RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIORGIO TREVISAN

Un teorema per i sistemi di due equazioni differenziali ordinarie

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 17 (1948), p. 219-221

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1948__17__219_0>

UN TEOREMA PER I SISTEMI DI DUE EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

Nota (*) *di* GIORGIO TREVISAN (*a Padova*).

1. - Le funzioni $f(x, y, z)$ e $g(x, y, z)$ definite in S: $a \leq x \leq b$, $-\infty < y < +\infty$, $-\infty < z < +\infty$ siano misurabili secondo LEBESGUE rispetto ad x e continue rispetto a (y, z); ed inoltre in tutto S sia

$$|f(x, y, z)| \leq k(x) \qquad |g(x, y, z)| \leq k(x)$$

con $k(x)$ sommabile in $a \leq x \leq b$.

Sia inoltre

$$(1) \qquad \begin{aligned} &|f(x, y_1, z) - f(x, y_2, z)| \leq h(x)\,|y_1 - y_2| \\ &|g(x, y, z_1) - g(x, y, z_2)| \leq h(x)\,|z_1 - z_2| \end{aligned}$$

con $h(x)$ sommabile in $a \leq x \leq b$, e siano f e g rispettivamente non decrescenti in z ed y cioè

$$(2) \qquad \begin{aligned} &[f(x, y, z_1) - f(x, y, z_2)]\,[z_1 - z_2] \geq 0, \\ &[g(x, y_1, z) - g(x, y_2, z)]\,[y_1 - y_2] \geq 0. \end{aligned}$$

(*) Pervenuta in Redazione il 21 Ottobre 1948.

Dimostriamo ora il seguente

TEOREMA: *Nelle ipotesi poste, dette* $y_1 = y_1(x)$, $z_1 = z'_1(x)$ e $y_2 = y_2(x)$ $z_2 = z_2(x)$ *due soluzioni assolutamente continue del sistema differenziale*

$$(3) \qquad \begin{aligned} y' &= f(x, y, z) \\ z' &= g(x, y, z) \end{aligned}$$

definite in $a \leq x \leq b$ (1), *tali che la funzione* $\varphi(x) = [y_1(x) - y_2(x)] \cdot [z_1(x) - z_2(x)]$ *verifichi le*

$$(4) \qquad \varphi(a) = \varphi(b) = 0$$

riesce

$$\varphi(x) \equiv 0 \qquad\qquad a \leq x \leq b\,.$$

Se il teorema non fosse vero esisterebbe almeno un intervallo $\mathbf{I}$ contenuto in $a \vdash\!\dashv b$ tale che ai suoi estremi $\varphi(x)$ è nulla mentre nel suo interno è diversa da zero. Dimostriamo come il fare una tale ipotesi porti ad un assurdo.

Non è restrittivo supporre che l'intervallo $\mathbf{I}$ coincida con $a \leq x \leq b$.

Sia per fissare le idee $\varphi(x) > 0$.

Si ha:

$$(5) \qquad \begin{aligned} (y'_1 - y'_2)(z_1 - z_2) + (z'_1 - z'_2)(y_1 - y_2) &= \\ = [f(x, y_1, z_1) - f(x, y_2, z_2)]\,[z_1 - z_2] &+ \\ + [g(x, y_1, z_1) - g(x, y_2\, z_2)]\,[y_1 - y_2] &= \\ = [f(x, y_1, z_1) - f(x, y_2, z_1)]\,[z_1 - z_2] &+ \\ + [f(x, y_2, z_1) - f(x, y_2, z_2)]\,[z_1 - z_2] &+ \\ + [g(x, y_1, z_1) - g(x, y_2, z_1)]\,[y_1 - y_2] &+ \\ + [g(x, y_2, z_1) - g(x, y_2, z_2)]\,[y_1 - y_2]&; \end{aligned}$$

(1) Le ipotesi fatte su f e g assicurano l'esistenza di almeno una siffatta soluzione.

ed integrando questa relazione da b ad x e tenuto conto della $\varphi(b) = 0$ e delle (1) e (2) segue

$$(6) \qquad 0 \leq \varphi(x) \leq 2 \left| \int_b^x h(t)\, \varphi(t)\, dt \right| ;$$

da cui notoriamente $\varphi(x) \equiv 0$ che è contro l' ipotesi.

Se si suppone $\varphi(x) < 0$, basta integrare la (5) da a ad x e procedere analogamente. Così il teorema è provato.

2. – Non porta varianti essenziali supporre invece delle (2), che f e g siano non crescenti in z ed in y.

3. – Le (4) sono certamente soddisfatte se si suppone $y_1(a) = y_2(a)$ e $z_1(b) = z_2(b)$; allora se in tutto $a \leq x \leq b$ non è ad esempio $z_1(x) \equiv z_2(x)$ si può determinare un intervallo $a \leq \alpha \leq x \leq \beta$, tale che $z_1(x) \neq z_2(x)$ in $\alpha < x < \beta$ e $z_1(\beta) = z_2(\beta)$, ma il teorema dimostrato nel n.° 1 comporta $\varphi(x) \equiv 0$ e quindi $y_1(x) \equiv y_2(x)$ in $\alpha \leq x \leq \beta$ e l' equazione

$$z' = g(x, y_1(x), z) = g(x, y_2(x), z)$$

ammetterebbe due soluzioni z_1 e z_2 distinte aventi in β lo stesso valore contro le (1). Si conclude che $y_1 \equiv y_2$, $z_1 \equiv z_2$ in $a \leq x \leq b$.

Si ottiene così un noto criterio [2].

[2] G. Scorza Dragoni – *Teoremi di unicità e confronto relativi ad un problema al contorno per un sistema di due equazioni differenziali, ordinarie, del primo ordine.* [Rendiconti Seminario Matematico Università di Padova, Vol. XII (1941) pagg. 30-50], vedere i teoremi di pag. 41-45, nella dimostrazione qui data è evitato il ricorso al lemma di pag. 37, viene sfruttato in cambio il fatto che la (6) comporta $\varphi(x) \equiv 0$.