RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

FEDERICO CAFIERO

Sul passaggio al limite sotto il segno d'integrale per successioni d'integrali di Stieltjes-Lebesgue negli spazi astratti, con masse variabili con gli integrandi

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 22 (1953), p. 223-245

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1953__22__223_0>

SUL PASSAGGIO AL LIMITE SOTTO IL SEGNO D'INTEGRALE PER SUCCESSIONI D'INTEGRALI DI STIELTJES-LEBESGUE NEGLI SPAZI ASTRATTI, CON MASSE VARIABILI CON GLI INTEGRANDI.

Memoria (*) *di* FEDERICO CAFIERO (*a Napoli*)

In questo lavoro studio il problema del passaggio al limite sotto il segno d'integrale nel caso generale di successioni d'integrali di Stieltjes-Lebesgue negli spazi astratti [1]), le cui funzioni peso o masse varino insieme agli integrandi.

I risultati cui pervengo appaiono definitivi e contengono i recenti teoremi di Dubrovskiĭ [2]) [1, 2] concernenti successioni di integrali di Stieltjes-Lebesgue negli spazi astratti con integrandi equi-limitati e masse, anch'esse variabili, additive in senso completo in campi di Borel.

La notevole generalità dei risultati conseguiti, nonchè la relativa semplicità dei procedimenti di dimostrazione, sono principalmente dovuti al concetto di uniforme additività [3]) intro-

(*) Pervenuta in Redazione il 21 Aprile 1953.

1) Vari sono i metodi di trattazione della teoria dell'integrale di Stieltjes-Lebesgue negli spazi astratti, i cui fondamenti sono stati posti da M. FRÉCHET [1] e da O. NIKODYM [1]. Mi riferisco per questa alla mia Monografia « *Funzioni d' insieme completamente additive ed integrazione negli spazi astratti* ». In corso di stampa a cura dell'Istituto di Matematica dell'Università di Napoli.

2) Non avendo potuto consultare i lavori di questo Autore, per il contenuto di questi e degli altri citati nel presente lavoro mi riferisco alle recensioni apparse in « *Mathematical Reviews* ».

3) Tale locuzione è stata introdotta da DUBROVSKIĬ [3]. Con riferimento a funzioni di punto R. CACCIOPPOLI ha usato quella di « *funzioni uniformemente a variazione limitata* ».

dotto da Caccioppoli [1] e recentemente ritrovato da Dubrovskiî [3].

Tale concetto, che, come ha dimostrato lo stesso Caccioppoli [1], assorbe quello di equi-assoluta continuità di Vitali, si è rivelato essenziale per la risoluzione definitiva del problema in esame.

L'uniforme additività delle funzioni integrali di una successione con integrandi e masse convergenti, è infatti condizione necessaria e sufficiente per il passaggio al limite sotto il segno d' integrale quando questo si voglia assicurare su ogni sotto-insieme misurabile di un prefissato insieme di massa finita o no [N. 10, Teor. 14].

La stessa condizione di uniforme additività, quando le funzioni peso siano supposte non negative ed i limiti minimo e massimo degli integrandi siano sommabili rispetto al limite delle masse, è altresì necessaria e sufficiente per il verificarsi delle limitazioni:

$$\int_I \lim_{n\to\infty}{}' f_n d\varphi \leq \lim_{n\to\infty}{}' \int_I f_n d\varphi_n \leq \lim_{n\to\infty}{}'' \int_I f_n d\varphi_n \leq \int_I \lim_{n\to\infty}{}'' f_n d\varphi ,$$

semprecchè queste si vogliano assicurare su ogni sotto-insieme di un prefissato insieme di massa finita o no [N. 7, Teor. 11].

La prima delle proposizioni enunciate contiene i teoremi, diretto ed inverso, di Vitali [1], nonchè quelli già citati di Dubrovkiî, ed in particolare, con riferimento alla sola sufficienza della condizione posta, dimostra un teorema già da Caccioppoli [1] enunciato per le successioni d'integrali di Stieltjes con funzioni determinanti variabili con gli integrandi [4]).

La seconda proposizione, nella quale l'ipotesi di sommabilità del minimo e massimo limite degli integrandi è essenziale [5]), generalizza e precisa — la necessità della condizione non essendo stata fin oggi osservata — un classico teorema di Lebesgue [1].

---

[4]) Sull'argomento cfr. anche M. NAGUNO [1], H. M. SCHWARTZ [1, 2, 3] e J. C. BURKILL [1] che studiano lo stesso problema in casi particolari.

[5]) Cfr. G. FICHERA [1, p. 14], dove è riportato un semplice esempio di L. AMERIO.

N. 1. - Sia S uno spazio astratto, $\mathfrak{F}$ una famiglia d'insiemi di punti di S, completamente additiva rispetto ad S, $\varphi(I)$ una funzione d'insieme additiva in senso completo in $\mathfrak{F}$.

Ovviamente:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una funzione d'insieme $\varphi(I)$ *definita in* $\mathfrak{F}$, *sia ivi additiva in senso completo, è che sia in* $\mathfrak{F}$ *semplicemente additiva e che si abbia*:

$$\lim_{r \to \infty} \varphi(I_r) = 0$$

per ogni successione $\{ I_r \}$ *d' insiemi di* $\mathfrak{F}$ *avente limite vuoto.*

Infinite funzioni d' insieme additive in senso completo in $\mathfrak{F}$, si diranno quindi *uniformemente additive in* $\mathfrak{F}$, quando, *assegnata comunque una successione* $\{ I_r \}$ *di insiemi di* $\mathfrak{F}$, *avente limite vuoto, in corrispondenza ad ogni* $\varepsilon > 0$, *si lascia determinare un indice* ρ — *dipendente dalla successione* $\{ I_r \}$ *oltre che da* ε — *in modo tale che per ogni funzione* φ *delle infinite considerate risulti* $|\varphi(I_r)| < \varepsilon$ *per* $r > \rho$ [6]).

Osserviamo subito che le funzioni uniformemente additive di una famiglia, godono della seguente proprietà:

a) Data una successione convergente $\{ I_r \}$ *d'insiemi di* $\mathfrak{F}$ *e fissato un numero* $\varepsilon > 0$, *è possibile in corrispondenza determinare un indice* ρ — *dipendente dalla successione data oltre che da* ε — *in guisa tale che per ogni funzione* φ *della famiglia risulti*:

$$|\varphi(I_r) - \varphi(\lim_{r \to \infty} I_r)| < \varepsilon$$

per $r > \rho$.

