RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ALDO GHIZZETTI

Applicazione del metodo della trasformata parziale di Laplace al problema di Dirichlet per l'equazione $\Delta_2 u - \lambda^2 u = F$ in n variabili

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 17 (1948), p. 39-74
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1948__17__39_0>

APPLICAZIONE DEL METODO DELLA TRASFORMATA PARZIALE DI LAPLACE AL PROBLEMA DI DIRICHLET PER L' EQUAZIONE $\Delta_2 u - \lambda^2 u = F$ IN n VARIABILI [1]

Memoria (*) *di* ALDO GHIZZETTI (*a Roma*)

INTRODUZIONE

In una precedente Memoria [2], prendendo in considerazione il problema di DIRICHLET (o di NEUMANN) per l'equazione $\Delta_2 u - \lambda^2 u = F$ in due variabili, posto in un dominio $T[0 \leq x \leq 1, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)]$, ho dimostrato che il sistema di equazioni integrali di FISCHER-RIESZ a cui conduce l'applicazione formale del metodo della trasformata parziale di LAPLACE traduce completamente il problema considerato; tali equazioni rappresentano cioè delle condizioni necessarie e sufficienti per i valori incogniti assunti dalla $\frac{\partial u}{\partial n}$ (o dalla u) sui tratti $y = \alpha(x)$, $y = \beta(x)$ della frontiera di T. A tale risultato sono pervenuto seguendo un metodo dovuto a L. AMERIO [3], fondato sull'uso delle formule di

(*) Pervenuta in Redazione il 20 giugno 1947.

(1) Lavoro eseguito presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(2) *Sul metodo della trasformata parziale di Laplace a intervallo di integrazione finito,* Rendiconti di matematica e delle sue applicazioni, Università di Roma e Istituto Nazionale di Alta Matematica, fasc. I, 1947. Citeremo questo lavoro con l'indicazione «*M*».

(3) Vedi L. AMERIO, *Sull'integrazione dell'equazione $\Delta_2 u - \lambda^2 u = f$ in un dominio di connessione qualsiasi,* Rendiconti Istituto Lombardo, vol. 78, 1944-45.

GREEN, modificandolo col sostituire alla considerazione della soluzione fondamentale dell'equazione $\Delta_2 u - \lambda^2 u = 0$ quella della funzione di GREEN relativa alla striscia S $(0 \leq x \leq 1)$ che contiene T.

In questo lavoro estendo la ricerca al caso di n variabili e, per brevità, mi limito a considerare il problema di DIRICHLET. Il metodo seguito è analogo a quello sopra descritto e si fonda sull'uso della funzione di GREEN G di un iperstrato. Vi è però una differenza essenziale dal caso di due variabili. Se $n > 2$ il sistema di equazioni integrali per la $\frac{\partial u}{\partial n}$ fornito dal metodo della trasformata parzîale di LAPLACE è diverso da quello a cui si arriva per mezzo delle formule di GREEN scritte con la predetta funzione G. Però i due sistemi sono equivalenti perchè si possono trasformare l'uno nell'altro. La trasformazione del primo nel secondo si fa con lo stesso procedimento usato da L. AMERIO [4] nello studio del metodo della trasformata totale di LAPLACE. Essendo riuscito ad invertire la trasformazione usata da AMERIO, ho potuto anche dare il modo di trasformare il secondo sistema nel primo.

Questa Memoria è divisa in quattro §§. Nel primo descrivo l'applicazione formale del metodo della trasformata parziale di LAPLACE al problema in questione, arrivando al sistema di equazioni integrali per la $\frac{\partial u}{\partial n}$; si pone allora il problema di dimostrare che tali equazioni traducono completamente il problema stesso.

Nel § 2 costruisco la funzione di GREEN G dell' iperstrato. Come è noto, di questa G si ha subito uno sviluppo in serie fornito dal metodo delle immagini; ma per la nostra questione occorre anche un altro sviluppo che non pare facilmente deducibile dal precedente. Perciò ricavo per la G dapprima una rappresentazione integrale dalla quale è agevole dedurre entrambi gli sviluppi.

[4] Vedi L. AMERIO, op. cit. in [3], n. 3 *b*.

Il § 3 è dedicato allo studio delle trasformazioni funzionali alle quali si è sopra accennato; dopo aver richiamato quella di Amerio, ne costruisco l'inversa.

Con ciò si hanno tutti gli elementi per provare al § 4 che le equazioni integrali formalmente ricavate al § 1 rappresentano effettivamente per la $\frac{\partial u}{\partial n}$ delle condizioni necessarie e sufficienti. Vi è ancora da osservare che tali equazioni (a differenza di quanto accade per $n = 2$) non costituiscono un sistema di Fischer-Riesz, ma è immediato sostituirle con un tal sistema, come viene mostrato alla fine del § stesso.

§ 1. - Il metodo della trasformata parziale di Laplace a campo di integrazione finito.

1. - Nello spazio S_{m+1}, a $m+1$ dimensioni ($m \geq 2$), luogo del punto di coordinate x, y_1, $y_2, \ldots, y_m$, consideriamo il *problema di* Dirichlet per l'equazione

$$(1,1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial y_m^2} - \lambda^2 u = F(x, y_1, y_2, \ldots, y_m),$$

con λ parametro *reale* e $F(x, y_1, y_2, \ldots, y_m)$ funzione assegnata, in un dominio limitato T verificante le ipotesi seguenti.

Supporremo che T sia contenuto nell'iperstrato $0 \leq x \leq 1$ e che da ogni iperpiano $x = cost.$, interno a tale iperstrato, sia segato secondo un dominio Γ_x (a m dimensioni) avente per frontiera un'unica varietà γ_x (a $m-1$ dimensioni) semplice e chiusa. Circa le sezioni estreme Γ_0, Γ_1 con gli iperpiani $x = 0$, $x = 1$, non si esclude l'eventualità che esse abbiano misura (m — dimensionale) nulla.

Per x fissato $(0 < x < 1)$, sia

$$(1,2) \qquad y_k = \alpha_k(x; t_1, t_2, \ldots, t_{m-1}) \quad , \quad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

una rappresentazione parametrica di γ_x nello spazio S_m ($x = cost.$), scelta in modo che i coseni direttori della normale ν_x *interna* a γ_x risultino uguali ai minori di ordine massimo $J_k(x; t_1, t_2, \ldots, t_{m-1})$, $(k = 1, 2, \ldots, m)$, della matrice jacobiana $\dfrac{\partial(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)}{\partial(t_1, t_2, \ldots, t_{m-1})}$, moltiplicati per un fattore *positivo;* si abbia cioè

$$(1,3) \quad cos(y_k \nu_x) = \frac{J_k}{M} \text{ con } M = +\sqrt{J_1^2 + J_2^2 + \ldots + J_m^2}, \ (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Teniamo presente che, detto ds_x l'elemento di misura di γ_x, si ha

$$(1,4) \qquad ds_x = M\, dt_1\, dt_2 \ldots dt_{m-1}.$$

La frontiera FT del considerato dominio T è costituita dalle due sezioni estreme Γ_0, Γ_1 sopra menzionate e dalla ipersuperficie (aperta) Γ descritta dalla varietà γ_x al variare di x $(0 < x < 1)$:

(1,5) $$FT = \Gamma + \Gamma_0 + \Gamma_1 .$$

Diciamo n la normale a Γ volta verso l'interno di T; si vede subito che per i suoi coseni direttori sussistono le

(1,6) $$\cos(xn) = -\frac{J_0}{N}, \quad \cos(y_k n) = \frac{J_k}{N}, \quad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

ove si è posto

(1,6') $$J_0 = \frac{\partial(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)}{\partial(x, t_1, t_2, \ldots, t_{m-1})},$$
$$N = +\sqrt{J_0^2 + J_1^2 + \ldots + J_m^2} = +\sqrt{J_0^2 + M^2}.$$

L'elemento $d\sigma$ di misura di Γ è espresso dalla

(1,7) $$d\sigma = N\,dx\,dt_1\,dt_2 \ldots dt_{m-1}.$$

Ricordiamo ancora che, detta $f(x, y_1, y_2, \ldots, y_m)$ una funzione definita in T e posto:

$$I(x) = \int_{\Gamma_x} f(x, y_1, y_2, \ldots, y_m)\,dy_1\,dy_2 \ldots dy_m,$$

nelle predette condizioni e sotto opportune ipotesi di regolarità per le funzioni in discorso ([5]), sussiste la seguente formula di derivazione:

$$\frac{dI}{dx} = \int_{\Gamma_x} \frac{\partial f}{\partial x} dy_1 \ldots dy_m - \int_{\gamma_x} f \cdot \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \alpha_k}{\partial x} \cos(y_k \nu_x)\,ds_x,$$

([5]) Che qui è inutile precisare perchè in questo § ci limitiamo ad esporre il metodo della trasformata parziale di Laplace sotto il suo aspetto *formale*. Tutte le ipotesi saranno precisate più avanti quando tale metodo sarà considerato sotto altra forma.

la quale, tenuto conto di (1,3) e di (1,6′), può anche scriversi

$$\frac{dI}{dx} = \int\limits_{\Gamma_x} \frac{\partial f}{\partial x} dy_1 \ldots dy_m - \int\limits_{\gamma_x} f \frac{J_0}{M} ds_x . \tag{1,8}$$

2. - Ciò premesso, passiamo a risolvere il posto problema di Dirichlet (nel quale sono assegnati i valori della funzione incognita u su Γ, Γ_0, Γ_1) ricorrendo al metodo della trasformata parziale di Laplace. Consideriamo della u la seguente trasformata:

$$\begin{aligned} & u^* (x ; p_1, p_2, \ldots, p_m) = \\ & = \int\limits_{\Gamma_x} e^{\Sigma p_k y_k} u(x, y_1, y_2, \ldots, y_m)\, dy_1\, dy_2 \ldots dy \quad , \quad \left(\sum = \sum_{k=1}^{m} \right), \end{aligned} \tag{1,9}$$

ed osserviamo che dalla (1,1) segue:

$$\begin{aligned} & \int\limits_{\Gamma_x} e^{\Sigma p_k y_k} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dy_1 \ldots dy_m + \\ & + \int\limits_{\Gamma_x} e^{\Sigma p_k y_k} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial y_m^2} \right) dy_1 \ldots dy_m - \lambda^2 u^* = F^*, \end{aligned} \tag{1,10}$$

avendo introdotto l'analoga trasformata F^* della funzione nota F.

