RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

EMILIO BAIADA

Sulle funzioni continue separatamente rispetto alle variabili e gli integrali curvilinei

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 17 (1948), p. 201-218

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1948__17__201_0>

SULLE FUNZIONI CONTINUE SEPARATAMENTE RISPETTO ALLE VARIABILI E GLI INTEGRALI CURVILINEI

Nota (*) *di* EMILIO BAIADA (*a Pisa*)

1. INTRODUZIONE. – È noto che una funzione $f(x, y)$ definita nel quadrato $Q \equiv (a \leq x \leq b,\ a \leq y \leq b)$ può essere continua separatamente rispetto alla variabile x e alla variabile y, senza esserlo rispetto al complesso delle due variabili (1) (x, y). Però, come per primo ha osservato il BAIRE (2), i punti di discontinuità rispetto a (x, y) non possono invadere tutto un intervallo (superficiale); anzi Egli ha dimostrato che esiste un insieme di parallele a un asse (x o y che sia) che si proietta sull' altro asse su un insieme «residuo» (3) tutte formate di punti di continuità.

Nel caso di funzioni di più di due variabili le cose si complicano alquanto, come hanno fatto vedere HAHN (4), LE-

(*) Pervenuta in Redazione il 29 marzo 1948.

(1) Vedere p. es. E. PASCAL: *Esercizi critici di calcolo differenziale e integrale.* (Hoepli, Milano 3 ed. 1921) pp. 23-26.

Vedere anche W. H. YOUNG and G. C. YOUNG: *Continuous functions vith respect to every straight line.* Quarterly Journal (Cambridge) vol. 41 (1910) pp. 87-93.

(2) R. BAIRE: *Sur les fonctions de variables réelles.* Annali di Matematica. Vol. 3. (1899) pp. 1-122.

(3) Un insieme si dice «*residuo*» se si ottiene da un intervallo togliendo un' infinità numerabile di insiemi ovunque non densi sull' intervallo.

(4) H. HAHN: *Uber Funktionen mehrerer Veränderlichen die nach jeder einzelnen Veränderlichen stetig sind.* Math. Zeitshrift. Band 4 (1919) pag. 306 e seg.

BESGUE [5], BÖGEL [6]. Questi Autori hanno ottenuto dei risultati notevoli, però la estensione completa al caso di più di due variabili della proposizione di BAIRE è stata, solo recentemente, ottenuta da R. KERSHNER [7].

Bisogna notare però che l'indirizzo dato a tutti questi lavori è stato quello di «caratterizzare» l'insieme dei punti di discontinuità.

In un altro tipo di problemi, affine al precedente, ma affrontato con intenti diversi, L. TIBALDO [8] e il Prof. G. SCORZA DRAGONI [9] hanno dimostrato che se la $f(x, y)$ è supposta continua rispetto a y e misurabile rispetto a x, comunque fissato un ε positivo si può determinare una porzione I misurabile di (a, b) tale che:

$$mI = (b - a) - \varepsilon,$$

e che $f(x, y)$ sia uniformemente continua rispetto a y nella porzione Q^* di Q la cui x dei suoi punti è in I. Con altra terminologia si può dire che comunque fissato un n intero e positivo, si può trovare un plurintervallo Δ_n, di ampiezza minore di $1/n$, tale che comunque si fissi un ε positivo si può trovare un σ positivo per cui se y_1 e y_2 sono due numeri dell'intervallo (a, b) tali che $|y_1 - y_2| \leq \sigma$, è:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq \varepsilon,$$

qualunque sia x in (a, b) ma non appartenente a Δ_n.

(5) H. LEBESGUE: *Sur les fonctions représentable analytiquement.* Journal de Math. pures et appliquées. (6) I (1905), in particolare pag. 201.

(6) K. BÖGEL: *Uber die Stetigkeit und die Schwankung von Funktionen zweier Veränderlichen.* Math. Annalen. T. 81 (1920). pp. 64-93.

(7) R. KERSHNER: *The continuity of functions of many variables.* Transactions Am. Math. Soc. vol. 53, n. 1 (1943), pp. 83-100.