E' inoltre immediato verificare, quando si tenga presente

---

[6]) E' questa la definizione di uniforme additività data da R. CACCIOPPOLI [1]. Il DUBROVSKIĬ chiama uniformemente additive le funzioni, completamente additive in $\mathfrak{F}$, di una famiglia, quando per ogni successione $\{ I_r \}$ d' insiemi, a due a due privi di punti comuni, si ha:

$$\lim_{r \to \infty} \varphi(I_{r+1} + I_{r+2} + \dots) = 0$$

uniformemente per tutte le funzioni della famiglia considerata.

Circa l'equivalenza di queste due definizioni cfr. F. CAFIERO [1]. In tale Nota, al posto della locuzione « *uniforme additività* » viene usata quella di « *equi-continuità* ».

un notissimo teorema di H. Hahn [1, p. 404] sulla decomposizione di una funzione d'insieme completamente additiva, che:

1. - *Le variazioni inferiori, superiori e totali delle funzioni, uniformemente additive in* $\mathfrak{F}$, *di una famiglia, sono anche esse in* $\mathfrak{F}$ *uniformemente additive.*

N. 2. - Dato un insieme I di $\mathfrak{F}$ indicheremo con $\mathfrak{F}\cdot I$ la famiglia, completamente additiva rispetto al sotto spazio I di S, degli insiemi di $\mathfrak{F}$ contenuti in I.

Ciò posto, sia $\mu(I)$ una funzione d'insieme additiva in senso completo in ognuna delle famiglie della successione $\{\mathfrak{F}\cdot S_r\}$, dove $\{S_r\}$ è una successione crescente d'insiemi di $\mathfrak{F}$ convergente verso S; una tale funzione può ovviamente prolungarsi su ogni insieme I di $\mathfrak{F}$ ponendo:

$$\mu(I) = \lim_{r \to \infty} \mu(IS_r) \ ^{7)}.$$

Orbene, la funzione $\mu(I)$ così prolungata, piglia il nome di *misura* per gli insiemi di $\mathfrak{F}$; lo spazio S, essendovi definita una famiglia completamente additiva d'insiemi, nella quale è stata introdotta una misura $\mu(I)$, sarà da noi detto *mensurale* [8]).

In uno spazio mensurale, una funzione d'insieme additiva in senso completo in $\mathfrak{F}$, dicesi *assolutamente continua* quando è nulla sugli insiemi di misura nulla.

E' noto che:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una funzione d'insieme $\varphi(I)$ *additiva in senso completo in* $\mathfrak{F}$, *sia assolutamente continua nello spazio mensurale* S, *è che, fissato un* $\varepsilon > 0$, *si possa in corrispondenza determinare un insieme* S_ρ *della successione* $\{S_r\}$ *ed un* $\eta > 0$, *in modo tale che risulti* $|\varphi(I)| < \varepsilon$ *per ogni insieme* I *di* $\mathfrak{F}$ *tale che* $\mu(IS_\rho) < \eta$.

Infinite funzioni d'insieme assolutamente continue nello spazio mensurale S, si diranno quindi *equi-assolutamente continue* quando, *fissato un numero* $\varepsilon > 0$, *è possibile in corrispondenza determinare un insieme* S_ρ *della successione* $\{S_r\}$ *ed un*

---

[7]) Naturalmente $\mu(I)$ così prolungata può essere suscettibile di valori infiniti.

[8]) Tale denominazione mi è stata suggerita da R. CACCIOPPOLI.

$\eta > 0$, *in modo tale che per ogni funzione* φ *delle infinite considerate risulti* $|\varphi(I)| < \varepsilon$ *ogni qual volta* I *è un insieme di* $\mathfrak{F}$ *tale che* $\mu(IS_\rho) < \eta$ [9]).

Negli spazi euclidei, l'equi-assoluta continuità degli integrali (intesi nel senso di Lebesgue) di una successione, i cui integrandi siano puntualmente convergenti, è, com'è noto, condizione necessaria e sufficiente per il passaggio al limite sotto il segno d'integrale quando questo si voglia assicurare su ogni sotto-insieme misurabile di un prefissato insieme di misura finita o infinita [10]). Ma una tale condizione perde di significato nel caso generale di funzioni d' insieme additive in senso completo, in particolare, per successioni d' integrali di Stieltjes-Lebesgue con masse variabili, siano questi considerati negli spazi astratti o euclidei.

Soccorre in tali casi più generali il concetto di uniforme additività di Caccioppoli, che, malgrado l'apparente semplicità, assorbe quello di equi-assoluta continuità.

E' infatti evidente che infinite funzioni d' insieme equi-assolutamente continue in un arbitrario spazio mensurale sono anche uniformemente additive e d'altro canto, come lo stesso Caccioppoli [1] ha dimostrato, sussiste la seguente proposizione:

2. - *Infinite funzioni d'insieme uniformemente additive in* $\mathfrak{F}$, *le quali siano assolutamente continue nello spazio mensurale* S, *sono ivi anche equi-assolutamente continue* [11]).

Infine un teorema di Dubrovskiî [4] assicura la possibilità, per ogni famiglia di funzioni d' insieme uniformemente additive,

---

9) Per una tale generalizzazione del concetto di equi-assoluta continuità di Vitali, cfr. R. CACCIOPPOLI [2, p. 28].

10) Nel caso di insiemi d' integrazione di misura finita il teorema è di VITALI [1]; circa la sufficienza della condizione nel caso d'insiemi d' integrazione di misura infinita cfr. R. CACCIOPPOLI [2, p. 28] e M. PICONE [1, p. 131]. L' estensione relativa alla necessità della condizione è dovuta a G. FICHERA [1].

11) Il teorema è stato stabilito da CACCIOPPOLI nell' ipotesi di completa additività in $\mathfrak{F}$ di $\mu(I)$, ma facilmente si estende al caso generale in cui $\mu(I)$ sia in $\mathfrak{F}$ suscettibile di valori infiniti.

Per la dimostrazione di questo teorema e degli altri soltanto enunciati nel presente lavoro, cfr. F. CAFIERO *loc. cit.* in nota 1).

di rendere mensurale lo spazio S in modo tale che le considerate funzioni siano equi-assolutamente continue.

N. 3. - Richiamiamo alcuni noti [12]) teoremi essenziali per il seguito.

3. - *Condizione necessaria e sufficiente affinchè le funzioni, additive in senso completo in* $\mathfrak{F}$, *della successione* $\{\varphi_n(I)\}$, *siano uniformemente additive in* $\mathfrak{F}$ *è che, per ogni successione* $\{I_r\}$ *d'insiemi disgiunti di* $\mathfrak{F}$, *assegnato un* $\varepsilon > 0$, *si possa in corrispondenza determinare un insieme* I_ρ *di* $\{I_r\}$ *ed un indice* ν *in modo tale che risulti* $|\varphi_n(I_\rho)| < \varepsilon$ *per* $n > \nu$.