Per esprimere il primo integrale che compare in (1,10). deriviamo due volte la (1,9) applicando la formula (1,8); otteniamo così:

$$\begin{aligned} & \int\limits_{\Gamma_x} e^{\Sigma p_k y_k} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dy_1 \ldots dy_m = \frac{d^2 u^*}{dx^2} + \\ & + \frac{d}{dx} \int\limits_{\gamma_x} e^{\Sigma p_k y_k} u \frac{J_0}{M} ds_x + \int\limits_{\gamma_x} e^{\Sigma p_k y_k} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{J_0}{M} ds_x . \end{aligned} \tag{1,11}$$

Per esprimere il secondo integrale della (1,10), applichiamo il lemma di Green; si trova:

$$(1,12)\qquad \begin{aligned}\int_{\Gamma_x} e^{\Sigma p_k y_k}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2}+\dots+\frac{\partial^2 u}{\partial y_m^2}\right) dy_1\dots dy_m &= (p_1^2+\dots+p_m^2)\,u^* + \\ &+\int_{\gamma_x}\frac{\partial e^{\Sigma p_k y_k}}{\partial \nu_x}\,u\,ds_x - \int_{\gamma_x} e^{\Sigma p_k y_k}\frac{\partial u}{\partial \nu_x}\,ds_x\,.\end{aligned}$$

In virtù delle (1,11), (1,12), la (1,10) diventa

$$(1,13)\qquad \frac{d^2u^*}{dx^2} + (p_1^2 + \dots + p_m^2 - \lambda^2)\,u^* = V(x\,;p_1,\dots,p_m)\,,$$

ove si è posto:

$$V(x\,;p_1,\dots,p_m) = F^* - \frac{d}{dx}\int_{\gamma_x} e^{\Sigma p_k y_k}\,u\,\frac{J_0}{M}\,ds_x -$$

$$-\int_{\gamma_x}\frac{\partial e^{\Sigma p_k y_k}}{\partial \nu_x}\,u\,ds_x + \int_{\gamma_x} e^{\Sigma p_k y_k}\left(-\frac{J_0}{M}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \nu_x}\right) ds_x\,.$$

Conviene trasformare l'ultimo integrale scritto, tenendo conto che dalle (1,3), (1,6) segue facilmente

$$-\frac{J_0}{M}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \nu_x}=\frac{N}{M}\frac{\partial u}{\partial n}\,,$$

ed adottare per V l'espressione seguente

$$(1,14)\qquad \begin{aligned}V(x\,;p_1,\dots,p_m) &= F^* - \frac{d}{dx}\int_{\gamma_x} e^{\Sigma p_k y_k}\,u\,\frac{J_0}{M}\,ds_x - \\ &-\int_{\gamma_x}\frac{\partial e^{\Sigma p_k y_k}}{\partial \nu_x}\,u\,ds_x + \int_{\gamma_x} e^{\Sigma p_k y_k}\,\frac{N}{M}\frac{\partial u}{\partial n}\,ds_x\,,\end{aligned}$$

nella quale i primi tre termini sono quantità note (perchè la u è nota su Γ e quindi su ogni γ_x), mentre è incognito il quarto (che dipende dai valori su Γ della derivata normale della u).

Dobbiamo ancora tener conto dei valori assegnati per la u su Γ_0 e Γ_1; a tale scopo, ponendo $x=0$ e $x=1$ nella (1,9), otteniamo

$$(1,15)\quad \begin{cases} u^*(0\,;p_1,\ldots,p_m)=\displaystyle\int_{\Gamma_0} e^{\Sigma p_k y_k}\, u\, dy_1\ldots dy_m = a_0^*(p_1,\ldots,p_m)\,, \\ u^*(1\,;p_1,\ldots,p_m)=\displaystyle\int_{\Gamma_1} e^{\Sigma p_k y_k}\, u\, dy_1\ldots dy_m = a_1^*(p_1,\ldots,p_m)\,. \end{cases}$$

La trasformata u^*, come funzione della x, deve dunque nell'intervallo $(0,1)$ verificare l'equazione differenziale (1,13) con le condizioni ai limiti (1,15). Ne segue che, posto $p_1^2+\ldots+p_m^2=p^2$, deve essere:

$$(1,16)\quad \begin{aligned} &u^*(x\,;p_1,\ldots,p_m)= \\ &=\frac{1}{sen\sqrt{p^2-\lambda^2}}\Big\{ sen\left(\sqrt{p^2-\lambda^2}\,(1-x)\right)\Big[a_0^*(p_1,\ldots,p_m)- \\ &\qquad -\int_0^x \frac{sen\left(\sqrt{p^2-\lambda^2}\,\xi\right)}{\sqrt{p^2-\lambda^2}}\,V(\xi\,;p_1,\ldots,p_m)\,d\xi\Big]+ \\ &\qquad + sen\left(\sqrt{p^2-\lambda^2}\,x\right)\Big[a_1^*(p_1,\ldots,p_m)- \\ &\qquad -\int_x^1 \frac{sen\left(\sqrt{p^2-\lambda^2}\,(1-\xi)\right)}{\sqrt{p^2-\lambda^2}}\,V(\xi\,;p_1,\ldots,p_m)\,d\xi\Big]\Big\}\,. \end{aligned}$$

Questa espressione della trasformata u^* contiene l'incognita $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ che compare in $V(x\,;p_1,\ldots,p_m)$.

Secondo un'osservazione di M. Picone (6) si può tentare la determinazione di tale incognita notando che la u^*, data dalla (1,16) e considerata come funzione dei parametri $p_1,\ldots,p_m$, è

(6) Vedi M. Picone, *Nuovi metodi di indagine per la teoria delle equazioni lineari a derivate parziali* (Rendiconti Seminario Matematico e Fisico di Milano, 1939).

singolare nei punti che annullano $sen\sqrt{p^2-\lambda^2}$ (senza annullare $\sqrt{p^2-\lambda^2}$), vale a dire nei punti delle ipersfere ω_h di equazione

$$p_1^2+p_2^2\ldots+p_m^2=h^2\pi^2+\lambda^2, \qquad (h=1,2,\ldots), \tag{1,17}$$

mentre dalla (1,9) appare che u^* deve essere una funzione *intera* dei predetti parametri.

Perciò l'espressione fra $\{\}$ della (1,16) deve annullarsi su ciascuna delle ω_h e ciò porta a concludere che deve essere per $0\leq x\leq 1$ e per $(p_1,\ldots,p_m)$ su ω_h:

$$sen(h\pi(1-x))\left[a_0^*(p_1,\ldots,p_m)-\int_0^x\frac{sen(h\pi\xi)}{h\pi}V(\xi;p_1,\ldots,p_m)\,d\xi\right]+$$

$$+\;sen(h\pi x)\left[a_1^*(p_1,\ldots,p_m)-\int_x^1\frac{sen(h\pi(1-\xi))}{h\pi}V(\xi;p_1,\ldots,p_m)\,d\xi\right]=0,$$

$$(h=1,2,\ldots).$$

Semplificando si ottiene

$$\begin{gathered}\int_0^1 sen(h\pi\xi)\,V(\xi;p_1,\ldots,p_m)\,d\xi=\\ =h\pi\left[a_0^*(p_1,\ldots,p_m)-(-1)^h a_1^*(p_1,\ldots,p_m)\right],\\ (h=1,2,\ldots;\ p_1^2+\ldots+p_m^2=h^2\pi^2+\lambda^2),\end{gathered}\tag{1,18}$$

ossia, sostituendo a V la sua espressione (1,14) e tenendo conto di quelle di F^*, a_0^*, a_1^*:

$$\int_0^1 sen(h\pi\xi)\left\{\int_{\Gamma_\xi}e^{\Sigma p_k\eta_k}F\,d\eta_1\ldots d\eta_m-\frac{d}{d\xi}\int_{\gamma_\xi}e^{\Sigma p_k\eta_k}u\frac{J_0}{M}ds_\xi-\right.$$

$$\left.-\int_{\gamma_\xi}\frac{\partial e^{\Sigma p_k\eta_k}}{\partial\nu_\xi}u\,ds_\xi+\int_{\gamma_\xi}e^{\Sigma p_k\eta_k}\frac{N}{M}\frac{\partial u}{\partial n}ds_\xi\right\}d\xi=$$

$$=h\pi\left\{\int_{\Gamma_0}e^{\Sigma p_k\eta_k}u\,d\eta_1\ldots d\eta_m-(-1)^h\int_{\Gamma_1}e^{\Sigma p_k\eta_k}u\,d\eta_1\ldots d\eta_m\right\}.$$

Conviene ulteriormente trasformare questa formula, eseguendo un'integrazione per parti sul secondo termine del primo membro ed osservando che dalle (1,3), (1,6) discende:

$$\frac{\partial e^{\Sigma p_k y_k}}{\partial \nu_x} = \frac{N}{M} \frac{\partial e^{\Sigma p_k y_k}}{\partial n} .$$

e dalle (1,4), (1,7):

$$dx\, ds_x = \frac{M}{N} d\sigma .$$

Si perviene così facilmente alla

$$(1,19) \qquad \int_\Gamma e^{\Sigma p_k \eta_k} sen\,(h\pi\xi)\, \Phi\,(Q)\, d\sigma_Q =$$

$$= \int_\Gamma \left[\frac{\partial e^{\Sigma p_k \eta_k}}{\partial n} sen\,(h\pi\xi) - h\pi e^{\Sigma p_k \eta_k} cos\,(h\pi\xi) \frac{J_0}{N} \right] \varphi\,(Q)\, d\sigma_Q +$$

$$+ h\pi \int_{\Gamma_0} e^{\Sigma p_k \eta_k} a\,(\eta_1, \dots, \eta_m)\, d\eta_1 \dots d\eta_m -$$

$$- (-1)^h h\pi \int_{\Gamma_1} e^{\Sigma p_k \eta_k} b\,(\eta_1, \dots, \eta_m)\, d\eta_1 \dots d\eta_m -$$

$$- \int_T e^{\Sigma p_k \eta_k} sen\,(h\pi\xi)\, F(Q)\, dT_Q ,$$

$$(h = 1, 2, \dots \; ; \quad p_1^2 + \dots + p_m^2 = h^2 \pi^2 + \lambda^2) ,$$

avendo posto

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \Phi\,(Q) \quad , \quad u = \varphi\,(Q) \qquad (\text{su } \Gamma) ,$$

$$u\,(0, \eta_1, \dots, \eta_m) = a\,(\eta_1, \dots, \eta_m) \quad , \quad u\,(1, \eta_1, \dots, \eta_m) = b\,(\eta_1, \dots, \eta_m) .$$

Le (1,19) costituiscono un sistema di infinite equazioni integrali nell'incognita $\Phi(Q)$; su tale sistema si possono ripetere le considerazioni svolte in « *M* » alla fine di § 1, n. 1.