(8) L. TIBALDO: *Un teorema sulle funzioni misurabili rispetto a una e continue rispetto ad un altra variabile.* Rendiconti Ac. Lincei. Vol. II, fasc. 2 (1947).

(9) G. SCORZA DRAGONI: *Un teorema sulle funzioni continue rispetto a una e misurabili rispetto ad un' altra variabile.* Rendiconti del Seminario Matematico dell' Università di Padova, Vol. XVII (1948), pp. 102-106.

Se osserviamo che la continuità rispetto a y, uniformemente rispetto a x, associata alla continuità rispetto a x, porta alla continuità rispetto al complesso delle due variabili, ci rendiamo conto dell'affinità fra i due problemi sopra accennati. Nella seconda proposizione però non si tende a caratterizzare l'insieme dei punti di discontinuità (ciò che non avrebbe d'altronde significato) ma invece ci si propone di vedere se, trascurando al più i valori che la $f(x, y)$ assume quando la variabile x appartiene a un plurintervallo piccolo a piacere (cosa che non porta disturbo in quasi tutte le proposizioni dell'Analisi moderna) il fatto sostanziale della uniforme continuità sussiste.

Nella nota citata in (9), il Prof. Scorza Dragoni pone il problema di indagare, in questo ordine di idee, cosa si possa dire per le funzioni continue rispetto alle due variabili separatamente. Più precisamente, ci proponiamo la domanda: data una funzione $f(x, y)$ continua rispetto a x e rispetto a y separatamente nel quadrato Q, e fissato un numero intero n qualunque positivo, è possibile costruire un insieme di rettangoli coi lati paralleli agli assi, ottenuti come intersezione degli insiemi E_x, E_y formati con tutti i punti di Q che si proiettano rispettivamente sugli assi x e y su due plurintervalli Δ_n^x e Δ_n^y di ampiezza minore di $1/n$, il quale goda della proprietà che $f(x, y)$ risulti uniformemente continua rispetto a (x, y), quando si faccia astrazione dei valori che $f(x, y)$ assume su tutti i rettangoli?

La risposta è affermativa come dimostreremo nel seguito, anzi si potrà osservare che l'ipotesi della continuità rispetto a x e y è in un certo modo sovrabbondante. In ogni maniera si ritiene opportuno, in conseguenza di questa proprietà delle funzioni continue di prendere addirittura in considerazione le funzioni di due variabili che soddisfano per definizione alla proprietà precedente anche se non precisamente continue. Queste funzioni che chiameremo nel seguito «quasi continue rispetto a x e a y in modo regolare» [10] hanno valore in quanto per esse si può costruire la teoria degli integrali di linea. Faremo cioè vedere che se $A(x, y)$ e $B(x, y)$ sono quasi continue rispetto a x e a y

(10) Da non confondere con le funzioni a due variabili *discontinue* in modo regolare introdotte dal Tonelli in alcune proposizioni.

in modo regolare, allora se con C indichiamo la generica curva rettificabile e continua appartenente al quadrato Q, l' integrale:

$$\int_C A(x, y)\, dx + B(x, y)\, dy$$

ha senso e inoltre risulta *continuo*, rispetto alla curva C e alla classe delle curve ordinarie di lunghezza superiormente limitata. Per tanto si può, per essi, sviluppare una teoria dei differenziali esatti.

2. - Sia $f(x, y)$ definita per (x, y) appartenente a $Q \equiv (0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1)$ e continua rispetto a x e rispetto a y, separatamente, su tutto Q.

Siano ε e σ due numeri positivi qualunque. Sia $E'_{\varepsilon,\sigma}$ l' insieme dei punti (x, y) di Q per cui, se (x', y) appartiene a Q e $|x - x'| < \sigma$, sia:

$$|f(x, y) - f(x', y)| \leq \varepsilon.$$

Sia $E''_{\varepsilon,\sigma}$ l' insieme dei punti (x, y) di Q tali che, se (x, y') appartiene a Q e $|y - y'| < \sigma$ sia:

$$|f(x, y) - f(x, y')| \leq \varepsilon.$$

Indichiamo con $E_{\varepsilon,\sigma}$ l' insieme dei punti di Q che appartengono o a $E'_{\varepsilon,\sigma}$ o a $E''_{\varepsilon,\sigma}$. Sia $T'_{\varepsilon,\sigma}$ l' insieme dei punti $(\bar{x}, \bar{y})$ di Q tali che $(\bar{x}, y)$ appartenga a $E_{\varepsilon,\sigma}$ qualunque sia y. Sia $T''_{\varepsilon,\sigma}$ l' insieme dei punti $(\bar{x}, \bar{y})$ di Q, tali che $(x, \bar{y})$ appartenga a $E_{\varepsilon,\sigma}$ qualunque sia x. Indichiamo con $T^x_{\varepsilon,\sigma}$ la proiezione di $T'_{\varepsilon,\sigma}$ sull' asse x e con $T^y_{\varepsilon,\sigma}$ la proiezione di $T''_{\varepsilon,\sigma}$ sull' asse y. Proviamo che $T^x_{\varepsilon,\sigma}$ è chiuso.

Sia x_0 un suo punto di accumulazione, vorrà dire che comunque vicino ad esso esisterà un x_1 che appartiene all' insieme $T^x_{\varepsilon,\sigma}$.

Ciò significa che il punto (x_1, y) appartiene a $E_{\varepsilon,\sigma}$ qualunque sia y, in altre parole, dovrà avvenire che, o:

$$|f(x_1, y) - f(x', y)| \leq \varepsilon, \text{ per } |x' - x_1| < \sigma,$$

oppure che:

$$|f(x_1, y) - f(x_1, y')| \leq \varepsilon, \text{ per } |y - y'| < \sigma.$$

Ma, fissato un y, poichè:

$$\lim_{x_1 \to x_0} f(x_1, y) = f(x_0, y),$$

sarà nella prima eventualità:

$$|f(x_0, y) - f(x', y)| \leq \varepsilon \text{ per } |x' - x_0| < \sigma.$$

Analoga conclusione si deduce dalla seconda eventualità. Ciò ci permette di affermare che x_0 appartiene a $T^x_{\varepsilon,\sigma}$.

Le stesse considerazioni si svolgono anche per $T^y_{\varepsilon,\sigma}$.

Facciamo prendere a σ la successione di valori $1/r$ con r intero positivo. Indichiamo con $\Delta^x_{\varepsilon,1/n}$ e $\Delta^y_{\varepsilon,1/n}$ i plurintervalli aperti contigui a $T^x_{\varepsilon,1/n}$ e a $T^y_{\varepsilon,1/n}$ rispettivamente. Se $m > n$ è ovviamente:

$$E_{\varepsilon,1/m} \supset E_{\varepsilon,1/n}, \; T'_{\varepsilon,1/m} \supset T'_{\varepsilon,1/n}, \; T''_{\varepsilon,1/m} \supset T''_{\varepsilon,1/n},$$

$$T^x_{\varepsilon,1/m} \supset T^x_{\varepsilon,1/n}, \; T^y_{\varepsilon,1/m} \supset T^y_{\varepsilon,1/n}, \; \Delta^x_{\varepsilon,1/n} \subset \Delta^x_{\varepsilon,1/m}, \; \Delta^y_{\varepsilon,1/m} \subset \Delta^y_{\varepsilon,1/n}.$$

Supponiamo che esista un numero $0 \leq x_0 \leq 1$ che sia interno a tutti i $\Delta^x_{\varepsilon,1/n}$ qualunque sia n. Fissato $\varepsilon > 0$ si può trovare, in forza della continuità rispetto a y, un $\sigma > 0$ tale che, se $|y - y'| < \sigma$, è:

$$|f(x_0, y) - f(x_0, y')| \leq \varepsilon \quad \text{qualunque sia } y.$$

In altre parole (x_0, y) appartiene a $E_{\varepsilon,\sigma}$ qualunque sia y e quindi esso appartiene a $T'_{\varepsilon,\sigma}$, cosicchè x_0 appartiene a $T^x_{\varepsilon,\sigma}$

e non può pertanto appartenere a $\Delta^x_{\varepsilon,\sigma}$ e quindi a nessuno degli $\Delta^x_{\varepsilon,1/n}$ con $1/n < \sigma$.