Dal teorema enunciato può dedursi il seguente:

4. - *Sia* $\{\varphi_n(I)\}$ *una successione di funzioni d'insieme completamente additive in* $\mathfrak{F}$ *e si supponga che in ogni successione* $\{I_r\}$ *d'insiemi disgiunti di* $\mathfrak{F}$, *esista un insieme sul quale la successione converge.*

Le funzioni della data famiglia sono allora uniformemente additive in $\mathfrak{F}$.

Da quest' ultimo, osservando che, com'è evidente, la funzione limite di una successione di funzioni d' insieme uniformemente additive in $\mathfrak{F}$, è ivi additiva in senso completo, discende il seguente, che, una volta acquisito il concetto di uniforme additività di Caccioppoli, può anche facilmente dedursi da una proposizione di S. Saks [1].

5. - *Le funzioni d'insieme, additive in senso completo in* $\mathfrak{F}$, *di una successione* $\{\varphi_n(I)\}$ *convergente su ogni insieme di* $\mathfrak{F}$, *sono uniformemente additive e la funzione limite è ivi additiva in senso completo* [13]).

N. 4. - Dalla convergenza, su ogni insieme di $\mathfrak{F}$, di una successione $\{\varphi_n(I)\}$ di funzioni additive in senso completo in $\mathfrak{F}$, nonostante questa porti alla uniforme additività delle funzioni della considerata successione, non segue in generale quel-

---

[12]) F. CAFIERO [1].

[13]) Tale teorema è stato recentemente ritrovato da V. M. DUBROVSKIĬ.

la uniforme [14]). In proposito, e ciò segue facilmente dalla proprietà a) di cui godono le funzioni uniformemente additive di una famiglia e dall'enunciata proposizione 5, si può asserire che:

6. - *Una successione* $\{\varphi_n(I)\}$ *di funzioni additive in senso completo in* $\mathfrak{F}$, *convergente su ogni insieme di* $\mathfrak{F}$, *tende uniformemente al suo limite su ogni successione convergente d'insiemi di* $\mathfrak{F}$. *In particolare quindi si ha*:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(I) = \varphi(\lim_{n\to\infty} I_n).$$

Nel caso generale sussiste il seguente teorema d'immediata verifica [15]):

7. - *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una successione* $\{\varphi_n(I)\}$ *di funzioni d'insieme additive in senso completo in* $\mathfrak{F}$, *converga ivi uniformemente verso una funzione d'insieme* $\varphi(I)$, *è che la variazione della differenza* $\varphi_n(I) - \varphi(I)$ *tenda a zero su* S *al divergente di* n.

Inoltre, se tale condizione è soddisfatta, risulta:

$$\lim_{n\to\infty} W_1^{(n)}(I) = W_1(I), \quad \lim_{n\to\infty} W_2^{(n)} = W_2(I), \quad \lim_{n\to\infty} V_n(I) = V(I)$$

uniformemente in $\mathfrak{F}$ [15]).

N. 5. - Riprendiamo i simboli e le notazioni introdotte nei numeri precedenti, pertanto S denota uno spazio astratto, $\mathfrak{F}$ una famiglia completamente additiva d'insiemi di punti di S, $\{S_r\}$ una successione crescente d'insiemi di $\mathfrak{F}$ convergente verso S.

Gli insiemi di $\mathfrak{F}$ saranno detti *misurabili* ed una funzione d'insieme $\varphi(I)$ additiva in senso completo in ognuna delle fami-

---

14) Per un semplice esempio dovuto ad A. GHIZZETTI cfr. G. FICHERA [1].

15) Per la dimostrazione cfr. F. CAFIERO *loc. cit.* in nota 1).

Con i simboli $W_1(n)$, $W_2(n)$, V_n abbiamo indicato rispettivamente la variazione superiore inferione e totale di φ_n. Analogo significato hanno W_1, W_2 e V nei riguardi di φ. Tali simboli adotteremo d'ora in poi.

glie della successione $\{\mathfrak{F}\cdot S\}$, sarà detta *funzione peso* o *massa*.

Infine distingueremo gli insiemi appartenenti ad una delle famiglie della successione $\{\mathfrak{F}\cdot S_r\}$ dai generici insiemi misurabili, chiamandoli di *massa finita*.

Ciò posto, passiamo ad occuparci del problema generale del passaggio al limite sotto il segno d' integrale.

In proposito dimostriamo dapprima il seguente teorema:

8. - *Se f è misurabile e limitata in un insieme H di massa finita e la successione $\{\varphi_n\}$ di funzioni peso converge verso zero su ogni insieme di $\mathfrak{F}\cdot H$, risulta:*

$$\lim_{n\to\infty}\int_I f d\varphi_n = 0$$

per ogni insieme I di $\mathfrak{F}\cdot H$.

Indicate al solito con $W_1^{(n)}$, $W_2^{(n)}$ e V_n rispettivamente la variazione superiore, inferiore e totale di $\varphi_n (n = 1, 2, ...)$ e supposto

$$m \leq f \leq M\,,$$

decomponiamo l'intervallo (m, M) mediante la scala di valori

$$(1) \qquad m = a_0 < a_1 < ... < a_{r-1} < a_r < ... < a_{k-1} < a_k = M$$

e poniamo:

$$I_r = I(a_{r-1} \leq f < a_r) \quad \text{per} \quad r = 1, 2, ..., k-1\,; \; I_k = I(a_{k-1} \leq f \leq a_k)$$

$$s_1^{(n)} = \sum_{r=1}^{k} a_{r-1} W_1^{(n)}(I_r), \quad s_2^{(n)} = \sum_{r=1}^{k} a_{r-1} W_2^{(n)}(I_r)\,.$$

Si ha ovviamente:

$$(2) \qquad \lim_{n\to\infty} (s_1^{(n)} - s_2^{(n)}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{k} a_{r-1}\varphi_n(I_r) = 0$$

e, indicato con δ il più grande dei gradini della scala di valori (1), risulta:

$$(3) \quad \int_I f dW_1^{(n)} - s_1^{(n)} \leq \delta W^{(n)}(I), \quad \int_I f dW_2^{(n)} - s_2^{(n)} \leq \delta W_2^{(n)}(I).$$

Osservando che nelle ipotesi del teorema enunciato, in virtù di un teorema[16]) di O. Nikodym [2], le funzioni della successione $\{\varphi_n\}$, e quindi anche quelle della successione $\{V_n\}$ sono uniformemente limitate in $\mathfrak{F}\cdot H$, il nostro asserto è dimostrato in quanto, essendo per le (3):

$$\left|\int_I f d\varphi_n - (s_1^{(n)} - s_2^{(n)})\right| \leq \left|\int_I f d W_1^{(n)} - s_1^{(n)}\right| +$$

$$+\left|\int_I f d W_2^{(n)} - s_2^{(n)}\right| \leq \delta V_n(I),$$

dalla (2) segue che l'integrale di f rispetto a φ_n, esteso ad I si può rendere in modulo piccolo quanto si voglia per n opportunamente grande.

