) \right] dx dy$$

---

caratteristica delle soluzioni dell'equazione $\mathfrak{L}[u] = f$, ove $\mathfrak{D}_r$ è il dominio ellittico

$$c(x_0, y_0)(x-x_0)^2 - 2b(x_0, y_0)(x-x_0)(y-y_0) + a(x_0, y_0)(y-y_0)^2 = \rho^2, \qquad 0 \leq \rho \leq r$$

e

$$V = \lg \frac{r}{\rho} + \frac{\rho^\alpha - r^\alpha}{\alpha r^\alpha};$$

da tale formola deduce che una soluzione dell'equazione omogenea in cui è nullo il coefficiente $n$ della funzione incognita non può avere massimi o minimi nell'interno del campo. Per quanto riguarda l'equazione completa, poichè

$$1 = \frac{1}{2\pi \sqrt{(ac-b^2)_{x_0, y_0}}} \int_{\mathfrak{D}_r} (\mathfrak{M}[V] - nV) dx dy$$

si ha

$$\int_{\mathfrak{D}_r} \{ \mathfrak{M}[V][u(x, y) - u(x_0, y_0)] + (nu(x_0, y_0) - f) \} dx dy = 0 .$$

Ora, poichè nell'interno di $\mathfrak{D}_r$ è $V > 0$ ed $\mathfrak{M}[V] > 0$, per $r$ abbastanza piccolo, è evidente che se $n \leq 0$, non vi può essere un massimo positivo se $f \geq 0$, nè un minimo negativo se $f \leq 0$, a meno che $u(x, y)$ non sia costante in tutto un contorno di $(x_0, y_0)$; si riottiene in tal modo un noto risultato (cfr. E. HOPF, *Elementare Betrachtungen über die Lösung partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus*, Sitzungsb. Ak. Berl. (1927), 147-152; cfr. anche un recente lavoro di C. MIRANDA, *Sulle proprietà di minimo e di massimo delle soluzioni delle equazioni a derivate parziali lineari del secondo ordine di tipo ellittico*, Atti Acc. Naz. Lincei (8) X (1951) 117-120.

è una formola di media caratteristica per le soluzioni di $\Delta u = f$.

Si avrà così per una soluzione del sistema (7) la formola di media

$$\boldsymbol{u}(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathfrak{D}_r}\left[\frac{\alpha\rho^{\alpha-2}}{r^\alpha}\boldsymbol{u}(x, y) - \left(\lg\frac{r}{\rho} + \frac{\rho^\alpha - r^\alpha}{\alpha r^\alpha}\right)N(x, y)\boldsymbol{u}(x, y)\right]dxdy.$$

Poichè

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathfrak{D}_r}\frac{\alpha\rho^{\alpha-2}}{r^\alpha}\,dxdy = 1$$

si deduce

$$\int_{\mathfrak{D}_r}\left\{\frac{\alpha\rho^{\alpha-2}}{r^\alpha}[\boldsymbol{u}(x, y) - \boldsymbol{u}(x_0, y_0)] - \left(\lg\frac{r}{\rho} + \frac{\rho^\alpha - r^\alpha}{\alpha r^\alpha}\right)N(x, y)\boldsymbol{u}(x, y)\right\}dxdy = 0,$$

e quindi anche

$$\int_{\mathfrak{D}_r}\left\{\frac{\alpha\rho^{\alpha-2}}{r^\alpha}[\boldsymbol{u}(x, y)\times\boldsymbol{u}(x_0, y_0) - |\boldsymbol{u}(x_0, y_0)|^2] - \right.$$
$$\left. - \left(\lg\frac{r}{\rho} + \frac{\rho^\alpha - r^\alpha}{\alpha r^\alpha}\right)N(x, y)\boldsymbol{u}(x, y)\times\boldsymbol{u}(x_0, y_0)\right\}dxdy = 0.$$

