RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GABRIELE DARBO

Sulle condizioni sufficienti per la continuità di un integrale

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 22 (1953), p. 134-142

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1953__22__134_0>

SULLE CONDIZIONI SUFFICIENTI PER LA CONTINUITÀ DI UN INTEGRALE

Nota (*) *di* GABRIELE DARBO (*a Padova*)

E' noto [1]) che se $Q(x, y)$ è una funzione continua assieme alla derivata $Q_x(x, y)$ in un rettangolo $R \equiv \{a \leq x \leq b\, ;\, y_1 \leq y \leq y_2\}$, l' integrale

$$I[y(x)] = \int_a^b Q(x,\ y(x)) y'(x) dx$$

è *continuo* nella classe $\mathfrak{K}$ delle funzioni $y(x)$ assolutamente continue in $a \vdash\!\dashv b$ e tali che $y_1 \leq y(x) \leq y_2$.

S. Faedo [2]) ha dimostrato che la continuità (anche uniforme) sussiste ancora se si suppone la $Q(x, y)$ uniformemente lipschitziana rispetto ad x e se ne serve poi per dare delle condizioni sufficienti per la continuità di integrali del tipo di Fubini-Tonelli.

In questa nota, limitandoci a campi rettangolari dimostreremo i seguenti teoremi:

TEOREMA I. — *Se $Q(x, y)$ è una funzione quasi continua nel rettangolo $R \equiv \{a \leq x \leq b\, ;\, y_1 \leq y \leq y_2\}$ e tale che esistano una funzione $F(x)$ monotona in $a \vdash\!\dashv b$ e una $\varphi(y)$ sommabile in $y_1 \vdash\!\dashv y_2$, tali che per ogni coppia (x', y) e (x'', y) di R si abbia*

$$(1) \qquad |Q(x',\ y) - Q(x'',\ y)| \leq |F(x') - F(x'')|\varphi(y)$$

(*) Pervenuta in Redazione il 23 gennaio 1953.

1) L. TONELLI: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, I Vol. pag. 385-392.

2) S. FAEDO: *Un nuovo tipo di funzionali continui*, [Rend. di matem. e delle sue appl., Serie 5, pp. 223-249] pag. 228.

e se $y(x)$ è una qualunque funzione della classe $\mathcal{K}$, $Q(x, y(x))\cdot$ $\cdot y'(x)$ è quasi continua in $a \vdash\!\dashv b$.

TEOREMA II. — *Se $Q(x, y)$ è inoltre limitata in R, $Q(x, y(x))y'(x)$ è sommabile e l'integrale*

$$I[y(x)] = \int_a^b Q(x, y(x))y'(x)dx$$

è uniformemente continuo nella classe $\mathcal{K}$; sussiste, cioè, la relazione

$$|I[y(x)] - I[\bar{y}(x)]| \leq \theta(\rho)$$

per ogni coppia di funzioni $y(x)$ e $\bar{y}(x)$ di $\mathcal{K}$, dove $\rho = \max_{a \leq x \leq b} |y(x) - \bar{y}(x)|$ e $\theta(\rho)$ è infinitesimo con ρ.

1. - UN LEMMA PRELIMINARE. — Sia $y(x)$ assolutamente continua in $a \vdash\!\dashv b$; $\mathcal{H}$ l'insieme dei punti di $a \vdash\!\dashv b$ nei quali $y(x)$ non è derivabile o ha derivata nulla; $E(\Delta)$ l'insieme dei punti $x \varepsilon a \vdash\!\dashv b$ tali che $y(x) \varepsilon \Delta$ essendo Δ un insieme aperto *variabile* sull'asse y. Allora risulta

$$|E(\Delta) - \mathcal{H}| \to 0 \quad \text{uniformemente per} \quad |\Delta| \to 0\ ;\ ^{3})$$

vale a dire, per ogni ε positivo esiste un $\sigma > 0$, tale che $|E(\Delta) - \mathcal{H}| < \varepsilon$ quando è $|\Delta| < \sigma$.

