RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIUSEPPE COLOMBO

Sopra un singolare caso che si presenta in un problema di stabilità in meccanica non-lineare

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 22 (1953), p. 123-133

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1953__22__123_0>

SOPRA UN SINGOLARE CASO CHE SI PRESENTA IN UN PROBLEMA DI STABILITÀ IN MECCANICA NON-LINEARE

Nota (*) *di* GIUSEPPE COLOMBO (*a Padova*)

E' ben noto che l'equazione di Van der Pol per le oscillazioni forzate

1) $$\ddot{v} + \alpha(v^2 - 1)\dot{v} + \omega^2 v = E \operatorname{sen} 3\omega t, \qquad (\alpha > 0)$$

ammette la soluzione elementare sotto-armonica

2) $$v = 2 \cos \omega t,$$

appena sia $E = -2\alpha\omega$. Il prof. GRAFFI mi ha proposto di studiare la stabilità di tale soluzione. Con una analisi non semplice, in quanto mi è stato necessario spingermi fino ad approssimazioni di ordine elevato rispetto ad α, ho potuto dimostrare che, almeno per α sufficentemente piccolo, quella soluzione è instabile. Questo risultato, di un certo interesse già di per se stesso, mi sembra notevole per la seguente ragione.

E' ben noto che la soluzione periodica non identicamente nulla dell' equazione di Van der Pol per le oscillazioni libere

3) $$\ddot{v} + \alpha(v^2 - 1)\dot{v} + v = 0 \qquad (\alpha > 0)$$

è stabile [1]), ed è pure ben noto [2]) che tale soluzione, $\overline{v}$, può scriversi in via approssimata nel seguente modo:

4) $$\overline{v} = 2 \operatorname{cost} + 0(\alpha).$$

(*) Pervenuta in Redazione il 9 aprile 1953.

1) N. LEVINSON and. K. O. SMITH: *A general equations for relaxations oscillations.* «Duke Math. Journal», vol. 9, giugno 1942.

2) N. MINORSKY: *Introduction to non-linear Mechanics.* J. W. Edwards. «Ann. Arbor», Mich. 1947. p. 217.

Ebbene se si scrive l' equazione alle variazioni relativamente alla soluzione $\bar{v}$ di 3) e si pone al posto di $\bar{v}$, $2 \cos t$, trascurando i termini infinitesimi in α, si ottiene la stessa equazione alle variazioni relativa all' equazione 1) ed alla soluzione esatta 2), ove naturalmente si ponga $\omega = 1$, cioè la $\bar{v}$ risulterebbe instabile, almeno per α sufficientemente piccolo.

Si può quindi dire che, *nella ricerca della stabilità o instabilità lineare di una soluzione non è lecito, in generale, sostituire tale soluzione con una rappresentazione approssimata* [3]) *anche nel campo di validità di tale rappresentazione.* In altre parole, nella ricerca della stabilità o instabilità lineare di una soluzione periodica, nota in via approssimata, bisogna fare un accurato esame dell' ordine con cui una soluzione approssimata rappresenta quella esatta ed assicurarsi che questo ordine sia sufficentemente elevato.

A conferma di quanto precede, vedremo che perchè l' equazione alle variazioni potesse rivelare la stabilità della soluzione 4), bisognerebbe sostituire a v una sua rappresentazione approssimata almeno fino all' ordine di α^3 compreso, non restando escluso che questa non sia ancora sufficente [4]).

Lo studio della stabilità della soluzione 2) di 1), che rappresenta il più semplice esempio di soluzione sotto-armonica che si incontri nelle oscillazioni non-lineari forzate, può avere interesse anche come caso limite, nel senso più appresso precisato.

L' equazione 1) si può, previo un opportuno cambiamento di variabile temporale, porre sotto la forma:

$$5) \qquad \ddot{v} + k(v^2 - 1)\dot{v} + v = bk\lambda \cos(\lambda t + \varphi)$$

---

3) Tale sostituzione è spesso in pratica fatta. Vedi per esempio: I. I. STOKER, *Non-linear vibrations in Mechanical and Electrical Sistems*, (Interscience Publ., inc., New York 1950), p. 115.