Di qui segue che $|\boldsymbol{u}(x, y)|$ non può avere massimi relativi in $A$. Infatti se in $(x_0, y_0)$ la $|\boldsymbol{u}(x, y)|$ presentasse un massimo, si avrebbe $\boldsymbol{u}(x, y)\times\boldsymbol{u}(x_0, y_0) \leq |\boldsymbol{u}(x_0, y_0)|$ in tutto un intorno $\mathfrak{D}_r$ di $(x_0, y_0)$; ora dall'essere $N$ definita positiva si ha che per $r$ abbastanza piccolo riesce $N(x, y)\boldsymbol{u}(x, y)\times\boldsymbol{u}(x_0, y_0) > 0$, essendo $N(x, y)\boldsymbol{u}(x_0, y_0)\times\boldsymbol{u}(x_0, y_0) > 0$; d'altra parte $\frac{\alpha\rho^{\alpha-2}}{r^\alpha}$ è sempre $> 0$ mentre $\lg\frac{r}{\rho} + \frac{\rho^\alpha - r^\alpha}{\alpha r^\alpha}$ è $> 0$ nell'interno di $\mathfrak{D}_r$ e nulla sulla $\mathfrak{F}\mathfrak{D}_r$. Si conclude che

$$|\boldsymbol{u}(x, y)| \leq \max_{\mathfrak{F}A}|\boldsymbol{u}(x, y)|$$

Lo stesso risultato si può stabilire per la norma di una soluzione del sistema

$$a(x, y)\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial x^2} + 2b(x, y)\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial x\partial y} + c(x, y)\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial y^2} - N(x, y)\boldsymbol{u} = 0$$

almeno nell'ipotesi che sia assicurata la continuità dei coefficienti del sistema aggiunto e sia $a > 0$, $ac - b^2 > 0$.

**Sistemi di tipo parabolico.**

Considerazioni simili a quelle svolte per i sistemi ellittici si possono ripetere per certi sistemi parabolici.

Anzitutto, mentre per una equazione

$$a(x_1, x_2, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2b(x_1, x_2, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + c(x_1, x_2, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

si ha l'unicità della soluzione per il problema ordinario di valori al contorno, se $a\lambda^2 + 2\lambda\mu + c\mu^2$ è una forma definita, passando a un sistema

$$\mathfrak{L}[u] = A\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial x_1^2} + 2B\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial x_1 \partial x_2} + C\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial x_2^2} - \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y} = 0,$$

la condizione che sia

$$\text{det.}\, \| \rho^2 A + 2\rho B + C \| \neq 0 \tag{8}$$

per ogni numero reale $\rho$, non assicura più il verificarsi di un analogo fatto.

Ciò si vede facilmente adattando al caso parabolico certe considerazioni svolte da BIZADZE e da VISCIK [9]) nel caso ellittico.

Poniamo

$$\boldsymbol{u} = \left(\sum_{ij}^{2}{}_{1}\, \alpha_{ij} x_i x_j - hy\right)\boldsymbol{a}$$

essendo $\boldsymbol{a}$ un vettore costante, $\alpha_{11} + \alpha_{22} > 0$, $\alpha_{12} = \alpha_{21}$, $\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}{}^2 \geq 0$, $h > 0$. Riesce

$$\mathfrak{L}[\boldsymbol{u}] = [2(\alpha_{11}A + 2\alpha_{12}B + \alpha_{22}C) + hE]\boldsymbol{a}.$$

Pertanto se si vuole che il primo problema di valori al contorno abbia una sola soluzione è necessario che sia

$$\text{det.}\, \| 2(\alpha_{11}A + 2\alpha_{12}B + \alpha_{22}C) + hE \| \neq 0 \tag{9}$$

---

[9]) Cfr. l. c. in [2]).