N. 6. - Passiamo ora a stabilire un'altra proposizione, essenziale, come del resto la precedente, per la risoluzione definitiva del problema in esame.

9. - *Sia f_n sommabile in H rispetto a $\varphi_n (n = 1, 2, \ldots)$ e si supponga che la successione $\{f_n\}$ converga verso zero in ogni punto di H e che la successione di funzioni peso $\{\varphi_n\}$ sia limitata su ogni sotto-insieme di H di massa finita.*

Allora, l'uniforme additività in $\mathfrak{F}\cdot H$ delle funzioni integrali delle f_n rispetto alle φ_n, è condizione necessaria e sufficiente affinchè si abbia:

$$\lim_{n\to\infty}\int_I f_n d\varphi_n = 0$$

per ogni insieme I di $\mathfrak{F}\cdot H$.

La necessità della condizione discende dalla proposizione 3; passiamo quindi a dimostrarne la sufficienza.

A tale scopo osserviamo che, in virtù del teorema 1, l'uniforme additività in $\mathfrak{F}\cdot H$ delle funzioni integrali delle f_n rispetto alle φ_n, implica quella delle $|f_n|$ rispetto alle V_n; quindi, data la successione $\{H(S - S_r)\}$ avente limite vuoto e fissato un

---

[16]) L'enunciato del teorema di NIKODYM è il seguente: « *Le funzioni, additive in senso completo in $\mathfrak{F}$, di una successione, sono uniformemente limitate in $\mathfrak{F}$, se equilimitate su ogni insieme di $\mathfrak{F}$* ».

numero $\varepsilon > 0$, è possibile determinare un indice ρ in modo tale che si abbia:

$$\int_{H(S-S_\rho)} |f_n|\, dV_n < \varepsilon . \qquad (n = 1, 2, ...) \tag{4}$$

Essendo inoltre per ipotesi la successione $\{\varphi_n\}$ limitata su ogni insieme di $\mathfrak{F}\cdot HS_\rho$, in virtù del già citato teorema di Nikodym, la successione $\{\varphi_n\}$ è uniformemente limitata in $\mathfrak{F}\cdot HS_\rho$ e però esiste una costante positiva L, tale che:

$$V_n(HS_\rho) < L . \qquad (n = 1, 2, ...) \tag{5}$$

Fissato infine un numero positivo $\eta < \varepsilon/L$, indichiamo con H_ν l'insieme dei punti di HS_ρ, nei quali risulta $|f_n| < \eta$ per $n > \nu$ e determiniamo, ciò che è possibile avendo la successione $\{HS_\rho - H_\nu\}$ limite vuoto, un indice $\bar{\nu}$ in modo tale da avere:

$$\int_{HS_\rho - H_{\bar{\nu}}} |f_n|\, dV_n < \varepsilon . \qquad (n = 1, 2, ...) \tag{6}$$

Dalle (4), (5) e (6) segue l'asserto, in quanto per $n > \bar{\nu}$ risulta:

$$\int_H |f_n|\, dV_n = \int_{H(S-S_\rho)} |f_n|\, dV_n + \int_{HS_\rho - H_{\bar{\nu}}} |f_n|\, dV_n + \int_{H_{\bar{\nu}}} |f_n|\, dV_n < 3\varepsilon .$$

Si osservi che nella dimostrazione testè fatta, in virtù della proposizione 7, è implicita la seguente proposizione che maggiormente precisa la precedente:

10. - *Sia f_n sommabile in H rispetto a φ_n $(n = 1, 2, ...)$ e si supponga che la successione $\{f_n\}$ converga verso zero in ogni punto di H e che la successione $\{\varphi_n\}$ di funzioni peso sia limitata su ogni sotto-insieme di H di massa finita.*

Allora, l'uniforme additività in $\mathfrak{F}\cdot H$ delle funzioni integrali delle f_n rispetto alle φ_n, è condizione (necessaria e) sufficiente affinchè si abbia:

$$\lim_{n\to\infty} \int_H |f_n|\, dV_n = 0$$

o, ciò che è lo stesso,

$$\lim_{n \to \infty} \int_I f_n d\varphi_n = 0$$

uniformemente al variare di I in $\mathfrak{F} \cdot H$.

N. 7. - Siamo ora in grado di dimostrare il seguente teorema che precisa e generalizza un notevole teorema di Lebesgue [1, p. 375] anche nella forma più generale dovuta a T. Viola [17]).

11. - *Sia f_n sommabile in H rispetto a φ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ e si supponga che la successione $\{\varphi_n\}$, di funzioni peso non negative, converga verso φ su ogni sotto-insieme di H di massa finita e che la successione $\{f_n\}$, puntualmente limitata in H, sia dotata di minimo e massimo limite sommabili in H rispetto a φ* [18]).

Allora l'uniforme additività nella famiglia dei sotto insiemi misurabili di H delle funzioni integrali delle f_n rispetto a φ_n, è condizione necessaria e sufficiente affinchè risulti:

$$\int_I \lim_{n \to \infty}{}' f_n d\varphi \leq \lim_{n \to \infty}{}' \int_I f_n d\varphi_n \leq \lim_{n \to \infty}{}'' \int_I f_n d\varphi_n \leq \int_I \lim_{n \to \infty}{}'' f_n d\varphi \tag{7}$$

per ogni sotto-insieme I misurabile di H.

La necessità della condizione consegue dall'acquisito teorema 3.

