RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

BRUNA LODIGIANI

Sulla differenziabilità asintotica regolare delle funzioni di piú variabili

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 22 (1953), p. 251-257

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1953__22__251_0>

SULLA DIFFERENZIABILITÀ ASINTOTICA REGOLARE DELLE FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

Nota (*) *di* Bruna Lodigiani (*a Mantova*)

In questa Nota mi propongo di esporre alcuni teoremi [1]) relativi alla differenziabilità asintotica regolare per le funzioni di più variabili.

La differenziabilità asintotica regolare è stata studiata da Radò [2]), Caccioppoli e Scorza Dragoni [3]).

Una funzione di due variabili si dice *dotata di differenziale asintotico regolare nel punto* $P_0 \equiv (x_0, y_0)$, se esistono due costanti a e b tali da aversi

$$(1) \qquad f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = a\Delta x + b\Delta y + \omega ,$$

con ω infinitesimo d'ordine superiore rispetto a $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ quando il punto $P \equiv (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ tende a P_0, senza abbandonare un conveniente insieme I di densità superficiale 1 in P_0 e costituito dai contorni di quadrati di centro P_0 e di lati paralleli agli assi.

(*) Pervenuta in Redazione il 15 aprile 1953.

1) Tolti dalla mia Tesi di Laurea in Matematica pura, discussa a Padova il 13-12-1952.

2) T. Radò: *On the derivative of the Lebesgue area of continuous surfaces.* [Fundamenta Mathematicae, Vol. XXX (1938), pagg. 34-39], n. 13-14; *On absolutely continuous transformations in the plane.* [Duke Mathematical Journal, Vol. IV (1938), pagg. 219-220].

3) R. Caccioppoli - G. Scorza Dragoni: *Necessità della condizione di Weierstrass per la semicontinuità di un integrale sopra una data superficie.* [Reale Accademia d'Italia. Memorie della Classe di Scienze fisiche, matematiche, naturali, Vol. IV (1938), pagg. 251-268], n. 6

Il teorema fondamentale di Radò, Caccioppoli, Scorza Dragoni afferma in sostanza che se $f(x, y)$ è continua nel quadrato

$$Q: \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1$$

ed è quivi dotata quasi ovunque delle derivate parziali prime, essa è asintoticamente differenziabile in modo regolare in quasi tutti i punti di Q.

Per le funzioni di più variabili si può ovviamente introdurre un analogo concetto di differenziabilità asintotica regolare. Limitandoci per semplicità alle funzioni di tre variabili, la definizione sarà la seguente: una funzione $f(x, y, z)$ si dice *dotata di differenziale asintotico regolare nel punto* $P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$, se esistono tre costanti a, b, c tali da aversi

$$(2) \qquad f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0) = \\ = a\Delta x + b\Delta y + c\Delta z + \omega$$

con ω infinitesimo d'ordine superiore rispetto a $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$, quando il punto $P \equiv (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$ tende a P_0, senza abbandonare un conveniente insieme I di densità volumetrica 1 in P_0 e costituito dalle facce di cubi di centro P_0 e di spigoli paralleli agli assi.

Il problema di determinare condizioni sufficienti per la differenziabilità asintotica regolare di una funzione in tre o più variabili è tuttora insoluto [4]).

In questo lavoro io considero questo problema alla luce dei recenti studi di Scorza Dragoni [5]), Bayada [6]), Stampac-

---

[4]) Per la differenziabilità asintotica *quasi regolare* si veda: L. TIBALDO: *Sulla differenziabilità asintotica quasi regolare delle funzioni di tre variabili.* [Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova, Vol. XIII (1942), pagg. 78-88].

[5]) G. SCORZA DRAGONI: *Un teorema sulle funzioni continue rispetto ad una e misurabili rispetto ad un'altra variabile.* [Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova, Vol. XVII (1948), pagg. 102-106].

[6]) E. BAYADA: *Sulle funzioni continue separatamente rispetto alle variabili e gli integrali curvilinei.* [Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova, Vol. XVII (1948), pagg. 201-218], n. 2.

chia [7]), Scorza Toso [8]) sulle funzioni separatamente continue rispetto alle variabili o alle singole coppie di variabili e ottengo un criterio di differenziabilità asintotica regolare per funzioni di tre [9]) variabili.

Ecco precisamente il teorema a cui sono pervenuta:

Se nel cubo

$$S: \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1$$

la funzione $f(x, y, z)$ è derivabile parzialmente rispetto a x, y, z, con derivate continue rispetto alle singole coppie delle variabili, allora $f(x, y, z)$ è quasi ovunque in S differenziabile asintoticamente in modo regolare.