Le (1,19) saranno riprese in esame al § 4, ove sarà provato che esse traducono completamente il nostro problema di Dirichlet.

§ 2. - La funzione di Green per l'iperstrato.

1. - Considerato l'iperstrato $U\,(0 \leq x \leq 1)$ dello S_{m+1} $(x, y_1, \ldots, y_m)$ $(m \geq 1)$, poniamo il *problema di* DIRICHLET consistente nel determinare in U una funzione $u\,(x, y_1, \ldots, y_m)$ che verifichi le seguenti condizioni:

$$(2,1) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial y_m^2} - \lambda^2 u = F(x, y_1, \ldots, y_m) \ (\text{in } U),$$

$$(2,2) \qquad u\,(0, y_1, \ldots, y_m) = u\,(1, y_1, \ldots, y_m) = 0\,.$$

Il problema così posto non è determinato; occorre aggiungere un'opportuna condizione di comportamento all'infinito ([7]). Ma di ciò non ci occuperemo giacchè, per i nostri scopi, è sufficiente ricavare formalmente *una* soluzione.

Indichiamo con S_m lo spazio delle variabili $y_1, \ldots, y_m$ e consideriamo dell'incognita u la seguente trasformata di FOURIER:

$$u^*(x\,; p_1, \ldots, p_m) = \int_{S_m} e^{-i\,\Sigma p_k y_k}\, u\,(x, y_1, \ldots, y_m)\, dy_1 \ldots dy_m\,,$$

$$\left(\Sigma = \sum_{k=1}^{m}\right).$$

Ammesso che $u, \dfrac{\partial u}{\partial y_1}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial y_m}$ siano infinitesime all'infinito, si trova che dalle (2,1), (2,2) discende:

$$\frac{d^2 u^*}{dx^2} - (p_1^2 + \ldots + p_m^2 + \lambda^2)\, u^* = F^*\,,$$

$$u^*(0\,; p_1, \ldots, p_m) = u^*(1\,; p_1, \ldots, p_m) = 0\,,$$

([7]) Per il caso $\lambda = 0$, vedi D. CALIGO, *Sul problema di Dirichlet per l'iperstrato*, Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei, serie VIII, vol. I, fasc. 5, 1946.

ove F^* denota l'analoga trasformata della funzione nota F. Posto $p_1^2 + \dots + p_m^2 = p^2$, si ha pertanto:

$$u^*(x; p_1, \dots, p_m) = \int_0^1 H(x, \xi; p)\, F^*(\xi; p_1, \dots, p_m)\, d\xi =$$

$$= \int_U e^{-i \Sigma p_k \eta_k} H(x, \xi; p)\, F(\xi, \eta_1, \dots, \eta_m)\, d\xi\, d\eta_1 \dots d\eta_m ,$$

ove $H(x, \xi; p)$ designa la funzione definita dalla formula seguente:

$$H(x,\xi;p) \begin{cases} = -\dfrac{senh\,[\sqrt{p^2+\lambda^2}\xi]\ senh\,[\sqrt{p^2+\lambda^2}(1-x)]}{\sqrt{p^2+\lambda^2}\ senh\,\sqrt{p^2+\lambda^2}} & (\text{per } \xi \leq x), \\[2ex] = -\dfrac{senh\,[\sqrt{p^2+\lambda^2}x]\ senh\,[\sqrt{p^2+\lambda^2}(1-\xi)]}{\sqrt{p^2+\lambda^2}\ senh\,\sqrt{p^2+\lambda^2}} & (\text{per } \xi \geq x). \end{cases}$$

Applicando la formula di inversione della trasformata di Fourier

$$u(x, y_1, \dots, y_m) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{S_m} e^{i \Sigma p_k y_k} u^*(x; p_1, \dots, p_m)\, dp_1 \dots dp_m ,$$

risulta

$$u(x, y_1, \dots, y_m) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^m} \int_U F(\xi, \eta_1, \dots, \eta_m)\, d\xi\, d\eta_1 \dots d\eta_m \int_{S_m} e^{i \Sigma p_k (y_k - \eta_k)} H(x, \xi; p)\, dp_1 \dots dp_m .$$

D'altra parte, indicando con $G(x, y_1, \dots, y_m; \xi, \eta_1, \dots, \eta_m)$ la funzione di Green del nostro problema, deve essere:

$$u(x, y_1, \dots, y_m) =$$

$$-\frac{1}{c_{m+1}} \int_U G(x, y_1, \dots, y_m; \xi, \eta_1, \dots, \eta_m)\, F(\xi, \eta_1, \dots, \eta_m)\, d\xi\, d\eta_1 \dots d\eta_m ,$$

con

$$c_{m+1} \begin{cases} = 2\pi & \text{per } m = 1, \\[2ex] = (m-1) \dfrac{2\pi^{\frac{m+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)} & \text{per } m > 1, \end{cases}$$

e perciò dal confronto delle due espressioni della u si trae:

$$(2,3)\qquad \begin{aligned} &G(x, y_1, \ldots, y_m; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_m) = \\ &= -\frac{c_{m+1}}{(2\pi)^m} \int_{S_m} e^{i\Sigma p_k (y_k - \eta_k)} H(x, \xi; p)\, dp_1 \ldots dp_m . \end{aligned}$$

È questa la funzione di GREEN che ci interessa considerare. Nella (2,3) la G appare come un trasformata m—*pla* di FOURIER (coi parametri $y_1 - \eta_1, \ldots, y_m - \eta_m$) della funzione H, pensata come funzione di $p_1, \ldots, p_m$. Siccome la H dipende soltanto da $p = \sqrt{p_1^2 + \ldots + p_m^2}$, è noto che la G dipende soltanto da $\rho = \sqrt{(y_1 - \eta_1)^2 + \ldots + (y_m - \eta_m)^2}$ e che l'integrale m—*plo* si può trasformare in un integrale semplice (8).

Supposto che m sia *dispari* e posto $m = 2\mu + 1$, ($\mu = 0, 1, 2, \ldots$), $s = \rho^2$, si trova (9):

$$(2,4)\qquad \begin{aligned} &G_{2\mu+2} = \\ &= -\frac{c_{2\mu+2}}{(2\pi)^{2\mu+1}} \cdot (-1)^\mu 2^{2\mu+1} \pi^\mu \frac{d^\mu}{ds^\mu} \int_0^\infty H(x,\xi;p) \cos(p\sqrt{s})\, dp = \\ &= -h_\mu \frac{d^\mu}{ds^\mu} \int_0^\infty H(x, \xi; p) \cos(p\sqrt{s})\, dp , \end{aligned}$$

con

$$h_\mu \begin{cases} = 2 & \text{per } \mu = 0 , \\ = (-1)^\mu \dfrac{4}{(\mu - 1)!} & \text{per } \mu > 0 . \end{cases}$$

Invece, supposto m *pari* e posto $m = 2\mu + 2$, ($\mu = 0, 1, 2, \ldots$), $s = \rho^2$, si trova:

(8) Vedi S. BOCHNER, *Vorlesungen über Fouriersche Integrale*, Leipzig 1932, p. 186–187.

(9) Scriviamo $G_{2\mu+2}$ in luogo di G per mettere in evidenza la dimensione $m + 1 = 2\mu + 2$ dell'iperstrato U; analogamente più sotto scriveremo $G_{2\mu+3}$.

$$G_{2\mu+3} =$$

$$(2,5) \qquad \begin{aligned} &= -\frac{c_{2\mu+3}}{(2\pi)^{2\mu+2}} \cdot (-1)^{\mu} 2^{2\mu+1} \pi^{\mu+1} \frac{d^{\mu}}{ds^{\mu}} \int_0^{\infty} H(x,\xi;p)\, p J_0(p\sqrt{s}) dp = \\ &= -k_{\mu} \frac{d^{\mu}}{ds^{\mu}} \int_0^{\infty} H(x,\xi;p)\, p J_0(p\sqrt{s})\, dp , \end{aligned}$$

ove J_0 è la funzione di Bessel di 1ª specie e ordine zero, ed inoltre si ha:

$$k_{\mu} \begin{cases} = 2 & \text{per } \mu = 0 , \\ = (-1)^{\mu} \dfrac{2^{\mu+1}}{(2\mu-1)!!} & \text{per } \mu > 0 . \end{cases}$$

2. - Dalle (2,4), (2,5) possiamo dedurre per la funzione G un primo sviluppo in serie che ci sarà utile in seguito. Lo otterremo osservando che per la funzione H vale il seguente sviluppo di Fourier:

$$H(x, \xi; p) = -2 \sum_{h=1}^{\infty} \frac{sen(h\pi x)\, sen(h\pi\xi)}{p^2 + q_h^2} , \qquad (q_h = \sqrt{h^2\pi^2 + \lambda^2}) ,$$

uniformemente convergente per ogni valore reale di x, ξ, p, λ.

