RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

CARLO BONATI SAVORGNAN

Sulla derivazione di funzioni composte

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 22 (1953), p. 258-264

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1953__22__258_0>

SULLA DERIVAZIONE DI FUNZIONI COMPOSTE

Nota (*) *di* CARLO BONATI SAVORGNAN (*a Padova*)

In questa nota mi propongo di estendere alle funzioni composte del tipo $f(x(t), y(t), z(t))$ un teorema di A. SCORZA TOSO sulla derivazione delle funzioni composte del tipo $f(x(t), y(t))$ [1]).

Le ipotesi di cui avrò bisogno sono più restrittive di quelle alla base di quest'ultimo teorema, precisamente dovrò supporre la $f(x, y, z)$ dotata di derivate prime, continue rispetto alle coppie di variabili, in tutti i punti di un parallelepipedo che contenga nel suo interno la curva $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$; e ciò al fine di potermi giovare di un risultato ottenuto da B. LODIGIANI nel corso di un suo lavoro [2]).

Comincerò a dimostrare un teorema relativo al caso che il parametro t coincida con la variabile x [3]), indi, con ipotesi leggermente più restrittive, passerò a dimostrare il teorema nel caso generale.

1. - TEOREMA I. - *La funzione* $f(x, y, z)$ *definita nel parallelepipedo*

$$R:\ a \leq x \leq b\,,\quad c \leq y \leq d\,,\quad e \leq z \leq g$$

(*) Pervenuta in Redazione il 20 Aprile 1953.

1) A. SCORZA TOSO, *Sulla derivazione di una funzione composta.* [Rendiconti Sem. Matematico di Padova, Vol. XXI (1952), pagg. 198-201].

2) B. LODIGIANI, *Sulla differenziabilità asintotica regolare delle funzioni di più variabili.* Lavoro in corso di stampa in questo volume.

3) Il caso della funzione $f(x, y(x))$ è già stato studiato da G. SCORZA DRAGONI in *Un'osservazione sulla derivata di una funzione composta.* [Rendiconti Seminario Matematico di Padova, Vol. XX (1951), pagg. 462-467].

ammetta ivi: la derivata prima rispetto ad x; la derivata prima rispetto ad y, continua rispetto alla coppia (x, y); la derivata prima rispetto a z, misurabile rispetto ad x e continua rispetto alla coppia (y, z) [4]. *Le funzioni $y = y(x)$, $z = z(x)$ risultino definite nell'intervallo*

$$I: \; a \leq x \leq b,$$

vi soddisfacciano nell'interno alle

$$c < y(x) < d \quad , \quad e < z(x) < g$$

e siano ivi quasi ovunque derivabili. Allora la funzione composta

$$F(x) = f(x, \; y(x), \; z(x))$$

è dotata di derivata asintotica quasi ovunque in I, e questa derivata è uguale quasi ovunque a

$$f'_x(x, y(x), z(x)) + f'_y(x, y(x), z(x))y'(x) + f'_z(x, y(x), z(x))z'(x) \, ;$$

di guisa che se $F(x)$ è quasi ovunque derivabile, sussiste quasi ovunque la solita formula di derivazione delle funzioni composte.

In virtù di un teorema di G. STAMPACCHIA [5]), preso un intero positivo n, possiamo determinare un insieme perfetto I_n contenuto in I, in guisa che sia $mI_n > mI - \varepsilon$ [6]) e che la funzione $f'_z(x, y, z)$ risulti continua se considerata come definita soltanto nell'insieme H_n costituito dai punti di R aventi la prima coordinata in I_n.

Presi allora due punti $P(x, y, z)$ e $P_1(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$

---

4) Oppure si può supporre ad esempio che esistano in R: la derivata prima rispetto a z; la derivata prima rispetto ad x continua rispetto alla coppia (x, z); la derivata prima rispetto ad y misurabile rispetto ad x e continua rispetto alla coppia (y, z).