4) Resta naturalmente escluso in questo caso che l' instabilità apparente sia effetto dei termini di ordine superiore, rispetto a δv, $\delta\dot{v}$, trascurati nello scrivere l' equazione alle variazioni, come, magari in senso inverso. succede per qualche sistema dinamico, in cui i termini di ordine superiore sono determinanti. Vedi per esempio: E. T. WHITTAKER, *Analytical Dynamics*, (New York, Dover Publ., 1944, IV ed.) p. 412.

ove si sono fatte le seguenti posizioni

$$b = \frac{2}{3}, \ \lambda = 3, \ \varphi = \frac{\pi}{2}, \ k = \frac{\alpha}{\omega}.$$

L'equazione 5) è stata molto studiata [5]), per k grande ma $b \neq \frac{2}{3}$, oppure per k piccolo e λ prossimo ad 1.

Il valore $b = \frac{2}{3}$ è per k sufficentemente grande un valore critico perchè separa i valori $\left(b > \frac{2}{3}\right)$ per i quali il comportamento delle soluzioni di 5) si pensa sia il più semplice possibile (esistenza e stabilità di una sola soluzione periodica di periodo $\frac{2\pi}{\lambda}$, alla quale tendono le altre) [6]) da quelli $\left(b < \frac{2}{3}\right)$ per i quali le soluzioni di 5) hanno un comportamento molto vario ed in un certo senso curioso.

Il caso considerato presenta quindi un certo interesse anche come caso limite.

Provando come faremo che uno degli esponenti caratteristici, qualunque sia il valore di k, è a parte reale negativa, troveremo che una semplice infinità di soluzioni tende alla 2) per $t \to +\infty$. Queste soluzioni, come la 2), si comportano in maniera tutt'affatto diversa che quella in cui (come risulta dal lavoro citato in [6])) si comportano asintoticamente tutte le soluzioni di 5), per $b > \frac{2}{3}$ e k sufficentemente grande.

---

[5]) M. L. CARTWRIGHT, J. E. LITTLEWOOD: *On non-linear differential equation of the second order*: $\ddot{y} + k(y^2 - 1)\dot{y} + y = bk\lambda \cos(\lambda t + \alpha)$. I. (*k large*) « The Journal of the London Math. Soc. », Vol. 20, parte 3, 1945, p. 180; II. (*k small and* λ *near* 1) « Proc. of the Cambridge Phil. Soc. », Vol. 45, 1949, pp. 495-501.

[6]) I. G. WENDEL: *Singular Perturbations of a Van der Pol equation.* « Ann. of. Math. Studies » n. 20. Contributions to the Theory of nonlinear oscillations, p. 243-290. In effetti in questo lavoro non si dimostra la proprietà enunciata sopra, ma si dimostra un teorema che dà la più buona approssimazione, che si conosca finora, di tale fatto, che si pensa sia vero.

1. - Consideriamo dunque l'equazione 5) che scriviamo più semplicemente così:

$$6) \qquad \ddot{x} + k(x^2 - 1)\dot{x} + x = -2k \operatorname{sen} 3t$$

e la soluzione elementare

$$7) \qquad x = 2 \cos t\,.$$

Volendone studiare la stabilità si scrive, al solito, la relativa equazione delle variazioni, che si presenta nella forma

$$8) \qquad \delta\ddot{x} + k(1 + 2\cos 2t)\delta\dot{x} + (1 - 4k \operatorname{sen} 2t)\delta x = 0\,.$$

Con la posizione

$$9) \qquad \delta x = \eta e^{-\frac{k}{2}(t + \operatorname{sen} 2t)}\,,$$

la 8) porge l'equazione in η

$$10) \qquad \ddot{\eta} + \left\{ 1 - 2k \operatorname{sen} 2t - \frac{k^2}{4}(1 + 2\cos 2t)^2 \right\} \eta = 0\,,$$

che è un'equazione del tipo di Hill.

Basterà quindi calcolare gli esponenti caratteristici di 10) e tener conto di 8), per dedurre la stabilità o instabilità della soluzione 7) di 6).

Comunque però si può già osservare, che per qualunque valore di $k > 0$ uno degli esponenti caratteristici di 8) è a parte reale negativa dato che quelli di 10) sono, come è noto, o reali e di segno contrario o immaginari puri. Ciò intanto conferma per altra via l'essenzialità della condizione $b > \frac{2}{3}$, perchè sussista per l'equazione 5) il teorema di stabilità globale di J. WENDEL. Questo teorema infatti assicura che per $b > \frac{2}{3}$ ogni soluzione di 5) finisce per t sufficentemente elevato, per assumere in una certa successione di istanti differenti tra di loro di $\frac{2\pi}{\lambda}$ valori a piacere prossimi ad un certo valore $\bar{x}$, e ciò naturalmente non succede nè per la soluzione 7) di 6), nè per la semplice infinità che tende ad essa per $t \to +\infty$.