Allora dalla (2,4) discende:

$$G_{2\mu+2} = 2 h_{\mu} \frac{d^{\mu}}{ds^{\mu}} \int_0^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{sen(h\pi x)\, sen(h\pi\xi)}{p^2 + q_h^2} \cos(p\sqrt{s})\, dp =$$

$$= 2 h_{\mu} \frac{d^{\mu}}{ds^{\mu}} \sum_{h=1}^{\infty} sen(h\pi x)\, sen(h\pi\xi) \int_0^{\infty} \frac{\cos(p\sqrt{s})}{p^2 + q_h^2}\, dp ,$$

essendo manifestamente lecita l'integrazione termine a termine; ma si ha:

$$\int_0^\infty \frac{\cos(p\sqrt{s})}{p^2+q_h^2}\,dp = \frac{\pi}{2q_h}e^{-q_h\sqrt{s}},$$

e perciò:

$$G_{2\mu+2} = \pi h_\mu \frac{d^\mu}{ds^\mu}\sum_{h=1}^\infty \frac{1}{q_h}e^{-q_h\sqrt{s}}\,sen(h\pi x)\,sen(h\pi\xi)\,.$$

Supposto $s>0$, in quest'ultima formula si può evidentemente derivare termine a termine e risulta ([10]):

(2,6)
$$G_{2\mu+2} = \pi h_\mu \sum_{h=1}^\infty \frac{1}{q_h}\frac{d^\mu e^{-q_h\sqrt{s}}}{ds^\mu}\,sen(h\pi x)\,sen(h\pi\xi),\quad s>0.$$

Facciamo l'analogo calcolo per $G_{2\mu+3}$. Dalla (2,5) si trae:

$$G_{2\mu+3} = 2k_\mu \frac{d^\mu}{ds^\mu}\int_0^\infty \sum_{h=1}^\infty \frac{sen(h\pi x)\,sen(h\pi\xi)}{p^2+q_h^2}\,p\,J_0(p\sqrt{s})\,dp,$$

e poichè, supposto $s>0$, è lecito integrare per serie:

$$G_{2\mu+3} = 2k_\mu \frac{d^\mu}{ds^\mu}\sum_{h=1}^\infty sen(h\pi x)\,sen(h\pi\xi)\int_0^\infty \frac{p\,J_0(p\sqrt{s})}{p^2+q_h^2}\,dp;$$

ma si ha ([11]):

$$\int_0^\infty \frac{p\,J_0(p\sqrt{s})}{p^2+q_h^2}\,dp = K_0(q_h\sqrt{s}),\qquad (s>0),$$

ove K_0 è la funzione di Bessel, di argomento immaginario, di 2ª specie e ordine zero, e perciò si conclude che:

(2,7)
$$G_{2\mu+3} = 2k_\mu \sum_{h=1}^\infty \frac{d^\mu K_0(q_h\sqrt{s})}{ds^\mu}\,sen(h\pi x)\,sen(h\pi\xi),\qquad (s>0).$$

(10) Se $\mu=0$ (caso della *striscia* nel piano) la (2,6) vale anche per $s=0$.
(11) Vedi «*M*», § 2, n. 1.

Conviene ulteriormente trasformare le formule (2,6), (2,7), esprimendo le derivate indicate per mezzo delle funzioni K_ν di Bessel [12], il che consentirà di ridurle ad una formula unica.

Per quanto riguarda la (2,6), ricordando che:

$$K_{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, e^{-z},$$

si può scrivere:

$$e^{-q_h \sqrt{s}} = \left(\frac{2\, q_h \sqrt{s}}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} K_{-\frac{1}{2}}(q_h \sqrt{s}) .$$

Ponendo $q_h \sqrt{s} = z$, si ha $\frac{d}{ds} = \frac{q_h^2}{2}\,\frac{d}{zdz}$ e quindi:

$$\frac{d^\mu\, e^{-q_h \sqrt{s}}}{ds^\mu} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{q_h^{2\mu}}{2^\mu} \left(\frac{d}{zdz}\right)^\mu \frac{K_{-\frac{1}{2}}(z)}{z^{-\frac{1}{2}}} \; ;$$

ma sussiste la nota formula

$$\left(\frac{d}{zdz}\right)^\mu \frac{K_\nu(z)}{z^\nu} = (-1)^\mu \frac{K_{\mu+\nu}(z)}{z^{\mu+\nu}} \tag{2,8}$$

e perciò:

$$\frac{d^\mu\, e^{-q_h \sqrt{s}}}{ds^\mu} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{q_h^{2\mu}}{2^\mu} (-1)^\mu \frac{K_{\mu-\frac{1}{2}}(z)}{z^{\mu-\frac{1}{2}}} \; ,$$

ovvero, ritornando alla variabile s e ricordando che $\sqrt{s} = \rho$:

$$\frac{d^\mu\, e^{-q_h \sqrt{s}}}{ds^\mu} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{(-1)^\mu}{2^\mu}\, q_h^{\mu+\frac{1}{2}} \frac{K_{\mu-\frac{1}{2}}(q_h \rho)}{\rho^{\mu-\frac{1}{2}}} \; .$$

(12) Vedi G. N. Watson, *Theory of Bessel functions*, Cambridge, 1922, p. 79–80.

Sostituendo nella (2,6) si ottiene infine [13]:

(2,6')
$$G_{2\mu+2} = \alpha_\mu \sum_{h=1}^{\infty} q_h^{\mu-\frac{1}{2}} \frac{K_{\mu-\frac{1}{2}}(q_h \rho)}{\rho^{\mu-\frac{1}{2}}} sen(h\pi x)\, sen(h\pi\xi), \qquad (\rho > 0),$$

ove si è posto:

$$\alpha_\mu \begin{cases} = 2\sqrt{2\pi} & \text{per } \mu = 0, \\ = \dfrac{\sqrt{2\pi}}{2^{\mu-2}(\mu-1)!} & \text{per } \mu > 0. \end{cases}$$

Analogamente si procede per la (2,7); posto $q_h\sqrt{s} = z$ e applicando la (2,8), si ottiene:

$$\frac{d^\mu K_0(q_h\sqrt{s})}{ds^\mu} = \frac{q_h^{2\mu}}{2^\mu}\left(\frac{d}{zdz}\right)^\mu K_0(z) = \frac{q_h^{2\mu}}{2^\mu}(-1)^\mu \frac{K_\mu(z)}{z^\mu},$$

e quindi, sostituendo nella (2,7):

(2,7')
$$G_{2\mu+3} = \beta_\mu \sum_{h=1}^{\infty} q_h^\mu \frac{K_\mu(q_h\rho)}{\rho^\mu} sen(h\pi x)\, sen(h\pi\xi), \quad (\rho > 0),$$

ove si ha:

$$\beta_\mu \begin{cases} = 4 & \text{per } \mu = 0, \\ = \dfrac{4}{(2\mu-1)!!} & \text{per } \mu > 0. \end{cases}$$

È facile constatare che le due formule (2,6'), (2,7') equivalgono all'unica:

[13] Per $\mu = 0$ la (2,6') si riduce alla

$$G_2(x, y; \xi, \eta) = 2\pi \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{q_h} e^{-q_h|y-\eta|} sen(h\pi x)\, sen(h\pi\xi)$$

(cfr. «*M*», § 2, n. 1) e vale anche per $\rho = 0$ ossia $y = \eta$ (purchè si supponga allora $x \neq \xi$).

$$
(2,9) \quad \boxed{\begin{aligned} & G(x, y_1, \dots, y_m; \xi, \eta_1, \dots, \eta_m) = \\ & = \gamma_{m+1} \sum_{h=1}^{\infty} q_h^{\frac{m-2}{2}} \frac{K_{\frac{m-2}{2}}(q_h \rho)}{\rho^{\frac{m-2}{2}}} sen(h\pi x)\, sen(h\pi\xi) \end{aligned}}, \quad (\rho > 0),
$$

col seguente significato dei simboli:

$$
(2,10) \quad \begin{aligned} & q_h = \sqrt{h^2\pi^2 + \lambda^2}, \\ & \rho = \sqrt{(y_1 - \eta_1)^2 + \dots + (y_m - \eta_m)^2}, \\ & \gamma_{m+1} \begin{cases} = 2\sqrt{2\pi} & \text{per } m+1 = 2, \\ = 2^{\frac{m+2}{2}} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) / \Gamma(m-1) & \text{per } m+1 > 2. \end{cases} \end{aligned}
$$

Si è già osservato che, per $m + 1 > 2$, la (2,9) è valida soltanto per $\rho > 0$; essa infatti perde significato per $\rho = 0$, giacchè tutti i termini della serie diventano infiniti. È da notare che $\rho = 0$ significa $y_1 = \eta_1, \dots, y_m = \eta_m$ ossia che i punti $P(x_1, y_1, \dots, y_m)$, $Q(\xi, \eta_1, \dots, \eta_m)$ sono situati su una medesima retta perpendicolare ai due iperpiani $x = 0$, $x = 1$ che limitano l'iperstrato U.

Però la non validità della (2,9) per $\rho = 0$ non deve corrispondere ad una singolarità della G per $y_1 = \eta_1, \dots, y_m = \eta_m$ perchè, come è noto, al variare di P, Q in U, la G deve essere singolare solo per $P \equiv Q$. Ciò sarà confermato da un altro sviluppo in serie che ora andiamo a ricavare; esso mostrerà anche che, come deve accadere, la singolarità per $P \equiv Q$ della G è quella stessa della soluzione fondamentale $v(r)$ $[r = \overline{PQ} = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y_1 - \eta_1)^2 + \dots + (y_m - \eta_m)^2}]$ dell'equazione:

$$
(2,11) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial y_m^2} - \lambda^2 u = 0.
$$

3. - Prima di ricavare lo sviluppo in serie ora annunciato, cominciamo col ricordare che la soluzione fondamentale $v(r)$ dell'equazione (2,11), in $m + 1$ variabili, si esprime come segue:

$$(2,12)\qquad v(r)\begin{cases} = \log \dfrac{1}{r} & \text{per } \lambda = 0\,,\, m+1 = 2\,, \\ = \dfrac{1}{r^{m-1}} & \text{per } \lambda = 0\,,\, m+1 > 2\,, \\ = K_0(\lambda r) & \text{per } \lambda > 0\,,\, m+1 = 2\,, \\ = \dfrac{2}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}\left(\dfrac{\lambda}{2}\right)^{\frac{m-1}{2}} \dfrac{K_{\frac{m-1}{2}}(\lambda r)}{r^{\frac{m-1}{2}}} & \text{per } \lambda > 0\,,\, m+1 > 2\,. \end{cases}$$

Ciò premesso, osserviamo che la funzione $H(x, \xi; p)$ che compare nelle (2,4), (2,5) si può anche esprimere con una formula unica, valida tanto per $\xi \leq x$ quanto per $\xi \geq x$.