Per un lemma noto ([11]), se indichiamo con $|\Delta^x_{\varepsilon,1/n}|$ la somma della serie formata con le lunghezze degli intervalli di cui è formata $\Delta^x_{\varepsilon,1/n}$ dovrà essere:

$$\lim_{n\to\infty} |\Delta^x_{\varepsilon,1/n}| = 0\,, \quad \text{qualunque sia } \varepsilon \text{ prefissato.}$$

Altrettanto si potrà dire per quanto si riferisce a $\Delta^y_{\varepsilon,1/n}$.

Comunque fissato n intero positivo, indichiamo con r_n il primo intero tale che per esso e per i successivi, sia:

$$\left|\Delta^x_{\frac{1}{n},\frac{1}{r_n}}\right| \leq \frac{1}{2^{n+1}}\,,$$

$$\left|\Delta^y_{\frac{1}{n},\frac{1}{r_n}}\right| \leq \frac{1}{2^{n+1}}\,.$$

Ciò in virtù di quanto precede si può sempre fare. Indichiamo con $\Delta^x_{\frac{1}{n}}$ il plurintervallo formato, con la costruzione classica, a partire dai plurintervalli $\Delta^x_{\frac{1}{n},\frac{1}{r_n}}$ e che li contiene tutti, sarà:

$$\left|\Delta^x_{\frac{1}{n}}\right| \leq \frac{1}{n}\,.$$

Indichiamo con $\Delta^y_{\frac{1}{n}}$ l'analogo plurintervallo contenente tutti i $\Delta^y_{\frac{1}{n},\frac{1}{r_n}}$, per esso varrà una disuguaglianza come la precedente.

Sia (x_0, y_0) un punto di Q tale che o x_0 non appartiene a $\Delta^x_{\frac{1}{n}}$, oppure y_0 non appartiene a $\Delta^y_{\frac{1}{n}}$. Supponiamo per fissare

([11]) Vedere p. es. C. Carathéodory: *Vorlesungen über Reelle Funktionen*. 2ª Edizione pag. 237. Satz 6; oppure L. Tonelli: *Sulla nozione d'integrale*. Annali di Matematica, Serie IV. T. 1 (1923), pag. 125. lemma 14.

le idee che si presenti il primo caso. Vorrà dire che comunque si fissi un $\varepsilon > 0$, si può trovare un intero p per cui $1/(n+p) < \varepsilon$, e x_0 non appartenendo a $\Delta^x_{\frac{1}{n}}$, non apparterrà a $\Delta^x_{\frac{1}{n+p}, \frac{1}{r_{n+p}}}$, cioè apparterrà a $T^x_{\frac{1}{n+p}, \frac{1}{r_{n+p}}}$. Il punto (x_0, y) appartiene a $E_{\frac{1}{n+p}, \frac{1}{r_{n+p}}}$, qualunque sia y. Sia ora (x, y) un punto qualunque tale che, o x non appartiene a $\Delta^x_{\frac{1}{n}}$, oppure y non appartiene a $\Delta^y_{\frac{1}{n}}$.

Due casi si possono presentare:

1) (x, y) appartiene a $E'_{\frac{1}{n+p}, \frac{1}{r_{n+p}}}$ e quindi:

$$|f(x_0, y) - f(x, y)| \leq \frac{1}{n+p} < \varepsilon, \quad \text{se } |x_0 - x| < \frac{1}{r_{n+p}},$$

siccome, per la continuità di $f(x_0, y)$ rispetto a y, si può trovare un $\tau > 0$ tale che, se $|y - y_0| < \tau$, è:

$$|f(x_0, y_0) - f(x_0, y)| \leq \varepsilon,$$

e associando con la precedente sarà:

$$|f(x_0, y_0) - f(x, y)| \leq 2\varepsilon, \quad \text{se } |y - y_0| < \sigma', |x - x_0| < \sigma',$$

dove σ' è il minore dei due numeri τ e $\frac{1}{r_{n+p}}$.