qualunque sia la matrice $\|\alpha_{ij}\|$ semidefinita positiva e qualunque sia $h > 0$. Infatti, in caso contrario, in corrispondenza a una certa matrice $\|\alpha_{ij}\|$ semidefinita positiva e a un certo $h > 0$, si potrebbe trovare una vettore $\boldsymbol{a}$ tale che $\mathcal{L}[(\sum_{ij}^{2}{}_{1}\,\alpha_{ij}x_ix_j - hy)\boldsymbol{a}] = 0$ e quindi $\boldsymbol{u} = (\sum_{ij}^{2}{}_{1}\,\alpha_{ij}x_ix_j - hy)\boldsymbol{a}$ sarebbe un integrale di $\mathcal{L}[\boldsymbol{u}] = 0$ nullo sul paraboloide, o cilindro parabolico,

$$y = \frac{1}{h}\sum_{1}^{2}{}_{ij}\,\alpha_{ij}x_ix_j\,.$$

Consideriamo il seguente caso particolare

$$(10)\quad \left\|\begin{matrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1\end{matrix}\right\| \frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial x_1^2} + 2\left\|\begin{matrix} b_1 & -b_2 \\ b_2 & b_1\end{matrix}\right\| \frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial x_1 \partial x_2} + \left\|\begin{matrix} c_1 & -c_2 \\ c_2 & c_1\end{matrix}\right\| \frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial x_2^2} - \frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial y} = 0\,;$$

posto $a = a_1 + ia_2$, $b = b_1 + ib_2$, $c = c_1 + ic_2$, $u = u_1 + iu_2$, si può scrivere

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + c\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0\,.$$

La condizione (8) è che sia

$$\left|\begin{matrix} a_1\rho^2 + 2b_1\rho + c_1 & -(a_2\rho^2 + 2b_2\rho + c_2) \\ a_2\rho^2 + 2b_2\rho + c_2 & a_1\rho^2 + 2b_1\rho + c_1 \end{matrix}\right| = |a\rho^2 + 2b\rho + c|^2 \neq 0\,.$$

Posto $\rho = \operatorname{cotg}\varphi$, nel piano complesso $z = x_1 + ix_2$, la $z = a\cos^2\varphi + 2b\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi + c\,\mathrm{sen}^2\varphi$ rappresenta una ellisse; la condizione menzionata è che questa ellisse non passi per l'origine.

La condizione (9) è che sia

$$\left|\begin{matrix} a_1\alpha_{11} + 2b_1\alpha_{12} + c_1\alpha_{22} + h & -(a_2\alpha_{11} + 2b_2\alpha_{12} + c_2\alpha_{22}) \\ a_2\alpha_{11} + 2b_2\alpha_{12} + c_2\alpha_{22} & a_1\alpha_{11} + 2b_1\alpha_{12} + c_1\alpha_{22} + h \end{matrix}\right| =$$
$$= |a\alpha_{11} + 2b\alpha_{12} + c\alpha_{22} + h|^2 \neq 0\,.$$

Ora, posto $\dfrac{\alpha_{11}}{\alpha_{11} + \alpha_{22}} = \cos^2\varphi$, $\dfrac{\alpha_{22}}{\alpha_{11} + \alpha_{22}} = \mathrm{sen}^2\varphi$, $\dfrac{\alpha_{12}}{\alpha_{11} + \alpha_{22}} = \beta$ (onde $\beta^2 \leq \mathrm{sen}^2\varphi\cos^2\varphi$) e $\dfrac{h}{\alpha_{11} + \alpha_{22}} = k$, nel piano complesso $z$ la $z = a\cos^2\varphi + 2\beta b + c\,\mathrm{sen}^2\varphi$ al variare di $\varphi$ e di $\beta$ rappresenta in generale tutti i punti interni alla precedente ellisse. Supponiamo che quest'ultima pur non passando per l'origine tagli il semiasse negativo $x_1$. Allora è soddisfatta la condizione (8) mentre avendosi per un punto comune al semiasse $x_1$ negativo e a $z = a\cos^2\varphi + 2\beta b + c \operatorname{sen}^2\varphi$, $x_1 = a_1\cos^2\varphi + 2b_1\beta + c_1\operatorname{sen}^2\varphi < 0$, $x_2 = a_2\cos^2\varphi + 2b_2\beta + c_2\operatorname{sen}^2\varphi = 0$, si si possono scegliere $\varphi$ e $\beta$ (e quindi $\alpha_{11}$, $\alpha_{12}$, $\alpha_{22}$) e poi $k > 0$, e quindi $h > 0$, in modo che sia $|a\alpha_{11} + 2b\alpha_{12} + c\alpha_{22} + h|^2 = 0$, da cui segue l'esistenza di uno (infiniti) domini parabolici sulla cui frontiera si annulla una soluzione non identicamente nulla del sistema (10).