Posto $q = \sqrt{p^2 + \lambda^2}$, si ha infatti:

$$H(x, \xi; p) = -\frac{e^{-q|x-\xi|} - e^{-q(x+\xi)}}{2q} -$$

$$-\frac{1}{2q}\,\frac{e^{-q(2+x-\xi)} + e^{-q(2-x+\xi)} - e^{-q(2+x+\xi)} - e^{-q(2-x-\xi)}}{1 - e^{-2q}}\,,$$

e di conseguenza, per $q > 0$:

$$(2,13)\qquad H(x, \xi; p) = -\frac{e^{-q|x-\xi|} - e^{-q(x+\xi)}}{2q} -$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-q(2n+x-\xi)} + e^{-q(2n-x+\xi)} - e^{-q(2n+x+\xi)} - e^{-q(2n-x-\xi)}}{2q}\,,$$

la serie scritta riuscendo uniformemente convergente per $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq \xi \leq 1$, $q \geq \sigma$ (con $\sigma > 0$ arbitrario).

Cominciamo a supporre $\lambda > 0$ e $m + 1$ pari $(= 2\mu + 2)$. Riprendiamo la (2,4) e sostituiamo a H lo sviluppo (2,13); otteniamo:

$$G_{2\mu+2} = \frac{1}{2} h_\mu \frac{d^\mu}{ds^\mu}\left\{\int_0^\infty \frac{e^{-q|x-\xi|} - e^{-q(x+\xi)}}{q} \cos(p\sqrt{s})\, dp + \right.$$

$$\left. + \int_0^\infty \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-q(2n+x-\xi)} + e^{-q(2n-x+\xi)} - e^{-q(2n+x+\xi)} - e^{-q(2n-x-\xi)}}{q} \cos(p\sqrt{s})\, dp \right\}.$$

Tenuto conto che $q = \sqrt{p^2 + \lambda^2} \geq \lambda > 0$ (onde la serie scritta converge uniformemente) e del fatto che per $a \geq 0$, $a^2 + b^2 > 0$, vale la formula [14] :

$$\int_0^\infty \frac{e^{-a\sqrt{p^2+\lambda^2}}}{\sqrt{p^2+\lambda^2}} \cos(bp)\, dp = K_0\left(\lambda\sqrt{a^2+b^2}\right),$$

si deduce, integrando per serie e supponendo $(x-\xi)^2 + s = \overline{PQ}^2 > 0$:

$$(2{,}14)\qquad G_{2\mu+2} = \frac{1}{2} h_\mu \frac{d^\mu}{ds^\mu}\Big\{ K_0(\lambda\sqrt{(x-\xi)^2+s}) - K_0(\lambda\sqrt{(x+\xi)^2+s}) +$$

$$+ \sum_{n=1}^\infty \Big[K_0(\lambda\sqrt{(2n+x-\xi)^2+s}) + K_0(\lambda\sqrt{(2n-x+\xi)^2+s}) -$$

$$- K_0(\lambda\sqrt{(2n+x+\xi)^2+s}) - K_0(\lambda\sqrt{(2n-x-\xi)^2+s}) \Big]\Big\}.$$

Con una facile applicazione della (2,8) si deduce poi che:

$$\frac{d^\mu}{ds^\mu} K_0(\lambda\sqrt{a^2+s}) = (-1)^\mu \frac{\lambda^\mu}{2^\mu} \frac{K_\mu(\lambda\sqrt{a^2+s})}{\sqrt{a^2+s}^{\,\mu}},$$

e perciò, ricordando che $K_\nu(z) \sim \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-z}$ per $(z \to \infty)$, si vede che nella (2,14) si può derivare termine a termine. Si ottiene perciò, per $\overline{PQ} > 0$:

$$(2{,}15)\qquad G_{2\mu+2} = \frac{1}{2} h_\mu (-1)^\mu \frac{\lambda^\mu}{2^\mu}\Big\{ \frac{K_\mu(\lambda\sqrt{(x-\xi)^2+s})}{\sqrt{(x-\xi)^2+s}^{\,\mu}} -$$

$$- \frac{K_\mu(\lambda\sqrt{(x+\xi)^2+s})}{\sqrt{(x+\xi)^2+s}^{\,\mu}} + \sum_{n=1} \Big[\frac{K_\mu(\lambda\sqrt{(2n+x-\xi)^2+s})}{\sqrt{(2n+x-\xi)^2+s}^{\,\mu}} +$$

$$+ \frac{K_\mu(\lambda\sqrt{(2n-x+\xi)^2+s})}{\sqrt{(2n-x+\xi)^2+s}^{\,\mu}} - \frac{K_\mu(\lambda\sqrt{(2n+x+\xi)^2+s})}{\sqrt{(2n+x+\xi)^2+s}^{\,\mu}} -$$

$$- \frac{K_\mu(\lambda\sqrt{(2n-x-\xi)^2+s})}{\sqrt{(2n-x-\xi)^2+s}^{\,\mu}} \Big]\Big\}.$$

[14] Vedi «*M*», § 2, n. 1.

Osserviamo ora che:

$$\frac{1}{2} h_\mu (-1)^\mu \frac{\lambda^\mu}{2^\mu} \begin{cases} = 1 & \text{per } \mu = 0 \,, \\ = \dfrac{2}{\Gamma(\mu)} \left(\dfrac{\lambda}{2}\right)^\mu & \text{per } \mu > 0 \,; \end{cases}$$

ne segue, essendo $\mu = \frac{m-1}{2}$ e ricordando le (2,12), che ogni termine a secondo membro di (2,15) è uguale alla soluzione fondamentale $v(r)$ della (2,11), calcolata per un certo valore dell'argomento r, che può subito essere interpretato considerando del punto P dell'iperstrato U i successivi simmetrici rispetto agli iperpiani $x = 0$, $x = 1$, (cioè le successive *immagini* di P). Indicando con $P_{0,n}$ [oppure $P_{1,n}$] l'immagine di P a cui si perviene dopo n simmetrie a cominciare da quella rispetto all'iperpiano $x = 0$ [oppure $x = 1$] e ponendo $\overline{PQ} = r$, $\overline{P_{0,n}Q} = r_{0,n}$, $\overline{P_{1,n}Q} = r_{1,n}$, si vede facilmente che i vari radicali che compaiono nella (2,15) sono ordinatamente uguali a r, $r_{0,1}$, $r_{0,2n}$, $r_{1,2n}$, $r_{0,2n+1}$, $r_{1,2n-1}$ e perciò la (2,15) assume la forma (scrivendo G in luogo di $G_{2\mu+2}$):

$$\text{(2,16)} \qquad \boxed{\begin{aligned} G = v(r) - v(r_{0,1}) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} [v(r_{0,2n}) + v(r_{1,2n}) - v(r_{0,2n+1}) - v(r_{1,2n-1})] \end{aligned}} \,.$$

A questa medesima serie si arriva nel caso $\lambda > 0$ e $m + 1$ dispari $(= 2\mu + 3)$, partendo dalla formula (2,5), sostituendo a H la sua espressione (2,13) e tenendo conto delle relazioni:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-a\sqrt{p^2+\lambda^2}}}{\sqrt{p^2+\lambda^2}} p J_0(bp)dp = \frac{e^{-\lambda\sqrt{a^2+b^2}}}{\sqrt{a^2+b^2}} \,, \quad (a \geq 0,\ a^2 + b^2 > 0)\ (^{15}),$$

([15]) Con la sostituzione $\sqrt{p^2+\lambda^2} = t$, l'integrale in discorso si muta in

$$\int_\lambda^\infty e^{-at} J_0(b\sqrt{t^2-\lambda^2})\,dt = \frac{e^{-\lambda\sqrt{a^2+b^2}}}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

(vedi, ad esempio, il mio volume *Calcolo simbolico*, Bologna, 1943, p. 97).

$$\frac{d^\mu}{ds^\mu}\frac{e^{-\lambda\sqrt{a^2+s}}}{\sqrt{a^2+s}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}(-1)^\mu\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{\mu+\frac{1}{2}}\frac{K_{\mu+\frac{1}{2}}(\lambda\sqrt{a^2+s})}{(\sqrt{a^2+s})^{\mu+\frac{1}{2}}}\,.$$

Passiamo ora al caso $\lambda=0$, Avendosi $q=p$, la serie (2,13) non è più uniformemente convergente per $p>0$, ma soltanto per $p\geq\sigma>0$. Però essa converge anche nel punto $p=0$ e quindi le sue somme parziali si mantengono limitate nell'intervallo $0\leq p\leq\sigma$. Scritto perciò, a partire dalla (2,4):

$$G_{2\mu+2}=\frac{1}{2}h_\mu\frac{d^\mu}{ds^\mu}\left\{\int_0^\infty\frac{e^{-p|x-\xi|}-e^{-p(x+\xi)}}{p}+\right.$$

$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-p(2n+x-\xi)}+e^{-p(2n-x+\xi)}-e^{-p(2n+x+\xi)}-e^{-p(2n-x-\xi)}}{p}\right\}\cos(p\sqrt{s})dp,$$

si può integrare termine a termine e allora, tenendo conto delle relazioni

$$\int_0^\infty\frac{e^{-ap}-e^{-bp}}{p}\cos(cp)\,dp=\log\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{a^2+c^2}}\,,$$

$$\frac{d^\mu}{ds^\mu}\log\frac{1}{\sqrt{a^2+s}}=(-1)^\mu\frac{(\mu-1)!}{2}\frac{1}{(a^2+s)^\mu}\,,$$

e delle (2,12), si perviene ancora alla (2,16).

E lo stesso accade per $G_{2\mu+3}$, partendo dalla (2,5) ed applicando le

$$\int_0^\infty e^{-ap}J_0(bp)\,dp=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\,,$$

$$\frac{d^\mu}{ds^\mu}\frac{1}{\sqrt{a^2+s}}=(-1)^\mu\frac{(2\mu-1)!!}{2^\mu}\frac{1}{\sqrt{a^2+s}^{\,2\mu+1}}\,.$$

§ 3. - Studio di due particolari trasformazioni funzionali.