Data infatti un'arbitraria successione $\{I_r\}$ d'insiemi disgiunti di $\mathfrak{F} \cdot H$ e fissato un numero $\varepsilon > 0$, è possibile determinare un indice ρ in modo tale che risulti:

$$\int_{I_\rho} |\lim{}' f_n| \, d\varphi < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \int_{I_\rho} |\lim{}'' f_n| \, d\varphi < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{8}$$

Fissato I_ρ ed ε è inoltre possibile determinare un indice ν in guisa tale che si abbia:

$$\lim_{n \to \infty}{}' \int_{I_\rho} f_n d\varphi_n - \frac{\varepsilon}{2} \leq \int_{I_\rho} f_n d\varphi_n \leq \lim_{n \to \infty}{}'' \int_{I_\rho} f_n d\varphi_n + \frac{\varepsilon}{2} \tag{9}$$

per $n > \nu$.

---

17) Cfr. M. PICONE e T. VIOLA [1, p. 199].

18) Notisi che φ, in virtù del teorema 5, è una massa.

Dalle (7), (8) e (9) discende allora:

$$\left|\int_{I_\rho} f_n d\varphi_n\right| < \varepsilon \tag{10}$$

per $n > \nu$.

Data quindi una successione $\{I_r\}$ d'insiemi disgiunti di $\mathfrak{F}\cdot H$ e fissato un numero $\varepsilon > 0$, possono sempre in corrispondenza determinarsi un insieme I_ρ della successione $\{I_r\}$ ed un indice ν, in modo tale che risulti verificata la (10) per $n > \nu$. E ciò, in forza del teorema 3, prova appunto l'uniforme additività in $\mathfrak{F}\cdot H$ delle funzioni integrali delle f_n rispetto alle φ_n.

La necessità della condizione essendo provata, passiamo a dimostrarne la sufficienza.

A tale scopo, data la successione $\{H - HS_r\}$, avente limite vuoto, e fissato un numero $\varepsilon > 0$, determiniamo, ciò che è possibile implicando la supposta uniforme additività in $\mathfrak{F}\cdot H$ delle funzioni integrali delle f_n rispetto alle φ_n quella delle rispettive variazioni totali [proposizione 1], un indice ρ in modo tale da avere:

$$\int_{H-HS_\rho} |f''|d\varphi < \varepsilon\,, \quad \int_{H-HS_\rho} |f_n|d\varphi_n < \varepsilon \qquad \text{per} \quad n = 1, 2, \ldots \tag{11}$$

Essendo, per ipotesi, il limite massimo della successione $\{f_n\}$, che abbiano indicato con f'', finito, detto H_k l'insieme dei punti di HS_ρ nei quali $|f''| < k$, la successione d'insiemi di $\mathfrak{F}\cdot H$, $\{HS_\rho - H_k\}$, ha limite vuoto e quindi, fissato ε, può determinarsi un indice $\bar{k}$ in modo tale da avere:

$$\int_{HS_\rho - H_{\bar{k}}} |f''|\, d\varphi < \varepsilon\,, \quad \int_{HS_\rho - H_{\bar{k}}} |f_n|\, d\varphi_n < \varepsilon \quad \text{per} \quad n = 1, 2, \ldots \tag{12}$$

Posto poi:

$$g_n = \text{estr. sup. } [f_n\,,\ f_{n+1} \ldots]$$

si ha:

$$\lim_{n \to \infty} g_n = f''$$

in ogni punto di H, e quindi, detto $H_{\bar{k}}^{(\nu)}$ l'insieme dei punti di $H_{\bar{k}}$ nei quali $|g_n - f''| < \varepsilon$ per $n > \nu$, la successione $\{H_{\bar{k}} - H_{\bar{k}}^{(\nu)}\}$ d'insiemi di $\mathfrak{F}\cdot H$ ha limite vuoto; fissato ε si può allora determinare un indice $\bar{\nu}$ in modo tale da avere:

$$(13)\qquad \int\limits_{H_{\bar{k}}-H_{\bar{k}}^{(\bar{\nu})}} |f''|\,d\varphi < \varepsilon, \quad \int\limits_{H_{\bar{k}}-H_{\bar{k}}^{(\bar{\nu})}} |f_n|\,d\varphi_n < \varepsilon \quad \text{per } n = 1, 2, \ldots$$

In virtù del teorema 4 le funzioni della successione $\{\varphi_n\}$, che per ipotesi converge su ogni sotto-insieme di H di massa finita, sono uniformemente additive nella famiglia dei sotto-insiemi misurabili di $H_{\bar{k}}^{(\bar{\nu})}$. Quindi essendo:

$$\int\limits_I |g_n - f''|\,d\varphi_n < \varepsilon\varphi_n(I) \qquad (n > \bar{\nu})$$

per ogni insieme I di $\mathfrak{F}\cdot H_{\bar{k}}^{(\bar{\nu})}$, le funzioni integrali delle $(g_n - f'')$ rispetto a φ_n sono uniformemente additive nella famiglia dei sotto-insiemi misurabili di $H_{\bar{k}}^{(\bar{\nu})}$.

Ma allora, osservando che risulta:

$$\int\limits_{H_{\bar{k}}^{(\bar{\nu})}} g_n d\varphi_n - \int\limits_{H_{\bar{k}}^{(\bar{\nu})}} f'' d\varphi = \int\limits_{H_{\bar{k}}^{(\bar{\nu})}} (g_n - f'')d\varphi_n + \int\limits_{H_{\bar{k}}^{(\bar{\nu})}} f'' d(\varphi_n - \varphi) \qquad (n > \bar{\nu})$$

e tenendo presente che le successioni $\{g_n - f''\}$ e $\{\varphi_n - \varphi\}$ convergono verso zero rispettivamente in $H_{\bar{k}}^{(\bar{\nu})}$ e in $\mathfrak{F}\cdot H_{\bar{k}}^{(\bar{\nu})}$, poichè f'' è limitata in $H_{\bar{k}}^{(\bar{\nu})}$, dai teoremi 9 ed 8 consegue:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{H_{\bar{k}}^{(\bar{\nu})}} g_n d\varphi_n = \int\limits_{H_{\bar{k}}^{(\bar{\nu})}} f'' d\varphi .$$

Si può quindi, fissato ε, determinare un indice n_0 in modo tale che per $n > n_0$ risulti:

$$(14)\qquad \int\limits_{H_{\bar{k}}^{(\bar{\nu})}} g_n d\varphi_n < \int\limits_{H_{\bar{k}}^{(\bar{\nu})}} f'' d\varphi + \varepsilon$$

Dalle (11), (12), (13) e (14) segue:

$$\int_H f_n d\varphi_n < \int_{H_{\bar{k}}^{(\bar{\nu})}} f_n d\varphi_n + 3\varepsilon \leq \int_{H_{\bar{k}}^{(\bar{\nu})}} g_n d\varphi_n + 3\varepsilon < \int_{H_{\bar{k}}^{(\bar{\nu})}} f'' d\varphi + 4\varepsilon$$

per $n > n_0$, nonchè

$$\int_{H_{\bar{k}}^{(\bar{\nu})}} f'' d\varphi < \int_H f'' d\varphi + 3\varepsilon .$$