Prendiamo le mosse dalla seguente relazione, conseguenza di un teorema di L. Cesari [4]),

$$\int_{\Delta} N(y)dy = \int_{E(\Delta)} |y'(x)|dx\,, \tag{2}$$

dove $N(Y)$ è il numero di soluzioni dell'equazione $y(x) = Y$ contenute in $a \vdash\!\dashv b$.

Per ogni intero n positivo, indichiamo con $\mathcal{E}_n$ l'insieme dei punti x di $a \vdash\!\dashv b$ in cui è $|y'(x)| > \frac{1}{n}$ e poniamo

---

[3]) Se D è un insieme misurabile, indichiamo con $|D|$ la misura D.

[4]) L. CESARI: *Funzioni continue a variazione limitata in un insieme* [R. Acc. delle Sc. dell'Ist. di Bologna (1945) serie X, tomo II] pag. 143, Teorema V.

$\mathcal{T}_n = E(\Delta)\cdot \mathcal{E}_n$, $\mathcal{H}_n = a \vdash\!\dashv b - \mathcal{E}_n$. Allora è

$$E(\Delta) \subset \mathcal{H}_n + \mathcal{E}_n \tag{3}$$

e

$$\lim_{n\to\infty} |\mathcal{H}_n - \mathcal{H}| = 0 .$$

Dato quindi ε positivo ad arbitrio, potremo determinare un intero ν tale che sia

$$|\mathcal{H}_\nu - \mathcal{H}| < \frac{\varepsilon}{2} . \tag{4}$$

Dalla (2) segue inoltre che

$$\int_{E(\Delta)} |y'(x)|\,dx$$

è funzione assolutamente continua di Δ; quindi è possibile determinare un $\sigma > 0$, tale che, per ogni insieme aperto Δ con $|\Delta| < \sigma$, si abbia

$$\int_{E(\Delta)} |y'(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{2\nu} . \tag{5}$$

Ma abbiamo pure

$$\int_{E(\Delta)} |y'(x)|\,dx \geq \int_{\mathcal{T}_\nu} |y'(x)|\,dx \geq \frac{1}{\nu} |\mathcal{T}_\nu| ,$$

che, assieme alla (4) ci dà

$$|\mathcal{T}_\nu| < \frac{\varepsilon}{2} ; \tag{6}$$

e quindi dalle (3), (4), (5), (6) si trae

$$|E(\Delta) - \mathcal{H}| \leq |\mathcal{T}_\nu| + |\mathcal{H}_\nu - \mathcal{H}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

2. - DIMOSTRAZIONE DEL PRIMO TEOREMA. — $Q(x, y)$ è quasi continua in R; esiste perciò un insieme $\mathfrak{N} \subset a \vdash\!\dashv b$ numerabile e denso in $a \vdash\!\dashv b$, tale che per ogni $\bar{x} \in \mathfrak{N}$ sia $Q(\bar{x}, y)$ quasi continua rispetto ad y in $y_1 \vdash\!\dashv y_2$. Potremo supporre pure che $\mathfrak{N}$ non contenga punti di discontinuità per la $F(x)$, che per ipotesi è monotona.

Allora, essendo $\mathfrak{N}$ numerabile, potremo, in corrispondenza ad un $\sigma > 0$, determinare un insieme aperto Δ, con $|\Delta| < \sigma$, tale che $Q(\bar{x},\ y)$ risulti per ogni $\bar{x} \varepsilon \mathfrak{M}$ continua in y su $y_1 \vdash\!\dashv y_2 - \Delta$, e in modo che in $y_1 \vdash\!\dashv y_2 - \Delta$ la $\varphi(y)$ sia limitata. Per un H opportuno sarà dunque $\varphi(y) \leq H$ in $y_1 \vdash\!\dashv y_2 - \Delta$.

Per le ipotesi fatte avremo

$$(7) \qquad |Q(x,y) - Q(x_0,y)| \leq |F(x) - F(x_0)| \cdot H\,,$$

quando $y \varepsilon y_1 \vdash\!\dashv y_2 - \Delta$. E se x_0 è punto di continuità per la $F(x)$, sarà

$Q(x,\ y) \rightarrow Q(x_0,\ y)$ uniformemente per $x \rightarrow x_0$, in $y_1 \vdash\!\dashv y_2 - \Delta$

Se manteniamo x in $\mathfrak{M}$ questa relazione porta che $Q(x_0,\ y)$ è continua su $y_1 \vdash\!\dashv y_2 - \Delta$.