Prendiamo ora in considerazione il sistema

$$(11)\quad \mathfrak{L}[\boldsymbol{u}] = \frac{\partial}{\partial x}\left(A\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} + B\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(B\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} + C\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y}\right) - \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial z} - N\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$$

ove $A$, $B$, $C$, $N$ sono matrici simmetriche, funzioni continue di $(x, y, z)$ con $A$, $B$, $C$ dotate anche delle derivate rispetto a $x$ e $y$ continue; $\boldsymbol{f}$ un vettore continuo.

Siano $z = a$, $z = b$ due piani caratteristici; $\mathfrak{S} \equiv (x = \bar{x}(s, z),\ y = \bar{y}(s, z),\ z = z;\ 0 \leq s \leq L,\ a \leq z \leq b)$ una superficie di classe 2 che coi precedenti piani caratteristici individui un dominio $D$, di cui indichiamo con $B_a$ e $B_b$ le basi. Per ogni valore di $z$ le $x = \bar{x}(s, z)$, $y = \bar{y}(s, z)$ sono le equazioni parametriche di una curva regolare semplice chiusa $\mathfrak{C}_z$; supponiamo, come al solito, che al variare di $s$ da 0 ad $L$ tale curva sia percorsa positivamente in modo che nella rappresentazione parametrica adottata per $\mathfrak{S}$ la normale sia orientata verso l'esterno.

Detti $\lambda$ e $\mu$ i coseni direttori della normale interna a $\mathfrak{C}_z$ sul piano caratteristico cui essa appartiene, chiamiamo $\mathfrak{C}_z(t)$ la curva $x = \bar{x}(s, z) + \lambda t$, $y = \bar{y}(s, z) + \mu t$, $0 \leq s \leq L$; $\mathfrak{S}(t)$ la superficie $x = \bar{x}(s, z) + \lambda t$, $y = \bar{y}(s, z) + \mu t$, $z = z$ per $0 \leq s \leq L$, $a \leq z \leq b$; $D(t)$ il dominio limitato da $\mathfrak{S}(t)$ e dai piani $z = a$, $z = b$; $B_a(t)$ e $B_b(t)$ le basi di $D(t)$.

Sussiste il seguente teorema di unicità:

*Esiste al più un vettore* $\boldsymbol{u}$ *che in* $D - \mathfrak{S}$ *è soluzione regolare di* $\mathfrak{L}[\boldsymbol{u}] = \boldsymbol{f}$, *che si annulla nei punti interni di* $B_a$

*e soddisfa la condizione al contorno*

$$\lim_{t \to 0} \int_{\mathfrak{S}(t)} |\boldsymbol{u} - \bar{\boldsymbol{u}}|^2 ds = 0$$

*essendo* $\bar{\boldsymbol{u}}$ *un assegnato vettore con la norma di quadrato sommabile su* $\mathfrak{S}$.