5) G. STAMPACCHIA, *Sopra una classe di funzioni in n variabili.* [Ricerche di matematica, Vol. I (1952), fascic. 1°, pagg. 27-54].

6) Denotando, come di consueto, con mE la misura, secondo Lebesgue, dell'insieme E.

appartenenti ad H_n, consideriamo [7]) la spezzata $PP'P''P_1$, essendo P' e P'' i punti di coordinate rispettivamente $(x+\Delta x,\ y,\ z)$ e $(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z)$; possiamo allora scrivere

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x, y, z) = f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) -$$
$$- f(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z) + f(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z) - f(x+\Delta x,\ y,\ z) +$$
$$+ f(x+\Delta x,\ y,\ z) - f(x,\ y,\ z)$$

da cui, per il teorema di Lagrange e per quello del differenziale, si trae

$$f(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z) - f(x,\ y,z) =$$
$$= f'_z(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\vartheta\Delta z)\Delta z +$$
$$+ f'_y(x+\Delta x,\ y+\vartheta_1\Delta y,\ z)\Delta y + f'_x(x,\ y,\ z)\Delta x + \gamma$$

con ϑ, ϑ_1 compresi tra 0 ed 1, e γ infinitesimo di ordine superiore rispetto a Δx.

D'altronde, osservando che il segmento $P''P_1$ appartiene ad H_n (insieme in cui $f'_z(x,\ y,\ z)$ è continua nel complesso delle variabili) e ricordando le ipotesi fatte sulla funzione f'_y, si ricavano le relazioni

$$f'_z(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\vartheta\Delta z) = f'_z(x,\ y,\ z) + \alpha$$
$$f'_y(x+\Delta x,\ y+\vartheta_1\Delta y,\ z) = f'_y(x,\ y,\ z) + \beta$$

dove α, β sono infinitesime con $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$; cosicchè si può in definitiva scrivere

$$f(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z) - f(x,\ y,\ z) = f'_x(x,\ y,\ z)\Delta x + \tag{1}$$
$$+ f'_y(x,\ y,\ z)\Delta y + f'_z(x,\ y,\ z)\Delta z + \omega$$

con ω infinitesimo di ordine superiore rispetto a $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$.

Se ora indichiamo con $\bar{I}_n$ l'insieme dei punti (di I_n) di

---

7) Per quanto riguarda il procedimento usato per dimostrare la successiva formula (1), che ho creduto qui opportuno esporre per maggiore chiarezza, cfr. loc. cit. in 2).

Vedi anche J. CECCONI, *Sulla differenziabilità nel senso di Stolz di una funzione di più variabili.* [Ricerche di matematica, vol. I (1952), fascic. 2°, pagg. 317-324].

densità lineare 1 per I_n, posto

$$\bar{I} = \sum_n \bar{I}_n$$

risulta ovviamente $m\bar{I} = b - a$.

Premesso questo sia x_0 un punto di $\bar{I}$ nel quale le funzioni $y = y(x)$, $z = z(x)$ risultino derivabili: x_0 apparterrà ad uno (almeno), $\bar{I}_r$, degli insiemi $\bar{I}_n (n = 1, 2, \ldots)$; e sia $x_0 + h$ un punto di I_r. La (1) porge allora

$$\begin{aligned} F(x_0 + h) - F(x_0) &= f(x_0 + h, y(x_0 + h), z(x_0 + h)) - \\ &- f(x_0, y(x_0), z(x_0)) = f'_x(x_0, y(x_0), z(x_0))h + \\ &+ f'_y(x_0, y(x_0), z(x_0))[y(x_0 + h) - y(x_0)] + \\ &+ f'_z(x_0, y(x_0), z(x_0))[z(x_0 + h) - z(x_0)] + \omega \end{aligned}$$

con ω infinitesimo di ordine superiore rispetto ad h; se ora dividiamo per h e facciamo tendere h a zero (in guisa che $x_0 + h$ appartenga ad I_r; si noti che allora h tende a zero mantenendosi in un insieme di densità lineare uno nell'origine) troviamo appunto che la derivata asintotica di $F(x)$ in x_0 vale

$$\begin{aligned} f'_x(x_0, y(x_0), z(x_0)) + f'_y(x_0, y(x_0), z(x_0))y'(x_0) + \\ + f_z'(x_0, y(x_0), z(x_0))z'(x_0). \end{aligned}$$