Possiamo infine dimostrare che $Q(x,\ y)$ è continua sull' insieme R^* che si ottiene togliendo da R i punti $(x,\ y)$ tali che $y \varepsilon \Delta$ oppure $x \varepsilon \bar{\Delta}$, dove $\bar{\Delta}$ è un qualunque insieme aperto relativamente ad $a \vdash\!\dashv b$, che contiene tutti i punti di discontinuità di $F(x)$.

Infatti, sia $(x_0,\ y_0)$ un punto di R^* e λ un arbitrario numero positivo. Allora si può scegliere il numero $\delta > 0$ in guisa che da

$$|y - y_0| < \delta \qquad\qquad y \varepsilon y_1 \vdash\!\dashv y_2 - \Delta$$

segua

$$|Q(x_0,\ y) - Q(x_0,\ y_0)| < \lambda\ ;$$

dalla (7) si trae inoltre

$$|Q(x,\ y) - Q(x_0,\ y)| < \lambda$$

purchè $|x - x_0|$ risulti minore di un numero positivo opportuno, δ_1; in definitvia si trova

$$|Q(x,\ y) - Q(x_0,\ y_0) \leq 2\lambda$$

per $(x,\ y) \varepsilon R^*$ e sufficientemente vicino a $(x_0,\ y_0)$.

Consideriamo ora la funzione $y(x)$ della classe $\mathcal{K}$ e in corrispondenza a un arbitrario $\varepsilon > 0$ determiniamo Δ e $\bar{\Delta}$ in modo che $|E(\Delta) - \mathcal{K}\ |$ sia minore di ε [5]) al pari di $|\bar{\Delta}|$ e che $Q(x,\ y)$

[5]) E per questo, in virtù del lemma, basta che la $|\Delta|$ sia abbastanza piccola.

sia continua su R^*. Se x non appartiene a $E(\Delta)+\overline{\Delta}$, allora $y(x)$ non appartiene a Δ, e $(x, y(x)) \varepsilon R^*$; quindi $Q\ (x, y(x))$ è continua se si prescinde da $E(\Delta)+\overline{\Delta}$. In particolare $Q(x, y(x))$ è continua in $a \vdash\!\dashv b - \mathcal{H}$ se si prescinde da

$$(E(\Delta)+\overline{\Delta})-\mathcal{H} \subset (E(\Delta)-\mathcal{H})+\overline{\Delta}$$

e poichè è

$$|(E(\Delta)+\overline{\Delta})-\mathcal{H}| \leq |E(\Delta)-\mathcal{H}|+|\overline{\Delta}| < 2\varepsilon$$

per l'arbitrarietà di ε è dunque $Q(x, y(x))$ quasi continua in $a \vdash\!\dashv b - \mathcal{H}$. Tale è pure ivi $Q(x, y(x))y'(x)$.

Ma in $\mathcal{H}$ è quasi ovunque $y'(x)=0$ e dalla misurabilità di $\mathcal{H}$ segue che $Q(x, y(x))y'(x)$ è quasi continua in $a \vdash\!\dashv b$.

OSSERVAZIONE. — La relazione (7) ci permette di affermare non solo la quasi continuità della $Q(x_0, y)$ per ogni $x_0 \varepsilon\, a \vdash\!\dashv b$ sia punto di discontinuità della $F(x)$, ma addirittura l'uniforme quasi continuità della classe di funzioni $\{Q(x_0, y)\}$ descritta al variare di x_0 nell'insieme dei punti di continuità della $F(x)$, intendendo con ciò l'esistenza di un insieme aperto Δ di misura arbitrariamente piccola e tale che, a prescindere da esso le $Q(x_0, y)$ siano equicontinue al variare di x_0 nell'insieme dei punti di continuità di $F(x)$.

Potrebbe tuttavia accadere che negli eventuali punti x_0 di discontinuità di $F(x)$, la $Q(x_0, y)$ non sia quasi continua. In tal caso, però, detta funzione potrà esser modificata nei punti (x_0, y) in modo che si abbia, p. es.,

$$\lim_{x \to x_0+} Q(x, y) = Q(x_0, y) \qquad \text{se } x_0 \doteq b$$

e prendendo il limite sinistro se $x_0 = b$ [6]).