Detta $\boldsymbol{u}$ la differenza di due eventuali siffatte soluzioni, integrando $\mathfrak{L}[\boldsymbol{u}] \times \boldsymbol{u}$ su $D(t)$ si ha

$$\int_{\mathfrak{F}D(t)} \left[\left(A \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} + B \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y}\right) \times \boldsymbol{u} dydz + \left(B \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} + C \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y}\right) \times \boldsymbol{u} dzdx - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} |\boldsymbol{u}|^2 dxdy\right] = \int_{D(t)} \left(A \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} + 2B \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y} + \right.$$

$$\left. + C \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y} \times \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y} + N\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u}\right) dxdydz,$$

ossia

$$\int_{\mathfrak{S}(t)} \left[\left(A \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} + B \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y}\right) \times \boldsymbol{u} dydz + \left(B \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} + C \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y}\right) \times \boldsymbol{u} dzdx\right] =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{S}(t)} |\boldsymbol{u}|^2 dxdy + \frac{1}{2} \int_{B_b(t)} |\boldsymbol{u}|^2 dxdy + \int_{D(t)} \left(A \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} + 2B \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y} + \right.$$

$$\left. + C \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y} \times \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y} + N\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u}\right) dxdydz .$$

Ma

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(s, z)} = \frac{\partial y}{\partial s} = -\lambda \frac{\partial \sigma}{\partial s}, \quad \frac{\partial(z, x)}{\partial(s, z)} = -\frac{\partial x}{\partial s} = -\mu \frac{\partial \sigma}{\partial s},$$

indicando con $\sigma$ l'arco di $C_z$; pertanto si ha

$$\int_a^b dz \int_{\mathfrak{C}_z(t)} \left[\lambda\left(A \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} + B \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y}\right) + \mu\left(B \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} + C \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y}\right)\right] \times \boldsymbol{u} d\sigma = -$$

$$- \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{S}(t)} |\boldsymbol{u}|^2 dxdy - \frac{1}{2} \int_{B_b(t)} |\boldsymbol{u}|^2 dxdy - \int_{D(t)} \left(A \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} + 2B \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y} + \right.$$

$$\left. + C \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y} \times \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y} + N\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u}\right) dxdydz .$$

Se ora è $0 < t < T$, integrando da $t$ a $T$, procedendo come nel caso ellittico, si ottiene in definitiva

$$\int_a^b dz \int_{\mathfrak{C}_z(T)} (\lambda^2 A + 2\lambda\mu B + \mu^2 C)\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u} d\sigma = \int_a^b dz \int_{B_z - B_z(T)} \left[\frac{\partial}{\partial x}(\lambda A + \mu B) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial y}(\lambda B + \mu C)\right]\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u} dxdy - \int_0^T dt \int_{\mathfrak{S}(t)} |\boldsymbol{u}|^2 dxdy - \int_0^T dt \int_{B_b(t)} |\boldsymbol{u}|^2 dxdy -$$

$$- 2 \int_0^T dt \int_{D(t)} \left(A \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} + 2B \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y} + C \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y} \times \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y} + \right.$$

$$\left. + N\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u}\right) dxdydz ,$$

indicando con $B_z$ e $B_z(t)$ le sezioni di $D$ e $D(t)$ col piano caratteristico $z = z$. Pertanto si conclude nell'asserto con un ragionamento simile a quello già fatto nel caso dei sistemi di tipo ellittico, tenendo presente che il terzo termine sulla destra è essenzialmente negativo.

Osserviamo ora che nell'ipotesi che la matrice $\begin{Vmatrix} A & B \\ B & C \end{Vmatrix}$ sia definita positiva, è certamente soddisfatta la condizione di parabolicità di PETROVSKI [10]). Questa richiede che le radici dell'equazione

$$\det. \| \lambda E + \alpha^2 A + 2\alpha\beta B + \beta^2 C \| = 0$$

abbiano tutte parte reale < di un certo $\delta < 0$, qualunque siano $\alpha$ e $\beta$ con $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

Ora, detti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ gli autovalori della matrice $-(\alpha^2 A + 2\alpha\beta B + \beta^2 C)$, si ha intanto che essi sono tutti negativi e le loro proprietà estremali assicurano che

$$|\lambda_i| \geq \min_{\substack{|\boldsymbol{u}|=1 \\ \alpha^2+\beta^2=1}} (\alpha^2 A + 2\alpha\beta B + \beta^2 C)\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u} \geq \min_{|\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2|=1} \begin{Vmatrix} A & B \\ B & C \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{u}_2 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{u}_2 \end{Vmatrix},$$

---

10) I. PETROVSKI, *Über das Cauchysche Problem für ein System linearer partieller Differentialgleichungen in Gebiete der nichtanalytischen Funktionen*, Bull. de l'Univ. d'État de Moscou, Mathém. et Mécanique, fasc. 7, vol. 1 (1938).

poichè il vettore a $2n$ componenti $\alpha u_1, \ldots, \alpha u_n, \beta u_1, \ldots, \beta u_n$ ha la norma eguale a 1 se è $\sum_1^n{}_k u_k^2 = 1$.