2. - Per la ricerca degli esponenti caratteristici di 10) basta come è noto calcolare le due soluzioni η^*, η' della stessa equazione, soddisfacenti alle condizioni iniziali

$$11)\qquad \eta^*(0)=1 \quad , \quad \dot{\eta}^*(0)=0 \qquad ; \qquad \eta'(0)=0 \quad , \quad \dot{\eta}'(0)=1\,.$$

Determinate η^*, η' si calcolano come di solito le radici dell'equazione in s

$$12)\qquad s^2+[\eta^*(\pi)+\dot{\eta}'(\pi)]s+1=0\,;$$

se s_1, s_2 sono reali, esse risultano, dato che $s_1 s_2=1$, l'una inversa dell'altra ed i logaritmi naturali dei loro moduli divisi per π, che sono ovviamente uguali e di segno contrario, sono gli esponenti caratteristici di 10).

Per la ricerca delle soluzioni η^* ed η', nel caso di k piccolo, conviene porre, ai nostri fini,

$$13)\qquad \eta=\sum_{0}^{6}{}_r\, k^r\eta_r\,.$$

Trattando k come infinitesimo principale ed uguagliando i termini dello stesso ordine otterremo le seguenti equazioni

$$14)\quad \begin{cases} \ddot{\eta}_0+\eta_0=0 \\ \ddot{\eta}_1+\eta_1=2\eta_0 \operatorname{sen} 2t \\ \ddot{\eta}_r+\eta_r=2\eta_{r-1}\operatorname{sen} 2t+\frac{1}{4}\eta_{r-2}(1+2\cos 2t) \qquad r=2,\,3,\,4,\,5 \\ \ddot{\eta}_6+\eta_6=2\eta_5 \operatorname{sen} 2t+\frac{1}{4}\eta_4(1+1\cos 2t)^2+k\Big(\eta_6 \operatorname{sen} 2t+ \\ \qquad +\frac{1}{4}(1+2\cos 2t)\eta_5\Big)+\frac{k^2}{4}(1+2\cos 2t)\eta_6\,. \end{cases}$$

Prima di procedere alla determinazione di η' ed η^* facciamo la seguente osservazione.

Supponiamo per un momento di considerare due valori di k uguali e contrari di segno $\bar{k}$ e $-\bar{k}$, e siano $\bar{\alpha}$, $-\bar{\alpha}$, $\bar{\alpha}'$, $-\bar{\alpha}'$ gli esonpenti caratteristici relativi al valore $\bar{k}$ e rispettivamente $-\bar{k}$ di k. Dico che $\bar{\alpha}'=\bar{\alpha}$. Infatti si considerino le due equazioni:

$$15)\quad \begin{cases} \ddot{\eta} + \left[1 - 2\overline{k}\,\mathrm{sen}\,2t - \dfrac{\overline{k}^2}{4}(1 + 2\cos 2t)^2\right]\eta = 0\,, \\ \ddot{\eta} + \left[1 + 2\overline{k}\,\mathrm{sen}\,2t - \dfrac{k^2}{4}(1 + 2\cos 2t)^2\right]\eta = 0\,; \end{cases}$$

se si opera sulla seconda il cambiamento di variabile $\tau = -t$, essa diviene

$$16)\quad \ddot{\eta} + [1 - 2\overline{k}\,\mathrm{sen}\,2\tau - \frac{\overline{k}^2}{4}(1 + 2\cos 2\tau)^2]\eta = 0\,,$$

cioè coincide formalmente con la prima delle (4). In tal modo se la soluzione di 15_1) si può porre sotto la forma

$$17)\quad \eta = c_1 e^{-\alpha t}\psi_1(t) + c_2 e^{\alpha t}\psi_2(t)$$

con $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ funzioni periodiche di periodo π, la soluzione di 15) sarà ovviamente

$$18)\quad \eta = c_1 e^{-\alpha\tau}\psi_1(\tau) + c_2 e^{\alpha\tau}\psi_2(\tau)\,,$$

e la soluzione di 14_2)

$$19)\quad \eta = c_1 e^{\alpha t}\psi_1(-t) + c_2 e^{-\alpha t}\psi_2(-t)\,,$$

onde risulta l' asserto.