Si ha quindi:

$$\int_I f_n d\varphi_n < \int_I f'' d\varphi + 7\varepsilon \qquad \text{per} \qquad n > n_0$$

e da quest'ultima limitazione, essendo ε arbitrario, segue come volevasi:

$$\lim_{n \to \infty}'' \int_I f_n d\varphi_n \leq \int_I \lim_{n \to \infty}'' f_n d\varphi .$$

In base all' acquisita precedente limitazione si può altresì asserire che:

$$\lim_{u \to \infty}'' \int_I (- f_n) d\varphi_n \leq \int_I \lim_{n \to \infty}'' (- f_n) d\varphi , \tag{15}$$

e quindi, essendo:

$$\lim_{n \to \infty}'' \int_I (- f_n)\, d\varphi_n = - \lim_{n \to \infty}' \int_I f_n d\varphi_n$$

$$\lim_{n \to \infty}'' (- f_n) = - \lim_{n \to \infty}' f_n ,$$

dalla (15) discende:

$$\int_I \lim_{n \to \infty}' f_n d\varphi \leq \lim_{n \to \infty}' \int_I f_n d\varphi_n$$

ed il teorema è completamente dimostrato.

N. 8. - Il teorema dimostrato nel numero precedente risolve in particolare il problema del passaggio al limite sotto il segno d'integrale per successioni di integrali di Stieltjes-Lebesgue i cui integrandi siano puntualmente convergenti e le cui masse, supposte non negative, convergano su ogni sotto-insieme di massa finita di un prefissato insieme misurabile, risultando in tal caso la condizione di uniforme additività delle funzioni integrali della successione, necessaria e sufficiente per il passaggio al limite sotto il segno d'integrale, sempreché, questo si voglia assicurare su ogni sotto-insieme misurabile dell'insieme prefissato ed il limite degli integrandi sia supposto sommabile rispetto al limite delle masse. Ma tale condizione restrittiva, insieme a quella sul segno delle masse, previo una ulteriore e più approfondita analisi del problema in esame, si palesa inessenziale.

All'uopo stabiliamo dapprima il seguente teorema:

12. - *Sia f_n sommabile in H rispetto a φ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ e si supponga che la successione $\{f_n\}$ converga in ogni punto di H verso f e la successione di funzioni peso $\{\varphi_n\}$ converga verso φ su ogni sotto-insieme di H di massa finita.*

Allora se la successione delle funzioni integrali delle f_n rispetto alle φ_n è limitata su ogni insieme di $\mathfrak{F} \cdot H$, la funzione f è sommabile in H rispetto a φ [19]).

Fissato un intero positivo k, indichiamo con $H_{r}^{(k)}$ l'insieme dei punti di HS_r, nei quali è $|f| < k$, con $H_{r,\nu}^{(k)}$ l'insieme dei punti di $H_r^{(k)}$, nei quali risulta $|f_n - f| < \varepsilon$ per $n > \nu$.

Ovviamente:

$$\lim_{\nu \to \infty} H_{r,\nu}^{(k)} = H_r^{(k)} . \qquad (r = 1, 2, \ldots; k = 1, 2, \ldots) \tag{16}$$

Essendo inoltre, in virtù del teorema 5, $\varphi(I)$ additiva in senso completo nella famiglia dei sotto-insiemi misurabili di HS_r $(r = 1, 2, \ldots)$, ha senso parlare d'integrale di f rispetto a φ esteso ad un arbitrario sotto-insieme misurabile di $H_r^{(k)}$ $(r = 1, 2, \ldots; k = 1, 2, \ldots)$ e per la (16) si ha:

$$\lim_{\nu \to \infty} \int_{H_{r,\nu}^{(k)}} |f| \, dV = \int_{H_r^{(k)}} |f| \, dV . \qquad (r = 1, 2, \ldots; k = 1, 2, \ldots) \tag{17}$$

---

[19]) Cfr. nota [18]).

Osserviamo inoltre che in forza dello stesso teorema 5 e della proposizione 1, le funzioni d'insieme della successione $\{\varphi_n\}$, nonchè quelle della successione $\{V_n\}$, sono, per ogni r, uniformemente additive nella famiglia dei sotto-insiemi misurabili di $H \cdot S_r$, e quindi, risultando:

$$\int_I |f_n - f| \, dV_n < \varepsilon V_n(I)$$

per $n > \nu$ e per ogni sotto-insieme I di $H_{r,\nu}^{(k)}$, le funzioni integrali delle $(f_n - f)$ rispetto alle φ_n sono uniformemente additive nella famiglia dei sotto-insiemi misurabili di $H_{r,\nu}^{(k)}$. Ma allora, essendo:

$$\int_I f_n d\varphi_n - \int_I f d\varphi = \int_I (f_n - f) d\varphi_n + \int_I f d(\varphi_n - \varphi)$$

per ogni sotto-insieme misurabile I di $H_{r,\nu}^{(k)}$, in virtù dei teoremi 8 e 9 risulta:

$$\lim_{n \to \infty} \int_I f_n \; \varphi_n = \int_I f d\varphi \tag{18}$$

per ogni sotto-insieme I misurabile di $H_{r,\nu}^{(k)}$.

Poichè nelle ipotesi del teorema enunciato, in forza del già citato teorema di O. Nicodym [2], le funzioni integrali delle f_n rispetto alle φ_n sono uniformemente limitate in $\mathfrak{F} \cdot H$, per la (18) risulta:

$$\left| \int_I f d\varphi \right| < L$$

per ogni sotto insieme misurabile I di $H_{r,\nu}^{(k)}$, e però anche:

$$\int_{H_{r,\nu}^{(k)}} |f| dV < 2L$$

con L indipendente da ν, k ed r.

Dalla soprascritta limitazione, per la (17), segue:

$$\int_{H_r^{(k)}} |f| dV \leq 2L$$

con L indipendente da k e da r, e quindi la f è sommabile in H rispetto a φ.