1. - Al § 1 abbiamo incontrato la funzione $f = e^{\sum_{k=1}^{m} p_k \eta_k}$ definita al variare del punto reale $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m)$ nello spazio S_m e del punto $(p_1, p_2, \ldots, p_m)$, reale od immaginario, su una ipersfera ω di equazione $p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_m^2 = q^2$ con $q > 0$.

Supposto $m \geq 2$, sarà utile trasformare l'espressione di f, eseguendo un cambiamento delle variabili $p_1, p_2, \ldots, p_m$ col porre:

$$(3,1) \qquad \begin{gathered} p_1 = i\gamma_1, \; p_2 = i\gamma_2, \ldots, p_{m-2} = i\gamma_{m-2}, \; p_{m-1} = \alpha + \beta, \\ p_m = i(\alpha - \beta). \end{gathered}$$

L'equazione dell'ipersfera ω diventa

$$\beta = \frac{1}{4\alpha}\left(q^2 + \sum_{k=1}^{m-2} \gamma_k^2\right)$$

e di conseguenza risulta

$$(3,2) \qquad \begin{aligned} f &= f(\gamma_1, \ldots, \gamma_{m-2}, \alpha; \eta_1, \ldots, \eta_m) = \\ &= e^{i\sum_{k=1}^{m-2} \gamma_k \eta_k + \alpha(\eta_{m-1} + i\eta_m) + \frac{1}{4\alpha}\left(q^2 + \sum_{k=1}^{m-2} \gamma_k^2\right)(\eta_{m-1} - i\eta_m)}, \end{aligned}$$

col punto $(\gamma_1, \ldots, \gamma_{m-2}, \alpha)$, reale od immaginario, variabile in S_{m-1} ed il punto reale $(\eta_1, \ldots, \eta_m)$ variabile in S_m.

Al § 2 abbiamo poi incontrato funzioni di questo tipo

$$(3,3) \qquad g = g(y_1, \ldots, y_m; \eta_1, \ldots, \eta_m) = \frac{K_{\frac{m-2}{2}}(q\rho)}{\rho^{\frac{m-2}{2}}},$$

$$\text{con } \rho = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (y_k - \eta_k)^2},$$

definite al variare dei punti reali $(y_1, \dots, y_m)$, $(\eta_1, \dots, \eta_m)$ in S_m.

Nelle due funzioni f, g riguarderemo come variabili essenziali rispettivamente $\gamma_1, \dots, \gamma_{m-2}, \alpha$ e $y_1, \dots, y_m$ e quindi talvolta scriveremo anche $f(\gamma_1, \dots, \gamma_{m-2}, \alpha)$, $g(y_1, \dots, y_m)$; in entrambe $\eta_1, \dots, \eta_m$ saranno considerati come parametri.

Vogliamo ora dimostrare che, con opportune limitazioni sulle variabili e sui parametri, ciascuna delle funzioni f, g può riguardarsi come una *trasformata* dell'altra.

Precisamente *supporremo il punto* $(\gamma_1, \dots, \gamma_{m-2}, \alpha)$ *reale e variabile in tutto* S_{m-1} *e, fissati ad arbitrio due numeri* c', c'' *(con* $c' < c''$*), manterremo il punto* $(y_1, \dots, y_m)$ *nel semispazio* $y_{m-1} \geq c''$ *di* S_m *ed il punto* $(\eta_1, \dots, \eta_m)$ *nel semispazio* $\eta_{m-1} \leq c'$, *dimodochè sarà sempre*

$$y_{m-1} - \eta_{m-1} \geq c'' - c' > 0 . \tag{3,4}$$

Sussiste allora il seguente teorema dovuto a L. Amerio [16].

Nelle ipotesi poste, la funzione g *è trasformata dalla* f *secondo la formula*

$$(2\pi q)^{\frac{m-2}{2}} g(y_1, y_2, \dots, y_m) = \tag{3,5}$$

$$= \int_\sigma \frac{1}{2\alpha} e^{-i \sum_{k=1}^{m-2} \gamma_k y_k - \alpha(y_{m-1} + i y_m) - \frac{1}{4\alpha}(q^2 + \sum_{k=1}^{m-2} \gamma_k^2)(y_{m-1} - i y_m)} \cdot$$

$$\cdot f(\gamma_1, \dots, \gamma_{m-2}, \alpha)\, d\gamma_1 \dots d\gamma_{m-2}\, d\alpha ,$$

ove σ *denota il semispazio* $\alpha \geq 0$ *dello* S_{m-1} *delle variabili* $\gamma_1, \dots, \gamma_{m-2}, \alpha$. *L'integrale scritto è assolutamente convergente.*

Invertiremo ora la trasformazione (3,5) dimostrando quest'altro teorema:

[16] Vedi L. Amerio, op. cit. in [3], n. 3 *b*).

Nelle ipotesi del teorema precedente, comunque si fissi $y_{m-1} \geq c''$, la funzione f è per $\alpha > 0$ trasformata della g secondo la formula

$$f(\gamma_1, \ldots, \gamma_{m-2}, \alpha) = \tag{3,6}$$

$$= C\left(\alpha + \frac{c^2}{4\alpha}\right) e^{\left(\alpha + \frac{c^2}{4\alpha}\right) y_{m-1}} \int\limits_{S_{m-1}} e^{i \sum_{k=1}^{m-2} \gamma_k y_k + i\left(\alpha - \frac{c^2}{4\alpha}\right) y_m} \cdot$$

$$\cdot\, g(y_1, \ldots, y_{m-2}, y_{m-1}, y_m)\, dy_1 \ldots dy_{m-2}\, dy_m ,$$

ove per brevità si è posto

$$C = \frac{1}{\pi}\left(\frac{q}{2\pi}\right)^{\frac{m-2}{2}}, \quad c = \sqrt{q^2 + \sum_{k=1}^{m-2} \gamma_k^2}\,.$$

L'integrale scritto è assolutamente convergente.

Dim. - Indichiamo il secondo membro di (3,6) con $B[g]$. Sostituendo alla g la sua espressione (3,3) ed osservando che, per la (3,4), è $\rho \geq c'' - c' > 0$, si vede che l'integrale che compare in $B[g]$ è assolutamente convergente, onde si può scrivere:

$$B[g] = C\left(\alpha + \frac{c^2}{4\alpha}\right) e^{\left(\alpha + \frac{c^2}{4\alpha}\right) y_{m-1}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\left(\alpha - \frac{c^2}{4\alpha}\right) y_m} dy_m$$

$$\int\limits_{S_{m-2}} e^{i \sum_{k=1}^{m-2} \gamma_k y_k} \frac{K_{\frac{m-2}{2}}\left(q\sqrt{\sum_{k=1}^{m} (y_k - \eta_k)^2}\right)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{m} (y_k - \eta_k)^2}^{\,\frac{m-2}{2}}}\, dy_1 \ldots dy_{m-2},$$

ovvero, eseguendo nell'integrale $(m-2)$ — *plo* il cambiamento di variabili $y_k - \eta_k = x_k$, $(k = 1, 2, \ldots, m-2)$:

$$B[g] = C\left(\alpha + \frac{c^2}{4\alpha}\right) e^{\left(\alpha + \frac{c^2}{4\alpha}\right) y_{m-1} + i \sum_{k=1}^{m-2} \gamma_k y_k} \tag{3,7}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\left(\alpha - \frac{c^2}{4\alpha}\right) y_m} dy_m \int_{S_{m-2}} e^{i \sum_{k=1}^{m-2} \gamma_k x_k} \frac{K_{\frac{m-2}{2}}(q\sqrt{s^2+z^2})}{\sqrt{s^2+z^2}^{\frac{m-2}{2}}} dx_1 \ldots dx_{m-2}$$

avendo posto

$$s = \sqrt{\sum_{k=1}^{m-2} x_k^2}\,, \quad z = \sqrt{(y_{m-1} - \eta_{m-1})^2 + (y_m - \eta_m)^2} > 0\,.$$

L'integrale $(m-2)$—*plo* esprime la trasformata $(m-2)$—*pla* di Fourier (rispetto alle variabili $x_1, \ldots, x_{m-2}$ e coi parametri $\gamma_1, \ldots, \gamma_{m-2}$) di una funzione sommabile in S_{m-2} che dipende soltanto da s. Tale integrale dipende dunque soltanto da $b = \sqrt{\sum_{k=1}^{m-2} \gamma_k^2}$ e si trasforma nel seguente integrale semplice (scrivendo il quale supponiamo $b > 0$; vedi S. Bochner, op. cit. in (8), p. 187):

$$B[g] = C\left(\alpha + \frac{c^2}{4\alpha}\right) e^{\left(\alpha + \frac{c^2}{4\alpha}\right) y_{m-1} + i \sum_{k=1}^{m-2} \gamma_k \eta_k}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\left(\alpha - \frac{c^2}{4\alpha}\right) y_m} dy_m \frac{(2\pi)^{\frac{m-2}{2}}}{b^{\frac{m-4}{2}}} \int_0^{\infty} \frac{K_{\frac{m-2}{2}}(q\sqrt{s^2+z^2})}{\sqrt{s^2+z^2}^{\frac{m-2}{2}}} s^{\frac{m-2}{2}} J_{\frac{m-4}{2}}(bs) ds.$$

Ricordiamo ora che sussiste la formula (vedi G. N. Watson, op. cit. in (12), p. 416):

$$(3,8)\qquad \int_0^\infty J_\mu(bs)\,\frac{K_\nu\left(a\sqrt{s^2+z^2}\right)}{\sqrt{s^2+z^2}^{\,\nu}}\,s^{\mu+1}\,ds = \frac{b^\mu}{a^\nu}\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{z}\right)^{\nu-\mu-1} K_{\nu-\mu-1}\left(z\sqrt{a^2+b^2}\right),$$

$$(a>0,\ b>0,\ \mu>-1,\ z>0);$$

applicandola con $a=q>0$, $\mu=\frac{m-4}{2}>-1$ (17), $\nu=\frac{m-2}{2}$, risulta:

$$B[g]=\frac{1}{\pi}\frac{q^{\frac{m-2}{2}}}{b^{\frac{m-4}{2}}}\left(\alpha+\frac{c^2}{4\alpha}\right)e^{\left(\alpha+\frac{c^2}{4\alpha}\right)y_{m-1}+i\sum_{k=1}^{m-2}\gamma_k\eta_k}\cdot$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\left(\alpha-\frac{c^2}{4\alpha}\right)y_m}\,\frac{b^{\frac{m-4}{2}}}{q^{\frac{m-2}{2}}}\,K_0\left(z\sqrt{q^2+b^2}\right)dy_m\,,$$

ovvero, essendo $q^2+b^2=c^2$ e tenendo conto del valore di z:

$$(3,9)\qquad B[g]=\frac{1}{\pi}\left(\alpha+\frac{c^2}{4\alpha}\right)e^{\left(\alpha+\frac{c^2}{4\alpha}\right)y_{m-1}+i\sum_{k=1}^{m-2}\gamma_k\eta_k}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\left(\alpha-\frac{c^2}{4\alpha}\right)y_m}\,K_0\left(c\sqrt{(y_{m-1}-\eta_{m-1})^2+(y_m-\eta_m)^2}\right)dy_m,$$

formula che vale anche per $b=0$, essendo (3,7), (3,9) funzioni di $\gamma_1,\dots,\gamma_{m-2}$ continue in tutto lo spazio.