Se anche su $F(x)$ si fa l'analoga modificazione, allora la relazione (1) continua ad esser soddisfatta e inoltre l'uniforme quasi continuità delle funzioni $\{Q(x_0, y)\}$ si avrà per x_0 variabile in tutto $a \vdash\!\dashv b$.

---

[6]) L'esistenza dei limiti unilaterali segue dalla (1) poichè se $\varepsilon > 0$, $|Q(x', y) - Q(x'', y)| < \varepsilon$ per $x_0 < x' < x'' < x_0 + \delta$ purchè sia δ opportunamente piccolo e y fissato. Così pure se $x_0 - \delta < x' < x'' < x_0$.

Nel seguito ci serviremo però unicamente del fatto che la $Q(x_0, y)$ potrà esser supposta quasi continua rispetto ad y, *qualunque* sia $x_0 \varepsilon a \vdash\!\dashv b$. Ciò perchè la eventuale modificazione anzidetta non altera il valore di $Q(x, y(x)) \cdot y'(x)$ che in un insieme al più numerabile e quindi $I[y(x)]$ rimane invariato.

3. - DIMOSTRAZIONE DEL SECONDO TEOREMA. — Sia $y(x)$ una funzione della classe $\mathcal{K}$. Per ogni intero n positivo costruiamo la funzione $y_n(x)$ come segue: diviso l'intervallo $a \vdash\!\dashv b$ in 2^n parti uguali mediante i punti $a = x_0 < x_1 < ... < x_{2^n} = b$, sia $x_{r-1} \vdash\!\dashv x_r$ il generico intervallo della suddivisione e $\bar{x}_r$ un punto di massimo per la $y(x)$ nell'intervallo medesimo. Poniamo indi

$$
(8) \qquad \begin{aligned} y_n(x) &= \max_{x_{r-1} \leq \xi \leq x} y(\xi) \qquad \text{se } x_{r-1} \leq x \leq \bar{x}_r \\ y_n(x) &= \max_{x \leq \xi \leq x_r} y(\xi) \qquad \text{se } \bar{x}_r \leq x \leq x_r\,. \end{aligned}
$$

Si verificano allora le seguenti proprietà:

a) $y_n(x)$ è assolutamente continua in $a \vdash\!\dashv b$ e $(x, y(x)) \varepsilon R$; la funzione $y\ (x)$ appartiene cioè alla classe $\mathcal{K}$;

b) $y_n(x)$ è monotona non decrescente in ciascun intervallo $x_{r-1} \vdash\!\dashv \bar{x}_r$, e non crescente in $\bar{x}_r \vdash\!\dashv x_r$ $(r = 1, ..., 2^n)$;

c) l'insieme E_n dei punti x di $a \vdash\!\dashv b$ in cui è $y_n(x) = y(x)$, risulta chiuso e contenuto nell'insieme E_{n+1} ;

d) fuori di E_n è $y'_n(x) = 0$;

e) se indichiamo con $\mathcal{E}$ l'insieme dei punti di $a \vdash\!\dashv b$ in cui esiste la $y'(x)$ ed è diversa da zero si ha

$$\lim_{n \to \infty} E_n \mathcal{E} = \mathcal{E}\,.$$

Le proprietà *a*), *b*), *c*), *d*) si dimostrano facilmente. In quanto alla *e*) osserviamo che se x^* è un punto di $\mathcal{E}$, si ha $y'(x^*) \neq 0$. Se è $y'(x^*) > 0$, per tutti gli x di un opportuno intorno sinistro, δ, di x^* è $y(x) < y(x^*)$; allora, preso n in modo che sia $\frac{b-a}{2^n} < |\delta|$, se $x^* \varepsilon x_{r-1} \!\dashv x_r$, deve essere $x^* \varepsilon$ $\varepsilon\, x_{r-1} \!- x_r$ e risulta $\max\limits_{x_{r-1} \leq \xi \leq x^*} y(\xi) = y(x^*)$, cioè $y_n(x^*) = y(x^*)$, vale a dire $x^* \varepsilon E_n$; si ragiona in maniera analoga se $y'(x^*) < 0$ considerando un opportuno intorno destro, ecc. [7]).