Ma, per quanto visto, x_0 può coincidere con quasi tutti i punti di I; donde la conclusione.

OSSERVAZIONE. — Si può facilmente vedere come il teorema precedente rimanga valido anche nell'ipotesi meno restrittiva che la $f(x, y, z)$ ammetta in R le derivate prime (con le condizioni già viste) al di fuori di un insieme avente la proiezione sull'asse x di misura (lineare) nulla [8]).

2. — Passando al caso generale dimostrerò ora il seguente

TEOREMA II. - *La funzione $f(x, y, z)$ definita nel parallelepipedo*

---

[8]) Si noti infine come il teorema sia vero anche supponendo la $f'_x(x, y, z)$ esistente soltanto nei punti della curva $y = y(x)$, $z = z(x)$.

$$R:\ a \leq x \leq b \quad , \quad c \leq y \leq d \quad , \quad e \leq z \leq g$$

ammetta ivi le derivate prime continue rispetto alle coppie di variabili. Le funzioni $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ *siano assolutamente continue nell'intervallo*

$$I:\ \alpha \leq t \leq \beta$$

risultando ivi quasi ovunque

$$x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) > 0 \,. \tag{2}$$

Inoltre il punto $[x(t),\ y(t),\ z(t)]$ *sia interno ad* R *per quasi tutti i* t *di* I. *Allora la funzione composta*

$$F(t) = f(x(t),\ y(t),\ z(t))$$

è dotata di derivata asintotica quasi ovunque in I *e questa derivata è uguale quasi ovunque a*

$$f'_x(x(t),\ y(t),\ z(t))x'(t) + f'_y(x(t),\ y(t),\ z(t))y'(t) + \\ + f'_z(x(t),\ y(t),\ z(t))z'(t)\,;$$

di guisa che se $F(t)$ *è quasi ovunque derivabile, sussiste quasi ovunque la solita formula di derivazione delle funzioni composte.*

Preso un intero positivo n, possiamo determinare (in virtù del teorema già citato nel n. 1) tre insiemi perfetti J_n^x, J_n^y, J_n^z contenuti rispettivamente nei segmenti

$$\begin{array}{ccccc} a \leq x \leq b & , & y = 0 & , & z = 0 \\ x = 0 & , & c \leq y \leq d & , & z = 0 \\ x = 0 & , & y = 0 & , & e \leq z \leq g \end{array}$$

in guisa che sia

$$mJ_n^x > (b - a) - \frac{1}{n} \quad ; \quad mJ_n^y > (d - c) - \frac{1}{n} \quad ; \quad mJ_n^z > (g - e) - \frac{1}{n}$$

e che le funzioni f'_x, f'_y, f'_z siano tutte e tre continue (se considerate come definite soltanto) in ciascuno degli insiemi H_n^x, H_n^y, H_n^z costituiti nell'ordine da quei punti di R che hanno rispettivamente la x in J_n^x, la y in J_n^y e la z in J_n^z. Indichiamo ancora con I_n^x l'insieme dei punti di I trasformati dalla $x=x(t)$ in punti appartenenti a J_n^x e con $\bar{I}_n^x$ l'insieme dei punti di I_n^x che sono di densità lineare uno per I_n^x; in maniera analoga si definiscano gli insiemi $I_n^y, \bar{I}_n^y, I_n^z, \bar{I}_n^z$.