(17) Supponiamo $m>2$; se $m=2$ la (3,7) coincide gia con la (3,9).

Consideriamo l' integrale $\int_{-\infty}^{\infty} \ldots . dy_m$ che compare nella (3,9); con la sostituzione $\gamma_m = \eta_m + \tau$, esso diventa

$$
\begin{aligned}
& e^{i\left(\alpha-\frac{c^2}{4\alpha}\right)\eta_m} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\left(\alpha-\frac{c^2}{4\alpha}\right)\tau} K_0\left(c\sqrt{(y_{m-1}-\eta_{m-1})^2+\tau^2}\right) d\tau = \\
(3,10) \quad & \\
& = 2e^{i\left(\alpha-\frac{c^2}{4\alpha}\right)\eta_m} \int_0^{\infty} K_0\left(c\sqrt{(y_{m-1}-\eta_{m-1})^2+\tau^2}\right) \cos\left(\alpha-\frac{c^2}{4\alpha}\right)\tau\, d\tau .
\end{aligned}
$$

Osserviamo ora che la (3,8) con $\mu = -\frac{1}{2}$, $\nu=0$ si muta nella seguente

$$
\int_0^{\infty} K_0\left(a\sqrt{s^2+x^2}\right) \cos bs\, ds = \frac{\pi}{2} \frac{e^{-x\sqrt{a^2+b^2}}}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad (a>0, x>0);
$$

applicando quest' ultima con $a = c$, $x = y_{m-1} - \eta_{m-1} > 0$, $b = \alpha - \frac{c^2}{4\alpha}$, si vede che l' espressione (3,10) vale

$$
2e^{i\left(\alpha-\frac{c^2}{4\alpha}\right)\eta_m} \cdot \frac{\pi}{2} \frac{e^{-(y_{m-1}-\eta_{m-1})\sqrt{c^2+\left(\alpha-\frac{c^2}{4\alpha}\right)^2}}}{\sqrt{c^2+\left(\alpha-\frac{c^2}{4\alpha}\right)^2}} =
$$

$$
= \frac{\pi}{\alpha+\frac{c^2}{4\alpha}} e^{i\left(\alpha-\frac{c^2}{4\alpha}\right)\eta_m - \left(\alpha+\frac{c^2}{4\alpha}\right)(y_{m-1}-\eta_{m-1})} .
$$

Sostituendo in (3,9) e semplificando, si conclude che

$$
B[g] = e^{i\sum_{k=1}^{m-2} \gamma_k \eta_k + \alpha(\eta_{m-1}+i\eta_m) + \frac{c^2}{4\alpha}(\eta_{m-1}-i\eta_m)}
$$

ossia, ricordando la (3,2) ed il significato di c:

$$B[g] = f$$

ed il teorema è dimostrato.

2. - Coi due teoremi precedenti siamo dunque in possesso di due trasformazioni lineari

$$A_{y_1 y_2 \dots y_m} \quad , \quad B_{\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{m-2} \alpha}$$

dipendenti dai parametri indicati e tali da aversi

$$(3,11) \qquad \begin{aligned} & A_{y_1 y_2 \dots y_m} [f(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{m-2}, \alpha ; \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m)] = \\ & \qquad = g(y_1, y_2, \dots, y_m ; \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m) \\ & \qquad\qquad (\text{per } y_{m-1} - \eta_{m-1} \geq \varepsilon > 0) , \end{aligned}$$

$$(3,12) \qquad \begin{aligned} & B_{\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{m-2} \alpha} [g(y_1, y_2, \dots, y_m ; \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m)] = \\ & \qquad = f(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{m-2}, \alpha ; \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m) \\ & \qquad\qquad (\text{per } \alpha > 0,\ y_{m-1} - \eta_{m-1} \geq \varepsilon > 0) ; \end{aligned}$$

inoltre $A[f]$, $B[g]$ sono espressi da integrali assolutamente convergenti.

§ 4. - Necessità e sufficienza del sistema di equazioni integrali fornite dal metodo della trasformata parziale di Laplace.

1. - Oltre alle ipotesi già fatte al § 1, n. 1, supporremo che il dominio T ivi considerato sia un dominio regolare, ossia elementarmente decomponibile in un numero finito di dominii normali ([18]). La funzione $F(x, y_1, \ldots, y_m)$ che compare in (1,1) sarà supposta hölderiana in T.

La classe C delle funzioni nella quale vogliamo cercare la soluzione del problema di Dirichlet posto al § 1 sarà costituita da quelle funzioni $u(x, y_1, \ldots, y_m)$ che godono delle seguenti proprietà ([19]):

A) sono continue in $T - FT$ assieme alle loro derivate parziali del 1° e del 2° ordine, risultando ivi verificata la (1,1);

B) al tendere del punto $P(x, y_1, \ldots, y_m)$, interno a T, ad un fissato punto Q della porzione Γ di FT, lungo la normale n a FT uscente da Q, per quasi tutte le posizioni di Q esiste finito il limite

$$\lim_{P \to Q} \frac{\partial u(P)}{\partial n} = \Phi(Q), \tag{4,1}$$

e quindi anche l'altro

$$\lim_{P \to Q} u(P) = \varphi(Q), \tag{4,2}$$

le funzioni $\Phi(Q)$, $\varphi(Q)$ riuscendo sommabili su Γ;

C) al tendere del punto $P(x, y_1, \ldots, y_m)$, interno a T, ad un fissato punto Q della porzione Γ_0 (oppure Γ_1) di FT

([18]) Per la terminologia usata vedi M. Picone, *Lezioni di Analisi infinitesimale*, Catania 1923, n. 124 (per il piano), n. 135 (per lo spazio); l'estensione agli iperspazi è immediata.

([19]) Per maggiori dettagli, vedi «*M*», § 3, n. 2.

lungo la retta $y_1 = cost., \ldots, y_m = cost.$ uscente da Q, per quasi tutte le posizioni di Q esiste finito il limite

$$(4,3) \qquad \lim_{P \to Q} u(P) \begin{cases} = a(y_1, \ldots, y_m) & (\text{su } \Gamma_0), \\ = b(y_1, \ldots, y_m) & (\text{su } \Gamma_1), \end{cases}$$

le funzioni $a(y_1, \ldots, y_m)$, $b(y_1, \ldots, y_m)$ riuscendo sommabili rispettivamente su Γ_0, Γ_1;

D) con le funzioni definite in B), C) e con la funzione di Green $G(P,Q)$ dell'iperstrato $U(0 \leq x \leq 1)$ contenente T, valgono le due formule di Green [20]:

$$(4,4) \qquad \int_\Gamma \left[\varphi(Q) \frac{\partial G(P,Q)}{\partial n} - \Phi(Q)\, G(P,Q) \right] d\sigma_Q +$$

$$+ \int_{\Gamma_0} a(\eta_1, \ldots, \eta_m) \left[\frac{\partial G(P,Q)}{\partial \xi} \right]_{\xi=0} d\eta_1 \ldots d\eta_m - \int_{\Gamma_1} b(\eta_1, \ldots, \eta_m) \left[\frac{\partial G(P,Q)}{\partial \xi} \right]_{\xi=1} d\eta_1 \ldots d\eta_m -$$

$$- \int_T F(Q)\, G(P,Q)\, dT_Q \begin{cases} = c_{m+1} u(P) & (\text{se } P \text{ è interno a } T), \\ = 0 & (\text{se } P \text{ è esterno a } T \text{ ed interno ad } U). \end{cases}$$

Il nostro problema di Dirichlet equivale dunque a cercare una $u(P)$ della classe C per la quale siano assegnate le funzioni che compaiono in (4,2), (4,3).

2. - Possiamo ora ricavare in modo rigoroso il sistema di equazioni integrali (1,19) che al § 1 abbiamo dedotto con procedimento formale [21]. Si ha infatti il seguente teorema:

I. *Se il posto problema di Dirichlet ammette una soluzione $u(x, y_1, \ldots, y_m)$ della classe C, allora la corrispondente funzione (incognita) $\Phi(Q)$ definita da* (4,1) *verifica necessariamente le infinite equazioni integrali* (1,19).

(20) Come al § 2 le coordinate di P saranno sempre indicate con x, $y_1, \ldots, y_m$; quelle di Q con $\xi, \eta_1, \ldots, \eta_m$. La costante c_{m+1} ha il valore indicato al § 2, n. 1.

(21) Come al § 1, supporremo $m \geq 2$, il caso $m = 1$ essendo già stato studiato in « *M* ».