Abbiamo allora i seguenti sviluppi

$$\left| \sum_{r=1}^{2^n} \int_{x_{r-1}}^{x_r} \{ Q(x, y_n(x)) - Q(x_{r-1}, y_n(x)) \} y'_n(x) dx \right| \leq$$

$$\leq \sum_{r=1}^{2^n} \int_{x_{r-1}}^{x_r} | Q(x, y_n(x)) - Q(x_{r-1}, y_n(x)) | \, | y'_n(x) | \, dx \leq$$

$$\leq \sum_{r=1}^{2^n} \int_{x_{r-1}}^{x_r} | F(x) - F(x_{r-1}) | \, \varphi(y_n(x)) \, | y'_n(x) | \, dx \leq$$

$$\leq \sum_{r=1}^{2^n} | F(x_r) - F(x_{r-1}) | \int_{x_{r-1}}^{x_r} \varphi(y_n(x)) \, | y'_n(x) | \, dx =$$

$$= \sum_{r=1}^{2^n} | F(x_r) - F(x_{r-1}) | \left\{ \int_{x_{r-1}}^{\bar{x}_r} \varphi(y_n(x)) y'_n(x) dx - \int_{\bar{x}_r}^{x_r} \varphi(y_n(x)) y'_n(x) dx \right\} \leq$$

$$\leq \sum_{r=1}^{2^n} | F(x_{r-1}) - F(x_r) | \left\{ \left| \int_{y_n(x_{r-1})}^{y_n(\bar{x}_r)} \varphi(y) dy \right| + \left| \int_{y_n(\bar{x}_r)}^{y_n(x_r)} \varphi(y) dy \right| \right\} =$$

$$= \sum_{r=1}^{2^n} | F(x_{r-1}) - F(x_r) | \left\{ \left| \int_{y(x_{r-1})}^{y(\bar{x}_r)} \varphi(y) dy \right| + \left| \int_{y(\bar{x}_r)}^{y(x_r)} \varphi(y) dy \right| \right\}.$$

Se $\omega(\sigma)$ è il modulo di continuità della funzione

$$\int_{y_1}^{y} \varphi(y) dy \qquad (y_1 \leq y \leq y_2)$$

e σ_n la oscillazione massima di $y(x)$ negli intervalli $\{x_{r-1} \vdash\!\dashv x_r\}$ $(r = 1, \dots, 2^n)$, risulta

$$\left| \sum_{r=1}^{2^n} \int_{x_{r-1}}^{x_r} \{ Q(x, y_n(x)) - Q(x_{r-1}, y_n(x)) \} y'_n(x) dx \right| \leq$$

---

[7]) I punti x_r della suddivisione in 2^n parti appartengono tutti a E_n e così pure i corrispondenti punti $\bar{x}_r$ di massimo.

$$\leq \sum_{r=1}^{2n} | F(x_{r-1}) - F(x_r) | \cdot 2\omega(\sigma_n) = 2 \, | F(b) - F(a) | \, \omega(\sigma_n) ,$$

ossia

$$\left| \int_a^b Q(x, y_n(x)) y'_n(x) dx - \sum_{r=1}^{2n} \int_{y(x_{r-1})}^{y(x_r)} Q(x_{r-1}, y) dy \right| \leq \tag{9}$$

$$\leq 2 \, | F(b) - F(a) | \, \omega(\sigma_n) .$$

Dalla proprietà *d*) segue

$$\int_a^b Q(x, y_n(x)) y'_n(x) dx = \int_{E_n} Q(x, y(x)) y'(x) dx$$

e per la *e*) risulta

$$\lim_{n \to \infty} \int_{E_n} Q(x, y(x)) y'(x) dx = \int_{\mathcal{E}} Q(x, y(x)) y'(x) dx =$$

$$= \int_a^b Q(x, y(x)) y'(x) dx ;$$

posto quindi

$$\left| \int_a^b Q(x, y(x)) y'(x) dx - \int_a^b Q(x, y_n(x)) y'_n(x) dx \right| = \varepsilon_n \tag{10}$$

sarà $\lim_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0$; inoltre dalla (9), (10) si ha

$$\left| I[y(x)] - \sum_{r=1}^{2n} \int_{y(x_{r-1})}^{y(x_r)} Q(x_{r-1}, y) dy \right| \leq 2 \, | F(b) - F(a) | \, \omega(\sigma_n) + \varepsilon_n . \tag{11}$$