N. 9. - Allo scopo di stabilire la sommabilità del limite degli integrandi rispetto alla funzione peso limite per le successioni di funzioni integrali uniformemente additive, in virtù della proposizione acquisita nel numero precedente, basta dimostrare che:

13. - *Le funzioni integrali della successione:*

$$\left\{ \int_I f_n d\varphi_n \right\} \tag{19}$$

definite nella famiglia dei sotto-insiemi misurabili di H, i cui integrandi siano in ogni punto di H definitivamente equi-limitati e le cui funzioni peso siano equi-limitate su ogni sotto-insieme di H di massa finita, sono uniformemente limitate nella famiglia dei sotto-insiemi misurabili di H se ivi sono uniformemente additive.

Poichè l'uniforme additività delle funzioni integrali della successione (19) implica quella delle funzioni integrali delle $|f_n|$ rispetto alle V_n, data la successione $\{ H(S - S_r) \}$, avente limite vuoto, e fissato un $\varepsilon > 0$, è possibile determinare un indice ρ in guisa che risulti:

$$\int_{H(S-S_\rho)} | f_n | \, dV_n < \varepsilon . \qquad (n = 1, 2, ...)$$

Per dimostrare quanto asserito basta allora far vedere che la successione:

$$\left\{ \int_{HS_\rho} | f_n | \, dV_n \right\} \tag{20}$$

è limitata.

Ciò è pressochè immediato, in quanto, supposto, com'è lecito senza ledere la generalità, che le f_n siano finite in H ed indicato con I_k il sotto-insieme misurabile di HS_ρ in cui è, per ogni n, $|f_n| < K$, poichè la successione $\{ HS_\rho - I_k \}$ ha, nelle ipotesi del teorema enunciato, limite vuoto, è possibile, fissato un $\varepsilon > 0$, determinare un indice $\bar{k}$ in modo tale che risulti:

$$\int_{HS_\rho - I_{\bar{k}}} | f_n | \, dV_n < \varepsilon . \qquad (n = 1, 2, ...) \tag{21}$$

Osservando anche qui che in virtù del teorema di O. Nikodym più volte citato le funzioni della successione $\{ \varphi_n \}$ e quindi anche quelle della successione $\{ V_n(I) \}$, sono uniformemente limitate nella famiglia dei sotto-insiemi misurabili di HS_ρ, dalla (21) segue la limitatezza della successione (20), in quanto evidentemente si ha:

$$\int_{HS_\rho} | f_n | \, dV_n = \int_{I_{\bar{k}}} | f_n | \, dV_n + \int_{HS_\rho - I_{\bar{k}}} | f_n | \, dV_n \leq \bar{k} \, V_n(I_{\bar{k}}) + \varepsilon .$$

per ogni n.

N. 10. - Siamo ora in grado di dimostrare il seguente teorema che assorbe quelli noti sull'argomento:

14. - *L'uniforme additività in* $\mathfrak{F} \cdot H$ *delle funzioni integrali della successione*:

$$\left\{ \int_I f_n d\varphi_n \right\}, \tag{22}$$

i cui integrandi siano in H *puntualmente convergenti verso* f *e le cui funzioni peso convergano verso* φ *su ogni sotto-insieme di* H *di massa finita, è condizione necessaria e sufficiente affinchè risulti*:

$$\lim_{n \to \infty} \int_I f_n d\varphi_n = \int_I f d\varphi$$

per ogni sotto-insieme I *misurabile di* H.

Che la condizione sia necessaria segue dal teorema 4 o 5; passiamo quindi a dimostrarne la sufficienza.

A tale scopo osserviamo dapprima che in virtù delle proposizioni 12 e 13, la funzione f è sommabile in H rispetto a φ.

Quindi, detto I un sotto-insieme misurabile di H e data la successione $\{ I(S - S_r) \}$ avente limite vuoto, per la supposta uniforme additività in $\mathfrak{F}\cdot H$ delle funzioni integrali (22), fissato un numero $\varepsilon > 0$, è possibile determinare un indice ρ in modo tale da avere:

$$(23) \qquad \left| \int_{I(S-S_\rho)} f_n d\varphi_n - \int_{I(S-S_\rho)} f d\varphi \right| < \varepsilon . \qquad (n = 1, 2, ...)$$

Fissato S_ρ ed indicato con I_k l'insieme dei punti di IS_ρ nei quali è $|f| < k$, poichè la successione $\{ IS_\rho - I_k \}$ ha limite vuoto, determiniamo l'indice $\bar{k}$ in modo tale che per ogni n risulti:

$$(24) \qquad \left| \int_{IS_\rho - I_{\bar{k}}} f_n d\varphi_n - \int_{IS_\rho - I_{\bar{k}}} f d\varphi \right| < \varepsilon . \qquad (n = 1, 2, ...)$$

Infine, fissato $I_{\bar{k}}$, dimostriamo che è possibile determinare un indice ν in modo tale da avere:

$$(25) \qquad \left| \int_{I_{\bar{k}}} f_n d\varphi_n - \int_{I_{\bar{k}}} f d\varphi \right| < \varepsilon$$

per $n > \nu$.

Ciò è immediata conseguenza delle proposizioni 8 e 9, in quanto, essendo:

$$\int_{I_{\bar{k}}} f_n d\varphi_n - \int_{I_{\bar{k}}} f d\varphi = \int_{I_{\bar{k}}} (f_n - f) d\varphi_n + \int_{I_{\bar{k}}} f d(\varphi_n - \varphi) ,$$

in virtù delle citate proposizioni [20]), consegue:

$$\lim_{n \to \infty} \int_{I_{\bar{k}}} f_n d\varphi_n = \int_{I_{\bar{k}}} f d\varphi .$$

---

[20]) Si osservi che le funzioni integrali della successione:

$$\left\{ \int_I f d\varphi_n \right\}$$

sono uniformemente additive in $\mathfrak{F}\cdot I_k$ e che ciò implica, nelle ipotesi del teorema enunciato, l'uniforme additività in $\mathfrak{F}\cdot I_k$ delle funzioni $(f_n - f)$ rispetto alle φ_n .

Per le (23), (24) e (25) si ha allora:

$$\left| \int_I f_n d\varphi_n - \int_I f d\varphi \right| < 3\,\varepsilon$$

per $n > \nu$.

Il teorema enunciato è così completamente dimostrato.

Si osservi che in virtù della proposizione 6 si può altresì asserire che nelle ipotesi del teorema 14 risulta:

$$\lim_{n \to \infty} \int_{I_n} f_n d\varphi_n = \int_I f d\varphi \qquad (\lim_{n \to \infty} I_n = I)$$

per ogni successione $\{ I_n \}$ convergente di sotto-insiemi misurabili di H.

N. 11. - Nel teorema di Vitali relativo al passaggio al limite sotto il segno d'integrale, gli integrandi possono supporsi convergenti quasi-ovunque o, per una osservazione essenzialmente dovuta a Lebesgue [2], in misura [21]).