1. - Ipotesi. — La funzione $f(x, y, z)$ sia definita nel cubo

$$S: \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1$$

e sia derivabile parzialmente rispetto a x, y, z, con derivate continue rispetto alle coppie di variabili. In virtù di un risultato di Stampacchia, dato il numero positivo ε, possiamo determinare tre insiemi perfetti

$$\alpha_1 \quad , \quad \beta_1 \quad , \quad \gamma_1 ,$$

contenuti rispettivamente nei segmenti

$$0 \leq x \leq 1, \quad y = 0, \quad z = 0$$

$$x = 0, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad z = 0$$

$$x = 0, \quad y = 0, \quad 0 \leq z \leq 1$$

---

7) G. STAMPACCHIA: *Sopra una classe di funzioni in n variabili.* [Ricerche di Matematica, Vol. I (1952), fascicolo I, pagg. 27-54], n. 1.

8) A. M. SCORZA TOSO: *Un'osservazione sulle funzioni di due variabili continue separatamente rispettivamente a queste.* [Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova, Vol. XX (1951), pagg. 468-469].

9) L'estensione al caso di 4, 5, ... variabili non dovrebbe presentare nessuna difficoltà.

in guisa che sia

$$m(\alpha_1) > 1 - \varepsilon \quad , \quad m(\beta_1) > 1 - \varepsilon \quad , \quad m(\gamma_1) > 1 - \varepsilon \;\; ^{10)}$$

e che $f_x'(x, y, z)$ sia continua qualora la si consideri come definita soltanto negli insiemi

$$A_1 \quad , \quad B_1 \quad , \quad C_1$$

costituiti, nell'ordine, da quei punti di S che hanno rispettivamente la x in α_1, la y in β_1 e la z in γ_1.

Gli insiemi

$$\alpha_2 \quad , \quad \beta_2 \quad , \quad \gamma_2 \, ,$$

$$A_2 \quad , \quad B_2 \quad , \quad C_2 \, ,$$

abbiano nei riguardi di $f_y'(x, y, z)$ un significato analogo al precedente e così pure

$$\alpha_3 \quad , \quad \beta_3 \quad , \quad \gamma_3 \, ,$$

$$A_3 \quad , \quad B_3 \quad , \quad C_3$$

nei riguardi di $f_z'(x, y, z)$.

2. - Un lemma. — Posto ora

$$A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \quad , \quad B = B_1 \cdot B_2 \cdot B_3 \quad , \quad C = C_1 \cdot C_2 \cdot C_3 \, ,$$

$$H(\varepsilon) = A + B + C \, ,$$

di guisa che $m(H(\varepsilon)) > 1 - 3\varepsilon$, dimostriamo che:

Se $P \equiv (x_0 + \Delta x, \, y_0 + \Delta y, \, z_0 + \Delta z)$ *tende, in* $H(\varepsilon)$, *verso il punto* $P_0 \equiv (x_0, \, y_0, \, z_0)$ [11]), risulta

$$\lim_{P \to P_0} \frac{1}{\overline{PP_0}} \{ f(P) - f(P_0) - f_x'(P_0)\Delta x - f_y'(P_0)\Delta y - f_z'(P_0)\Delta z \} = 0.$$

Infatti, sia P un punto di $H(\varepsilon)$. Allora P o appartiene ad A, o a B, o a C.

---

10) $m(\alpha_1) =$ misura di α_1, $m(\beta_1) =$ misura di β_1, $m(\gamma_1) =$ misura di γ_1.

11) di $H(\varepsilon)$.

Tanto per fissare le idee, supponiamo che si verifichi il primo caso.

Possiamo scomporre così l'incremento $f(P) - f(P_0)$:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0) =$$
$$= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0 + \Delta z) +$$
$$+ f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0 + \Delta z) - f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) +$$
$$+ f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0) .$$

Per il teorema del valor medio risulta

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0 + \Delta z) =$$
$$= f_y'(x_0 + \Delta x, y_0 + \theta \Delta y, z_0 + \Delta z) \Delta y$$
$$f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0 + \Delta z) - f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) =$$
$$= f_z'(x_0 + \Delta x, y_0, z_0 + \theta_1 \Delta z) \Delta z$$

con $0 < \theta < 1$, $0 < \theta_1 < 1$, dove $(x_0 + \Delta x, y_0 + \theta \Delta y, z_0 + \Delta z)$ e $(x_0 + \Delta x, y_0, z_0 + \theta_1 \Delta z)$ sono punti di A, e per quello del differenziale totale

$$f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0) = f_x'(x_0, y_0, z_0) \Delta x + \omega$$

con ω infinitesimo d'ordine superiore rispetto a Δx; inoltre le differenze

$$f_y'(x_0 + \Delta x, y_0 + \vartheta \Delta y, z_0 + \Delta z) - f_y'(x_0, y_0, z_0)$$
$$f_z'(x_0 + \Delta x, y_0, z_0 + \vartheta_1 \Delta z) - f_z'(x_0, y_0, z_0)$$

sono infinitesime con $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$, poichè le derivate parziali $f_x'(x, y, z)$, $f_y'(x, y, z)$ ed $f_z'(x, y, z)$ sono continue se considerate come definite soltanto sull'insieme $H(\varepsilon)$. Ne segue così la (1).