Sia ora $\bar{y}(x)$ un'altra funzione della classe $\mathcal{K}$; analogamente a quanto si è fatto per la $y(x)$, indichiamo con $\bar{\sigma}_n$ e $\bar{\varepsilon}_n$ le quantità corrispondenti a σ_n e ε_n per la $\bar{y}(x)$, avremo

$$\left| I[\bar{y}(x)] - \sum_{r=1}^{2n} \int_{\bar{y}(x_{r-1})}^{\bar{y}(x_r)} Q(x_{r-1}, y) dy \right| \leq 2 \, | F(b) - F(a) | \, \omega(\bar{\sigma}_n) + \bar{\varepsilon}_n . \tag{12}$$

Dalle (11) e (12) si ricava infine

$$(13)\quad |I[y(x)]-I[\bar{y}(x)]|\leq \left|\sum_{r=1}^{2n}\left\{\int_{y(x_{r-1})}^{y(x_r)} Q(x_{r-1},y)dy-\int_{\bar{y}(x_{r-1})}^{\bar{y}(x_r)} Q(y_{r-1},y)dy\right\}\right|+$$

$$+2\,|F(b)-F(a)|\,(\omega(\sigma_n)+\omega(\bar{\sigma}_n))+\varepsilon_n+\bar{\varepsilon}_n\,;$$

ma

$$\left|\sum_{r=1}^{2n}\left\{\int_{y(x_{r-1})}^{y(x_r)} Q(y_{r-1},\ y)dy-\int_{\bar{y}(x_{r-1})}^{\bar{y}(x_r)} Q(x_{r-1},y)dy\right\}\right|=$$

$$=\left|\sum_{r=1}^{2n}\left\{\int_{\bar{y}(x_r)}^{y(x_r)} Q(x_{r-1},y)dy-\int_{\bar{y}(x_{r-1})}^{y(x_{r-1})} Q(x_{r-1},y)dy\right\}\right|\leq$$

$$\leq\left|\sum_{r=1}^{2n}\int_{\bar{y}(x_r)}^{y(x_r)}\{Q(x_{r-1},y)-Q(x_r,y)\}\,dy\right|+\left|\int_{\bar{y}(a)}^{y(a)} Q(a,y)dy\right|+$$

$$+\left|\int_{\bar{y}(b)}^{y(b)} Q(b,y)dy\right|\leq\sum_{r=1}^{2n}\left|\int_{\bar{y}(x_r)}^{y(x_r)}|F(x_{r-1})-F(x_r)|\,\varphi(y)dy\right|+$$

$$+\left|\int_{\bar{y}(a)}^{y(a)} Q(x,y)dy\right|+\left|\int_{\bar{y}(b)}^{y(b)} Q(b,y)dy\right|\leq|F(b)-F(a)|\,\omega(\rho)+2M\rho\,,$$

dove M è un numero tale che $|Q(x,y)|\leq M$ in R, e ρ ha il solito significato di massimo divario tra le funzioni $y(x)$ e $\bar{y}(x)$ in $a \vdash\!\dashv b$, e la (12) diventa

$$|I[y(x)]-I[\bar{y}(x)]|\leq|F(b)-F(a)|\omega(\rho)+2M\rho+$$
$$+2|F(b)-F(a)|(\omega(\sigma_n)+\omega(\bar{\sigma}_n))+\varepsilon_n+\bar{\varepsilon}_n\,;$$

e poichè σ_n, $\bar{\sigma}_n$, ε_n, $\bar{\varepsilon}_n$ sono infinitesimi per $n\to\infty$, ne segue

$$|I[y(x)]-I[\bar{y}(x)]|\leq|F(b)-F(a)|\omega(\rho)+2M\rho$$

che è quanto si voleva dimostrare.