Orbene, una tale maggiore generalità di enunciati si può ottenere anche nel caso generale da noi preso in esame.

All'uopo, indicata al solito con V_n la variazione totale di φ_n $(n = 1, 2, ...)$, poniamo:

$$\mu_r(I) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_n(I)}{2^n [V_n(S_r - S_{r-1}) + 1]} \qquad (S_0 = 0;\ r = 1, 2, ...)$$

per ogni sotto-insieme I misurabile di $(S_r - S_{r-1})$.

La funzione d'insieme $\mu_r(I)$ è ovviamente additiva in senso completo nella famiglia dei sotto-insiemi misurabili di $(S_r - S_{r-1})$ e pertanto, posto:

$$\mu(I) = \sum_{r=1}^{\infty} \mu_r[I(S_r - S_{r-1})], \tag{26}$$

la funzione d'insieme $\mu(I)$ è additiva in senso completo in ognuna delle famiglie della successione $\{ \mathfrak{F} \cdot S_r \}$ e quindi rappresenta una misura definita in $\mathfrak{F}$.

Reso mensurale lo spazio S introducendo in $\mathfrak{F}$ la misura

---

21) Cfr. anche G. FICHERA [1], M. PICONE e T. VIOLA [1, p. 192].

$\mu(I)$, le funzioni integrali della successione (22) sono, nello spazio S così reso mensurale, assolutamente continue e quindi il teorema 14 continua a sussistere quando la successione degli integrandi si suppone convergente quasi-ovunque in H (naturalmente rispetto a μ).

Acquisito un tale più generale risultato, in virtù di un noto teorema di F. RIESZ relativo alla possibilità di estrarre da ogni successione convergente in misura, una successione convergente quasi-ovunque, facilmente si dimostra la validità del teorema 14 nell' ipotesi che la successione degli integrandi converga in H in misura verso la funzione misurabile f.

Si noti che essendo, come abbiamo già osservato, le funzioni integrali della successione (22) assolutamente continue nello spazio mensurale S, in virtù del teorema 2 di Caccioppoli, la condizione di uniforme additività delle predette funzioni integrali implica quella di equi-assoluta continuità delle stesse nel considerato spazio mensurale.

Pertanto, senza ledere la generalità, il problema del passaggio al limite sotto il segno d'integrale, anche nel caso generale da noi preso in esame, si potrebbe affrontare in base al concetto di equi-assoluta continuità, la misura essendo, per ogni successione di masse, fornita dalla (26). Ma la trattazione ne verrebbe notevolmente appesantita e gli enunciati apparirebbero significativi solo mercè il concetto di uniforme additività.

BIBLIOGRAFIA

BURKILL, J. G.

[1] *Differential properties of Young-Stieltjes integrals.* J. London Math. Soc. **23**, 22-28 (1948).

CACCIOPPOLI, R.

[1] *Integrali impropri di Stieltjes. Estensione del teorema di Vitali.* Rend. Acc. Sc. Fis. Mat. Napoli, (4) **35** (1929).

[2] *Sull'integrazione delle funzioni discontinue.* Rend. Circ. Mat. Palermo, **52**, 1-29 (1928).

CAFIERO, F.

[1] *Sulle famiglie di funzioni additive d'insieme uniformemente continue.* Rend. Acc. Naz. Lincei (8) **12**, 155-162 (1952).

DUBROVSKII, V. M.

[1] *Su alcune proprietà delle funzioni completamente additive d' insieme e sul passaggio al limite sotto il segno d' integrale.* Bull. Acad. Sci. URSS, Ser. Math. [Izvestia Akad. Nauk SSSR], **9**, 311-320 (1945) (in russo).

[2] *Osservazioni sulla mia Nota « Su alcune proprietà delle funzioni completamente additive d' insieme e sul passaggio al limite sotto il segno d' integrale ».* Ibidem ***11***, 101-104 (1947) (in russo).

[3] *Su alcune proprietà delle funzioni completamente additive d' insieme e loro applicazione alla generalizzazione di un teorema di Lebesgue.* Rec. Math. [Mat. Sbornik] N. S. (62) **20**, 317-329 (1947) (in russo).

[4] *Sulla base di una famiglia di funzioni completamente additive di insieme e sulle proprietà di additività uniforme e di equi-continuità.* Doklady Akad. SSSR (N. S.), **58**, 737-740 (1947) (in russo).

FICHERA, G.

[1] *Intorno al passaggio al limite sotto il segno d' integrale.* Portugoliae Mathematica **4** (1943).

FRECHET, M.

[1] *Sur l' intégrale d' une fonctionelle étendue à un ensemble abstrait.* Bull. Math. de France, **43**, 248-265 (1915).

HAHN, H.

[1] *Theorie der reellen Funktionen* - I band, Berlin 1921.

LEBESGUE, H.

[1] *Sur l' intégration des fonctions discontinues.* Ann. Ecole Normale (3) **27**, 361-450 (1910).

[2] *Sur les intégrales singulières.* Ann. Fac. Sc. Univ. Toulouse (3) **1**, 25-117 (1909).

NAGUMO, M.

[1] *Über die Konvergenz der Integrale der Funktionenfolgen und ihre Anwendung auf das gewöhnliche Differentialgleichungssystem.* Japanese Journal of Mathematics, **5**, No 1, 97-125 (1928).

NIKODYM, O.

[1] *Sur une généralisation des intégrales de M. Radon.* Fund. Math. **15**, 131-179 (1930).

[2] *Sur les suites convergentes de fonctions parfaitement additives d'ensemble abstrait.* Monatshefte für Mathematik und Physik, **40**, 427-432 (1933).

PICONE, M.

[1] *Teoria dell' integrazione Lebesguiana.* Lezioni del corso di Analisi superiore raccolte dal prof. A. Ghizzetti. D.U.S.A., Roma (1941).

PICONE, M e T. VIOLA

[1] *Lezioni sulla teoria moderna dell'integrazione.* Ed. Scientifiche Einaudi (1952).

SCHWARTZ, H. M.

[1] *Sequences of Stieltjes integrals.* Bull. Amer. Mat. Soc. **47**, 947-955 (1941).

[2] *Sequences of Stieltjes integrals.* II. Duke Math. J. **10**, 13-22 (1943).

[3] *Sequences of Stieltjes integrals.* III. Ibidem, **10**, 595-610 (1943).

VITALI, G.

[1] *Sull' integrazione per serie.* Rend. Circ. Mat. Palermo, **23**, 137-155 (1907).