Da questa proprietà dell' equazione 10) segue che il valore di $\eta^*(\pi) + \dot{\eta}'(\pi)$, da cui solo dipendono le radici dell' equazione 12), non deve mutare, al cambiare di segno di k, almeno in valore assoluto.

Ora siccome per la posizione 14), si ha

$$20)\quad \eta^*(\pi) + \dot{\eta}'(\pi) = \sum_{0}^{6}{}_r\, k^r(\eta_r^*(\pi) + \dot{\eta}_r'(\pi))\,,$$

il modulo di queste sommatorie non deve dipendere dal segno di k, qualunque sia il valore assoluto di k stesso. Devono quindi essere nulli o i coefficenti delle potenze dispari di k o quelli delle potenze pari. Ma poichè per $k = 0$ è $\eta^* = \cos t$, $\eta' = \mathrm{sen}\, t$ e quindi $\eta^*(\pi) + \dot{\eta}'(\pi) = -2$, saranno ovviamente nulli i coefficenti delle potenze dispari di k.

Concludendo, in base a questa osservazione preliminare, potremo senz'altro scrivere

$$21)\quad \eta^*(\pi) + \dot{\eta}'(\pi) = A_0 + k^2 A_2 + k^4 A_4 + 0(k^6)\,,$$

appena avremo fatto vedere che $\eta_6^*(\pi)$ ed $\dot{\eta}_6'(\pi)$ sono finiti.

Per determinare η^* con l'approssimazione voluta, poniamo $\eta_0^* = \cos t$ e determiniamo la soluzione η_1^* della 14_2) che soddisfa alle condizioni iniziali

$$22) \qquad \eta_1^*(0) = \dot{\eta}_1^*(0) = 0 \,.$$

A calcoli eseguiti si trova

$$23) \qquad \eta_1^* = -\frac{1}{2} t \cos t - \frac{1}{8} \operatorname{sen} 3t + \frac{7}{8} \cos t \,.$$

Così procedendo si sostituisca successivamente in 14_{r+1}) $(r = 1, 2, 3, 4)$ al posto di η_{r-1}, η_{r-2} le soluzioni η_{r-1}^*, η_{r-2}^* e si determini, dall'equazione così ottenuta, quella soluzione η_r^* che si annulla assieme alla sua prima derivata per $t = 0$.

Si ottengono così successivamente $\eta_2^*, \eta_3^*, \eta_4^*, \eta_5^*$, che si presentano con η_0^* ed η_1^*, come si riconosce abbastanza facilmente, nella seguente forma

$$24) \qquad \eta_r = \sum_0^r{}_j \sum_0^{r-j}{}_i \, a_{ij}^{(r)} t^i \cos \left\{ (2j+1)t + (r-1)\frac{\pi}{2} \right\} \qquad (r = 0, \dots 5)$$

Non altrettanto facile è invece il calcolo dei coefficenti della sommatoria 24), calcolo che è però essenziale fare, ai nostri fini, per $r \leq 4$. Per ragioni di brevità riporteremo solo i risultati finali. Ci limiteremo ad osservare che, conoscendo la forma di η_4^* e di η_5^* data da 24), si può concludere, applicando per esempio un noto criterio di analisi [7]), che la soluzione η_6^* **è limitata nell'intervallo chiuso** $(0, \pi)$ con la sua derivata prima e quindi è certamente finito il valore $\eta_6^*(\pi)$.

Si trova così a calcoli eseguiti

$$25) \qquad \eta^*(\pi) = -1 + k\frac{\pi}{2} - k^2\frac{\pi^2}{8} + k^3\left(\frac{\pi^3}{48} - \frac{27\pi}{128}\right) - k^4\left(\frac{\pi^4}{8 \cdot 48} + \right.$$
$$\left. + \frac{9\pi^2}{8 \cdot 64}\right) + \gamma k^5 + 0(k^6)$$

---

[7]) Vedi M. L. CARTWRIGHT: *Forced oscillations in non-linear sistems.* dalla raccolta citata nella nota 6, p. 203.

ove ci siamo risparmiati il calcolo dei coefficenti di k^5 poichè esso non compare nella espressione di $\eta^*(\pi) + \dot{\eta}'(\pi)$, proprio per l' osservazione fatta più sopra.