3. - Un primo teorema. — Accanto all'insieme $H(\varepsilon)$ si consideri ora l'insieme

$$K(\varepsilon) = A \cdot B \cdot C \ ;$$

allora $K(\varepsilon)$ è misurabile e appartiene ad $H(\varepsilon)$, inoltre risulta

$m(K(\varepsilon)) > 1 - 9\varepsilon$. Per un noto teorema di Lebesgue, quasi tutti i punti di $K(\varepsilon)$ sono di densità lineare 1 per le sezioni di $K(\varepsilon)$ con le parallele agli assi passanti per essi. Sia $K^*(\varepsilon)$ l'insieme di tali punti; si avrà $m(K^*(\varepsilon)) = m(K(\varepsilon))$, con $K^*(\varepsilon)$ contenuto in $K(\varepsilon)$.

Si prenda ora un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$ di $K^*(\varepsilon)$. Ci proponiamo di dimostrare il seguente teorema:

È possibile associare a P_0 un insieme $J(P_0)$ misurabile, di densità (volumetrica) 1 in P_0, formato dai contorni di tanti cubi col centro in P_0 e con le facce parallele ai piani coordinati, in modo che

$$\frac{1}{\overline{PP_0}} \{ f(P) - f(P_0) - f_x'(P_0)\Delta x - f_y'(P_0)\Delta y - f_z'(P_0)\Delta z \}$$

tenda a zero quando $P \equiv (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$ tende a P_0 mantenendosi in $J(P_0)$.

Infatti si considerino le rette r_1, r_2, r_3 uscenti da P_0 e parallele rispettivamente agli assi x, y, z. Dato che l'intersezione di tre insiemi di una retta di densità 1 in un punto è ancora di densità 1 in questo punto e poichè P_0 appartiene a $K^*(\varepsilon)$, entro le sezioni di $K(\varepsilon)$ con le rette r_1, r_2, r_3 si possono trovare tre insiemi i_1, i_2, i_3 di densità lineare 1 in P_0, simmetrici rispetto a P_0 e a due a due congruenti. Consideriamo ora i cubi che hanno il centro in P_0 e le facce parallele ai piani coordinati, quelle parallele al piano xy passando per i punti di i_3, quelle parallele al piano yz passando per i punti di i_1 e quelle parallele al piano zx passando per i punti di i_2. Come insieme $J(P_0)$ prenderemo l'insieme formato da tutti i contorni dei cubi di tale tipo. Ora $J(P_0)$ è di densità spaziale 1 in P_0, poichè i_1, i_2, i_3 sono in P_0 di densità lineare 1 [12]). Inoltre è contenuto per costruzione nell'insieme $H(\varepsilon)$, e di qui e dalla (1) segue il teorema.

---

[12]) Vedi TIBALDO: *Sulla differenziabilità asintotica quasi regolare delle funzioni di tre variabili.* [Rendiconti del Seminario matematico dell'Università di Padova, Vol. XII (1942), pagg. 78-88], n. 5.

4. - Conclusione. — Dal risultato precedente si trae subito, nelle ipotesi del n. 1, la differenziabilità asintotica regolare della $f(x, y, z)$ per quasi tutti i punti di S. Precisamente $f(x, y, z)$ è asintoticamente differenziabile in modo regolare nell'insieme

$$K^* = K^*(1) + K^*\left(\frac{1}{2}\right) + K^*\left(\frac{1}{3}\right) + \dots K^*\left(\frac{1}{n}\right) + \dots,$$

$K^*\left(\frac{1}{n}\right)$ essendo l'insieme $K^*(\varepsilon)$ per $\varepsilon = \frac{1}{n}$. È ovvio che la misura di K^* è uguale alla misura di S.

OSSERVAZIONE. — Aggiungo infine un esempio di funzione derivabile parzialmente rispetto a x, y, z, tale che essa e le sue derivate siano continue in un punto, rispetto alle coppie di variabili, ma non rispetto al complesso.

Allo scopo basta considerare la funzione $f(x, y, z)$ definita dalle

$$\begin{cases} f(x, y, z) = \dfrac{x^2y^2z^2}{x^6 + y^6 + z^6} & \text{se} \quad x^2 + y^2 + z^2 \neq 0 \\ f(0, 0, 0) = 0 \end{cases}$$

e verificare che essa ha, nell'origine, il comportamento ora descritto.

Come si vede da questo esempio, l'esistenza delle derivate $f_x'(x, y, z)$, $f_y'(x, y, z)$, $f_z'(x, y, z)$ e la loro continuità rispetto alle coppie di variabili, non porta come conseguenza la continuità della $f(x, y, z)$ rispetto al complesso delle variabili, mentre porta come conseguenza immediata la continuità della $f(x, y, z)$ rispetto alle coppie di variabili.