2) (x, y) appartiene a $E''_{\frac{1}{n+p}, \frac{1}{r_{n+p}}}$ e quindi:

$$|f(x, y_0) - f(x, y)| \leq \frac{1}{n+p} \leq \varepsilon \text{ se } |y - y_0| < \frac{1}{r_{n+p}},$$

e, per la continuità di $f(x, y_0)$ rispetto ad x, si può trovare un $\eta > 0$ tale che se $|x - x_0| < \eta$ è:

$$|f(x_0, y_0) - f(x, y_0)| \leq \varepsilon,$$

quindi sarà:

$$|f(x_0, y_0) - f(x,y)| < 2\varepsilon \text{ per } |x_0 - x| < \sigma'', |y - y_0| < \sigma''.$$

σ'' = minore dei due numeri η e $\frac{1}{r_{n+p}}$.

σ = il minore dei due numeri σ' e σ''.

Analogamente si procederà nel caso che (x, y) sia tale che y non appartenga a $\Delta^y_{\frac{1}{n}}$. Avremo così il seguente teorema:

Comunque fissato un intero n positivo, si possono trovare in corrispondenza ad esso due plurintervalli Δ^x_n e Δ^y_n di ampiezza complessiva inferiore a $\frac{1}{n}$, con $\Delta^x_n \supset \Delta^x_{n+1}$, $\Delta^y_n \supset \Delta^y_{n+1}$, tali che, comunque preso un ε positivo e se (x_0, y_0) è un punto di Q, con x_0 non appartenente a Δ^x_n, o con y_0 non appartenente ([12]) a Δ^y_n, si può trovare un $\sigma > 0$ che gode della seguente proprietà: se (x, y) è un punto di Q, con x non appartenente a Δ^x_n o y non appartenente a Δ^y_n, verificanti la disuguaglianza $|x_0 - x| < \sigma$, $|y_0 - y| < \sigma$, è pure:

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leq \varepsilon.$$

Si può osservare dalla dimostrazione, oppure ottenere con il procedimento classico, che fissato che sia n il σ dell'enunciato precedente può essere scelto in modo da andar bene per qualunque (x_0, y_0) del quadrato Q che goda della proprietà colà indicata.

3. – Premetteremo un lemma.

Sia $D^{(n)}$ un plurintervallo formato da archi di una curva C continua e rettificabile appartenente al quadrato Q. Supponiamo inoltre che $D^{(n)}$ sia tale che ogni suo arco sia interno ad almeno uno dei rettangoli $R_{i,j} \equiv (a_i \leq x \leq a_{i+1}, b_j \leq y \leq b_{j+1})$ e gli intervalli (a_i, a_{i+1}) e (b_j, b_{j+1}) formino due plurintervalli

([12]) Analogamente a quanto avviene per le funzioni di una sola variabile Δ^x_n e Δ^x_n possono pensarsi *aperti o chiusi*.

Δ_n^x *e* Δ_n^y *rispettivamente sull'asse* x *e sull'asse* y, *ciascuno di ampiezza complessiva minore* $1/n$. *Supponiamo che*

$$D^{(n)} \supset D^{(n+1)} \; ; \; \Delta_n^x \supset \Delta_{n+1}^x \; ; \; \Delta_n^y \supset \Delta_{n+1}^y .$$

Dimostriamo allora che $\lim\limits_{n \to \infty} |D^{(n)}| = 0$, *dove* $|D^{(n)}|$ *indica la somma complessiva delle lunghezze degli archi di cui* $D^{(n)}$ *è composto.*

Supponiamo che $\lim |D^{(n)}| = a > 0$, e quindi $|D^n| \geq a$.

Fissato il numero $\varepsilon < a/4$ e minore di $\pi/8$, possiamo costruire un'infinità al più numerabile di archi di C, che indichiamo con $\Delta^{(1)}$, di ampiezza complessiva minore di $a/4$, tale che all'infuori che nei punti di C interni a $\Delta^{(1)}$ esiste la tangente orientata alla curva medesima. Inoltre si può dividere C in un numero finito m di archi di estremi $A = P_1, P_2, \ldots, P_m = B$, ($A$ e B sono gli estremi della curva C), che godono della proprietà seguente: se P appartiene a un arco (P_r, P_{r+1}) ma non appartiene a $\Delta^{(1)}$ e se P' è un qualunque punto dello stesso arco e segue P, l'angolo formato dalla corda P_r, P_{r+1} e dalla corda PP' è minore di ε (13).