Analogamente si procede per il calcolo di $\dot{\eta}'(\pi)$ nella richiesta approssimazione. Ponendo $\eta'_0 = \operatorname{sen} t$ e cercando successivamente le soluzioni η'_r delle 14), che si annullano con le loro derivate per $t = 0$, si trovano per $\eta_r (r = 0, \ldots, 5)$ espressioni del tipo

$$26) \quad \eta_r = \sum_0^r{}_j \sum_0^{r-j}{}_i \alpha^r_{i,j} t^i \cos\left\{(2j+1)t + (r-i-1)\frac{\pi}{2}\right\} \quad (r = 0, \ldots 5)$$

Anche qui, come sopra per $\eta_6^*(\pi)$, le 26) ci permettono di concludere che $\dot{\eta}'_6(\pi)$ è certamente finito, e quindi, eseguiti i calcoli di $\dot{\eta}'_2(\pi)$, $\dot{\eta}'_4(\pi)$ e richiamata l' osservazione, premessa più sopra al riguardo dei coefficenti delle potenze dispari di k nell' espressione $\eta^*(\pi) + \dot{\eta}'(\pi)$, si può scrivere [8])

$$27) \quad \dot{\eta}'(\pi) = -1 - k\frac{\pi}{2} - k^2\frac{\pi^2}{8} - k^3\left(\frac{\pi^3}{48} - \frac{27\pi}{128}\right) - k^4\left(\frac{\pi^4}{8\cdot 48} + \right.$$
$$\left. + \frac{9\pi^2}{8\cdot 64}\right) - \gamma k^5 + 0(k^6)\,.$$

Concludendo in base a 25), 27) si ha

$$28) \quad \eta^*(\pi) + \dot{\eta}'(\pi) = -2\left\{1 + \frac{k^2\pi^2}{8} + k^4\left(\frac{\pi^4}{8\cdot 48} + \frac{9\pi^2}{8\cdot 64}\right)\right\} + 0(k^6)\,.$$

3. - Per determinare gli esponenti caratteristici di 10) con la approssimazione voluta, cominciamo a considerare l'equa-

---

[8]) Confrontando le espressioni di $\eta^*(\pi)$ e di $\eta'(\pi)$ si riconosce, oltre al fatto più sopra dimostrato che i coefficienti delle potenze dispari di k sono uguali e contrari di segno, anche l' uguaglianza dei coefficienti delle potenze pari. Su questo secondo fatto che forse si può dimostrare per via diretta o dedurre dal primo non abbiamo creduto opportuno insistere perchè esula dai nostri fini prefissi. Come esula da questi fini anche lo sviluppo di η^* e di η' in serie di potenze di k, certamente possibile, anche se non agevole, con un processo di ricorrenza, fondato sulle formule 24), 26), che ovviamente continuano a valer per ogni r, qualora alle 13) si sostituisca la corrispondente serie.

zione:

29) $$s^2 + 2\{1 + \alpha k^2 + \beta k^4 + 0(k^6)\} s + 1 = 0 .$$

Sia s^* una delle sue due radici, precisamente quella, $s+$, corrispondente alla scelta del segno $+$ davanti al radicale; sarà

30) $$|s^*| = 1 + \alpha k^2 + \beta k^4 + 0(k^6) + k\{2\alpha + (\alpha^2 + 2\beta)k^2 + 0(k^4)\}^{\frac{1}{2}},$$

almeno per k sufficentemente piccolo.

Tenuto presente che è

$$\sqrt{a + \varepsilon} = \sqrt{a} + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{a}} + 0(\varepsilon^2),$$

da 30) si ha

31) $$|s^*| = 1 + k\sqrt{2\alpha} + \alpha k^2 + \frac{\alpha^2 + 2\beta}{2\sqrt{2\alpha}} k^3 + 0(k^4) .$$

Ricordando anche che $\log(1 + \varepsilon) = 1 - \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + 0(\varepsilon^4)$ da 31) otteniamo

32) $$\log|s^*| = k\sqrt{2\alpha} + \frac{k^3}{6\sqrt{2\alpha}}(6\beta - \alpha^2) + 0(k^4) .$$

Nel nostro caso, da 28) e 12) si trae

$$\alpha = \frac{\pi^2}{8}, \quad \beta = \frac{\pi^4}{8 \cdot 43} + \frac{9\pi^2}{8 \cdot 64}$$

e quindi in definitiva denotati con $e_{1,2}$ gli esponenti caratteristici di 10) risulta

32) $$e_{1,2} = \pm\frac{1}{\pi}\log|s^*| = \pm\left(\frac{k}{2} + \frac{9k^3}{2^8}\right) + 0(k^4) .$$

Tenendo presente la 9), gli esponenti caratteristici $e^*_{1,2}$ della 8) soddisfano alle relazioni

33) $$\begin{cases} e^*_1 = -k - \dfrac{9k^3}{2^8} + 0(k^4), \\ e^*_2 = \dfrac{9k^3}{2^8} + 0(k^4) \end{cases}$$

il che dimostra l' instabilità di 7) per k sufficientemente piccolo.