DIM. - Per la supposta soluzione u sussiste la seconda delle (4,4). Detto c' il massimo valore della coordinata η_{m-1} al variare di Q in T e fissato $c'' > c'$, limitiamoci a considerare tale formula per i punti P che, oltre ad essere interni ad U, appartengono al semispazio $\eta_{m-1} \geq c''$ (e quindi sono esterni a T). Pensiamo di sostituire a $G(P, Q)$ il suo sviluppo in serie dato dalla (2,9). Poichè è sempre $\rho = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (y_k - \eta_k)^2} \geq c'' - c'$, tale sviluppo e quelli che si ottengono derivandolo termine a termine, rispetto alle coordinate $\xi, \eta_1, \ldots, \eta_m$ di Q, sono totalmente convergenti, cosicchè nella seconda delle (4,4) si potrà integrare termine a termine. Ponendo per brevità

$$\frac{K_{\frac{m-2}{2}}(q_h \rho)}{\rho^{\frac{m-2}{2}}} = g_h(\rho),$$

si perviene in tal modo alla formula seguente (22):

$$\sum_{h=1}^{\infty} q_h^{\frac{m-2}{2}} sen\,(h\pi x) \left\{ \int_{\Gamma} \left[- h\pi \frac{J_0}{N} g_h(\rho) \cos(h\pi \xi) + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{\partial g_h(\rho)}{\partial n} sen\,(h\pi \xi) \right] \varphi(Q)\, d\sigma_Q - \int_{\Gamma} g_h(\rho)\, sen\,(h\pi\xi)\, \Phi(Q)\, d\sigma_Q +$$

$$+ h\pi \int_{\Gamma_0} g_h(\rho) a(\eta_1, \ldots, \eta_m) d\eta_1 \ldots d\eta_m - (-1)^h h\pi \int_{\Gamma_1} g_h(\rho) b(\eta_1, \ldots, \eta_m) d\eta_1 \ldots d\eta_m -$$

$$\left. - \int_{T} g_h(\rho)\, sen\,(h\pi\xi)\, F(Q)\, dT_Q \right\} = 0,$$

dalla quale, per la chiusura del sistema $sen\,(h\pi x)$, $(h = 1, 2, \ldots)$, in $(0,1)$, si trae che l'espressione fra $\{\ \}$ deve essere nulla per

(22) Si tenga presente che, con le notazioni del § 1, si ha

$$\frac{\partial}{\partial n} = - \frac{J_0}{N} \frac{\partial}{\partial \xi} + \sum_{k=1}^{m} \frac{J_k}{N} \frac{\partial}{\partial \eta_k}.$$

$h = 1, 2, \ldots$. Si ottengono così le infinite equazioni, valide per $0 < x < 1$, $y_{m-1} \geq c''$:

$$(4,5) \qquad \int_\Gamma g_h(\rho)\, sen\,(h\pi\xi)\, \Phi(Q)\, d\sigma_Q =$$

$$= \int_\Gamma \left[\frac{\partial g_h(\rho)}{\partial n} sen\,(h\pi\xi) - h\pi g_h(\rho) \cos(h\pi\xi) \frac{J_0}{N}\right] \varphi(Q)\, d\sigma_Q +$$

$$+ h\pi \int_{\Gamma_0} g_h(\rho) a(\eta_1,\ldots,\eta_m) d\eta_1 \ldots d\eta_m - (-1)^h h\pi \int_{\Gamma_1} g_h(\rho)\, b(\eta_1,\ldots,\eta_m) d\eta_1 \ldots d\eta_m -$$

$$- \int_T g_h(\rho)\, sen\,(h\pi\xi)\, F(Q)\, dT_Q \quad , \qquad (h = 1, 2, \ldots),$$

e si scorge immediatamente che esse differiscono dalle (1,19) per il fatto che in luogo di $e^{\sum_{k=1}^{m} p_k \eta_k}$ compare $g_h(\rho)$.

Applichiamo allora ai due membri di (4,5) la trasformazione $B_{\gamma_1 \ldots \gamma_{m-2}\alpha}$ definita al § 3 (con $q = q_h = \sqrt{h^2\pi^2 + \lambda^2}$). Supponendo $\alpha > 0$ e dato che $y_{m-1} - \eta_{m-1} \geq c'' - c' > 0$, essa trasforma $g_h(\rho)$ in $f(\gamma_1, \ldots \gamma_{m-2}, \alpha; \eta_1, \ldots, \eta_m)$ [vedi la (3,12)], con f data dalla (3,2) (in cui si ponga $q = q_h$). D'altra parte tale trasformazione B è commutabile con le operazioni di integrazione indicate in (4,5) (essendo tutti gli integrali assolutamente convergenti) e lo è anche con la $\frac{\partial}{\partial n}$ che compare nel secondo integrale di (4,5) (perchè l'integrale $B\left(\frac{\partial g_h}{\partial n}\right)$ è uniformemente convergente rispetto a $\eta_1, \ldots, \eta_m$). Ne segue che, con detta trasformazione, le (4,5) si mutano in formule che differiscono dalle (1,19) per il fatto che in luogo di $e^{\sum_{k=1}^{m} p_k \eta_k}$ è scritta la f data dalla (3,2) (con $q = q_h$).

Ricordando il cambiamento di variabile (3,1) e le ipotesi fatte sui parametri $\gamma_1, \dots, \gamma_{m-2}$, α della trasformazione B, si vede che siamo arrivati a dimostrare ciascuna delle (1,19), non per tutti i punti $(p_1, \dots p_m)$ della corrispondente ipersfera ω_h di equazione $p_1^2 + \dots + p_m^2 = q_h^2$, ma soltanto per quei punti di ω_h che corrispondono a $\gamma_1, \dots, \gamma_{m-2}$ reali ed $\alpha > 0$. Ma per l'analicità, questo basta a concludere che ogni (1,19) vale su tutta la relativa ω_h, c. d. d.

3. - Si pone ora la questione della *sufficienza* del sistema di equazioni (1,19). Per risolverla ci fonderemo sul seguente teorema, la cui dimostrazione, con l'ausilio della (2,16), si svolge in modo del tutto analogo a quella del teorema dato in «*M*», § 3, n. 4 (cfr. anche L. Amerio, op. cit. in (3)):

II. *Se per certe funzioni* $\varphi(Q)$, $\Phi(Q)$, $a(\eta_1, \dots, \eta_m)$, $b(\eta_1, \dots, \eta_m)$ *soddisfacenti alle ipotesi di sommabilità dette al* n. 1, *sussiste la seconda delle* (4,4) *per ogni punto* P *esterno al dominio* T *ed interno all'iperstrato* U, *allora la funzione* $u(P)$ *definita all'interno di* T *dalla prima delle* (4,4) *risulta essere una soluzione di* (1,1) *per la quale valgono quasi ovunque le* (4,1), (4,2), (4,3); *essa appartiene quindi alla classe* C.

4. - Stabiliamo ora quest'altro teorema che inverte il teorema I e stabilisce la sufficienza delle (1,19):

III. ***Posto, per il dominio** T, **il problema di Dirichlet nella classe** C, **coll'assegnare le funzioni** $\varphi(Q)$, $a(\eta_1, \dots, \eta_m)$, $b(\eta_1, \dots, \eta_m)$ **soddisfacenti alle ipotesi di sommabilità dette al** n. 1, **supponiamo scritto in corrispondenza a tali funzioni il sistema di equazioni integrali** (1,19) **nella funzione incognita** $\Phi(Q)$. **Allora per ogni eventuale soluzione** $\Phi(Q)$ **di detto sistema, che*** *sia sommabile su* Γ, *esiste una ed una sola soluzione* $u(P)$ *della classe* C *del problema di Dirichlet, per la quale sia verificata la* (4,1). *Essa è rappresentata all'interno di* T *dalla prima delle* (4,4).

Dim. - Con detta $\Phi(Q)$ valgono le (1,19) con $(p_1, \ldots, p_m)$ sull'ipersfera ω_h. Operiamo su ω_h il cambiamento di coordinate (3,1) e trasformiamo le (1,19) con la trasformazione $A_{y_1 y_2 \ldots y_m}$ (con $q = q_h$) supponendo $y_{m-1} \geq c''$. Tenendo conto della (3,11) e svolgendo considerazioni analoghe a quelle svolte nella dimostrazione del teorema I, si vede che con tale trasformazione le (1,19) si mutano nelle (4,5). Eseguendo poi a ritroso i passaggi fatti nella dimostrazione ora citata, dalle (4,5) si deduce che vale la seconda formula di Green (4,4) per ogni punto $P(x, y_1, \ldots, y_m)$ interno all'iperstrato U e tale da aversi $y_{m-1} \geq c''$ (quindi esterno a T). Ma il primo membro di tale formula di Green è funzione analitica di P olomorfa nell'insieme aperto costituito da tutti i punti che sono interni ad U ed esterni a T (insieme che è connesso, avendo supposto $m \geq 2$) e quindi sarà uguale a zero in tale insieme, essendo tale nel sottinsieme $y_{m-1} \geq c''$. Dunque colle funzioni assegnate $\varphi(Q)$, $a(\eta_1, \ldots, \eta_m)$, $b(\eta_1, \ldots, \eta_m)$ e con la considerata $\Phi(Q)$ soluzione delle (1,19) sussiste la seconda delle (4,4).

Ciò posto, se nella classe C esiste una soluzione del nostro problema per la quale sia verificata la (4,1), essa, per definizione della classe C, deve necessariamente essere data dalla prima delle (4,4). E questa formula fornisce effettivamente una tale soluzione, in virtù del teor. II, c. d. d.

5. - Resta così provato che la risoluzione del sistema di equazioni integrali (1,19) nella funzione incognita $\Phi(Q)$ equivale perfettamente a quella del posto problema di Dirichlet nella classe C.

A differenza di quanto accade nel caso del piano ($m = 1$, vedi «*M*»), le (1,19) non costituiscono un sistema di equazioni di Fischer-Riesz, perchè, per ogni valore dell'indice h, la corrispondente equazione dipende dal punto $(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ variabile sull'ipersfera ω_h. Ma, in virtù dell'analicità, basterà, per ogni h, uguagliare i valori di tutte le derivate dei due membri della corrispondente (1,19), rispetto a $m - 1$ parametri indipendenti, calcolate in un qualsiasi punto di ω_h. - Si può così sostituire alle (1,19) un equivalente sistema di un'infinità numerabile di equazioni integrali di Ficher-Riesz, nell'incognita $\Phi(Q)$. Ogni soluzione $\Phi(Q)$ di tale sistema, sostituita nella prima delle (4,4) conduce ad una soluzione $u(P)$ del nostro problema di Dirichlet.

Circa la *chiusura* del sistema stesso, si può ripetere quanto è già stato detto in «*M*», § 3, n. 5.