Ciò posto, potremo stabilire una formola di media facendo ricorso alle soluzioni fondamentali del sistema

$$A \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial \xi^2} + 2B \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial \xi \partial \eta} + C \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \zeta} = 0 , \tag{12}$$

ove i coefficienti si suppongono costanti, calcolati in un punto $(x, y, z)$ [11]).

Detti $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_n$ gli autovettori relativi alla matrice $-(\alpha^2 A + 2\alpha\beta B + \beta^2 C)$ corrispondenti agli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, poniamo

$$\boldsymbol{v}_k(x, y, z ; \xi, \eta, \zeta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp [\lambda_k(z - \zeta) + i\alpha(x - \xi) + i\beta(y - \eta)] \boldsymbol{c}_k d\alpha d\beta , \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Fissato ora un punto $P(x, y, z)$, tenendo variabile il punto $Q(\xi, \eta, \zeta)$, indichiamo con $\mathfrak{D}_r$ la semisfera $(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 \leq r^2$, $\zeta \leq z$. Poniamo

$$\boldsymbol{w}_k = \left(1 - \frac{\rho^2}{r^2}\right)^2 \boldsymbol{v}_k$$

essendo $\rho = \overline{PQ}$. Ciò fatto, nelle formole di reciprocità

$$\int_{\mathfrak{D}_r - \mathfrak{D}_\varepsilon} (\mathfrak{L}[\boldsymbol{u}] \times \boldsymbol{w}_k - \boldsymbol{u} \times \mathfrak{M}[\boldsymbol{w}_k]) d\xi d\eta d\zeta = \int_{\mathfrak{F}(\mathfrak{D}_r - \mathfrak{D}_\varepsilon)} \left[\left(A \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \xi} \times \boldsymbol{w}_k - A \frac{\partial \boldsymbol{w}_k}{\partial \xi} \times \boldsymbol{u} + B \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \eta} \times \boldsymbol{w}_k - B \frac{\partial \boldsymbol{w}_k}{\partial \eta} \times \boldsymbol{u}\right) d\eta d\zeta + \left(B \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \xi} \times \boldsymbol{w}_k - B \frac{\partial \boldsymbol{w}_k}{\partial \xi} \times \boldsymbol{u} + C \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \eta} \times \boldsymbol{w}_k - C \frac{\partial \boldsymbol{w}_k}{\partial \eta} \times \boldsymbol{u}\right) d\zeta d\xi - \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w}_k d\xi d\eta\right]$$

$$k = 1, 2, \ldots, n$$

---

[11]) Si potrebbe anche ricorrere senz'altro alle soluzioni fondamentali del sistema (11); cfr. S. Z. BRUK, *Soluzioni fondamentali di un sistema di equazioni differenziali del tipo parabolico*, Akad. Nauk. S.S.S.R., Doklady (N.S.) 60 (1948) 9-12, (in russo).

ove $\mathfrak{M}$ indica l'operatore differenziale aggiunto di $\mathfrak{L}$, ed $\varepsilon$ è un numero positivo $< r$, se $A$, $B$, $C$ verificano una condizione di HÖLDER, è lecito passare al limite per $\varepsilon \rightarrow 0$. Si giunge in tal modo, con un procedimento che abbiamo già applicato in analoghe occasioni, a conseguire una formola di media.

Sulla base di questa e del provato teorema di unicità si può dimostrare l'esistenza della soluzione del problema di valori al contorno in oggetto.