Posto

$$I' = \sum_n (I_n^x + I_n^y + I_n^z) \quad ; \quad \bar{I}' = \sum_n (\bar{I}_n^x + \bar{I}_n^y + \bar{I}_n^z)$$

è facile vedere come la misura (secondo Lebesgue) dell'insieme I' (e quindi anche dell'insieme $\bar{I}'$, essendo ovviamente $mI'=m\bar{I}'$) sia uguale a $(\beta-\alpha)$; infatti, nell'insieme $I-I'$, in virtù di un noto teorema [9], risultano verificate le

$$x'(t)=0 \quad , \quad y'(t)=0 \quad , \quad z'(t)=0\,,$$

donde, per la (2), l'asserto.

Sia ora t_0 un punto di $\bar{I}'$ nel quale le funzioni $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ siano derivabili, e tale inoltre che in esso sia verificata la (2) e che il punto $[x(t_0), \; y(t_0), \; z(t_0)]$ risulti interno ad R (di guisa che t_0 può assumere quasi tutte le posizioni in I); esso apparterrà ad uno (almeno) degli insiemi $\bar{I}_n^x$, $\bar{I}_n^y$, $\bar{I}_n^z$ $(n=1, 2, ...)$, e sia ad es. $\bar{I}_r^x$ tale insieme. Allora indicato con h un numero tale che t_0+h appartenga ad I_r^x, di guisa che h si può far tendere a zero mantenendolo in un insieme di densità lineare uno nell'origine, in base alla formula (1) del n. 1 (che risulta verificata per ogni coppia di punti appartenenti ad uno degli insiemi I_n^x, I_n^y, I_n^z $(n=1, 2, ...)$), risulta

$$\begin{gathered}F(t_0+h)-F(t_0)=f(x(t_0+h),\, y(t_0+h),\, z(t_0+h))- \\ -f(x(t_0),\, y(t_0),\, z(t_0))=f'_x(x(t_0),\, y(t_0),\, z(t_0))[x(t_0+h)-x(t_0)]+ \\ +f'_y(x(t_0),\, y(t_0),\, z(t_0))[y(t_0+h)-y(t_0)]+ \\ +f'_z(x(t_0),\, y(t_0),\, z(t_0))[z(t_0+h)-z(t_0)]+\omega\end{gathered}$$

con ω infinitesimo di ordine superiore rispetto ad h; se adesso dividiamo per h e facciamo tendere h a zero, troviamo

---

[9]) Vedi L. TONELLI, *Fondamenti di Calcolo delle variazioni.* [Zanichelli, Bologna, 1922], vol. I, N. 62, b.

che la derivata asintotica di $F(t)$ in t_0 (esiste e) vale appunto

$$f_x'(x(t_0),\ y(t_0),\ z(t_0))x'(t_0) + f'_y(x(t_0),\ y(t_0),\ z(t_0))y'(t_0) + \\ + f'_z(x(t_0),\ y(t_0),\ z(t_0))z'(t_0).$$

OSSERVAZIONE. — In analogia a quanto detto nell'osservazione finale del n. 1, anche ora facciamo notare (e la cosa risulta pressochè immediata) come il teorema precedente rimanga valido anche nell'ipotesi meno restrittiva che la $f(x, y, z)$ ammetta in R le derivate prime al di fuori di un insieme avente di misura lineare nulla le sue proiezioni sugli assi coordinati.

OSSERVAZIONE. — Per finire farò notare come, dai ragionamenti usati per dimostrarli, segua immediatamente la possibilità di estendere i due precedenti teoremi, previa un'ovvia generalizzazione delle ipotesi iniziali, alle funzioni composte, rispettivamente del tipo

$$f(x,\ y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x)) \quad , \quad f(x_1(t),\ x_2(t),\ \ldots,\ x_n(t)) \ ;$$

per le dimostrazioni basterà ricalcare le orme delle precedenti.