4. - Se si volesse con questo metodo studiare la stabilità per k piccolo della soluzione periodica 4) della equazione 3), bisognerebbe, come si vede abbastanza facilmente, calcolarsi preventivamente la soluzione $\bar{v}$ a meno di infinitesimi di ordine superiore al terzo.

Vedremo subito che la terza approssimazione non è neppure sufficiente. Col metodo di KRYLOFF e BOGOLIUBOFF [9]) si ha infatti

$$34)\quad \begin{cases} \bar{v} = 2\cos\psi - \dfrac{k}{4}\operatorname{sen} 3\psi - \dfrac{k^2}{4\cdot 8}\left(\dfrac{5}{3}\operatorname{co}\ 5\psi + 3\cos 3\psi\right) + 0(k^3), \\ \psi = \left(1 - \dfrac{k^2}{16}\right)t + 0(k^4). \end{cases}$$

Se si scrive l' equazione alle variazioni ponendo al posto di $\bar{v}$ il secondo membro di 34_1) trascurando $0(k^4)$, e si pone al solito

$$35)\qquad \delta v = \eta e^{-\frac{k}{2}t - \frac{k^3}{32}t + P_2(t) + k^2P_2(t) + k^3P_3(t)}$$

essendo P_1, P_3 opportune funzioni periodiche dispari, P_2 pari, di periodo $T = \dfrac{8\pi}{(16 - k^2)^{\frac{1}{2}}}$ si ha ancora un'equazione di Hill, del tipo

$$36)\qquad \ddot{\eta} + kA(t, k)\eta = 0$$

ove è

$$37)\qquad A(t, k) = 1 + kP'_1(t) + k^2P_2'(t) + k^3P_3'(t)$$

con P_1', P_3' funzioni periodiche dispari e P_2' pari, di periodo T.

Anche in questa equazione si può ripetere l' osservazione fatta per l' equazione 10), cioè succede anche qui che nell'espressione approssimata di $\eta^*(T) + \eta'(T)$ non compaiono i termini nelle potenze dispari di k, appunto perchè P_1' P_3' sono funzioni dispari di t, e P_2' è funzione pari.

---

[9]) N. KRYLOFF e N. BOGOLIUBOFF: *Introductions to Non-linear Mechanics, trans. by S. Lefschetz.* «Annals of Math. Studies», No. 11, (Princeton 1945).

Con lo stesso metodo usato per l'equazione 10), si troverà per $\eta^*(T) + \dot{\eta}'(T)$ una espressione del tipo

38) $$\eta^*(T) + \dot{\eta}'(T) = -2(1 + \alpha' k^2 + \beta' k^4) + 0(k^6),$$

ove però, come si riconosce abbastanza rapidamente, α' vale ancora, come nel caso precedente dell'equazione 10), $\frac{\pi^2}{8}$, proprio perchè i termini di ordine superiore ora introdotti non hanno alcun effetto su tale coefficente.

Quindi, proprio come per la 10), uno degli esponenti caratteristici dell'equazione di Hill 36) ha ancora il primo termine uguale a $\frac{k}{2}$ cioè uguale e contrario di segno al primo termine dell'esponente di e nel secondo membro di 35).

Ciò basta per stabilire l'importanza del ruolo giocato da β'. Se si pensa che i termini del 4° ordine nel secondo membro di 38) sono determinati anche dai termini del terzo ordine di v che abbiamo trscurati, come si vede procedendo a ritroso attraverso le 38), 37), 36), 34) e l'equazione alle variazioni relative a 3), si riconosce la necessità di precisare la rappresentazione di v fino ai termini del terzo ordine incluso.

A meno che il β', calcolato in corrispondenza a quest'ultima rappresentazione di v, non fosse tale che risultasse

$$\frac{1}{T}\frac{6\beta' - \alpha'^2}{6\sqrt{2\alpha'}} = \frac{1}{32}$$

nel qual caso neppure tale rappresentazione sarebbe sufficente a discutere la stabilità lineare di $\overline{v}$.