Dividiamo gli archi (P_r, P_{r+1}) in due categorie, mettiamo nella prima quegli archi per cui la corda P_r, P_{r+1}, faccia un angolo (in valor assoluto) inferiore o uguale a $\pi/4$ con l'asse x, nella seconda categoria gli altri (e quindi nella seconda categoria gli archi sono tali che le corde che li sottendono fanno un angolo minore di $\pi/4$ con l'asse y).

Osserviamo che questa operazione è indipendente da n.

Per tutti i punti P dell'arco (P_r, P_{r+1}), della prima categoria, e non appartenenti a $\Delta^{(1)}$, avviene quindi che la parallela per P all'asse y non può incontrare ulteriormente l'arco stesso, se non l'angolo formato da questa corda con P_r, P_{r+1} sarebbe maggiore di ε (14).

(13) Vedere p. es. L. Tonelli: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni.* Vol. I, pag. 53.

(14) Un teorema analogo a questa proposizione è stato dato da S. Banach: *Sur les lignes rectifiables* . . . Fund. Math. Vol. VIII (1925) pag. 225, ma il teorema di Banach è in un certo senso debole e non può essere utilizzato qui.

Consideriamo il plurintervallo $D^{(n)}$, e, eventualmente, suddividiamolo ulteriormente mediante quei punti P_r che risultassero interni a $D^{(n)}$, indichiamo ancora con $D^{(n)}$ questo plurintervallo. Siano $D_1^{(n)}$ e $D_2^{(n)}$ le parti di $D^{(n)}$ appartenenti rispettivamente agli archi della prima categoria e della seconda categoria. Almeno uno dei due plurintervalli $D_1^{(n)}, D_2^{(n)}$, ha ampiezza maggiore di $a/2$, supponiamo che sia $D_1^{(n)}$. Devono esserci degli archi di $D_1^{(n)}$ che non sono completamente interni a $\Delta^{(1)}$, poichè $\Delta^{(1)}$ ha ampiezza complessiva minore di $a/4$. Deve pertanto esistere almeno un arco della prima categoria che contiene degli archi di $D_1^{(n)}$, i cui punti che non appartengono a $\Delta^{(1)}$, formano un plurintervallo d'ampiezza maggiore di $a/4m$. Siccome questi punti sono tali che le parallele condotte per essi all'asse y non incontrano ulteriormente l'arco stesso, ed inoltre appartengono ad archi le cui corde sono tutte meno inclinate di $3\pi/8$ rispetto l'asse x, la proiezione di questo insieme di punti, sull'asse delle x, ha misura esterna superiore a $a/8m$.

Questo risultato, valendo qualunque sia n, è in contraddizione con le ipotesi. Analogamente si proceda nella seconda eventualità.

Come abbiamo annunciato nell'introduzione, porremo per definizione che una funzione si dirà: *quasi continua rispetto a x e a y in modo regolare* se, comunque fissato un intero n positivo, si può trovare un plurintervallo Δ_n^x e un plurintervallo Δ_n^y, ciascuno interno al precedente, di ampiezza rispettiva inferiore a $1/n$, tali che, comunque si fissi un $\varepsilon > 0$, si possa trovare un $\sigma > 0$ per cui se (x_1, y_1) e $(x_2, y_2) \varepsilon Q$; $|x_1 - x_2| < \sigma$ $|y_1 - y_2| < \sigma$ e, o x_1 non appartiene a Δ_n^x, o y_1 non appartiene a Δ_n^y, e, o x non appartiene a Δ_n^x, o y non appartiene a Δ_n^y, allora:

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq \varepsilon .$$

Supporremo inoltre sempre nel seguito [15]:

$$|f(x, y)| \leq M .$$

[15] Osserviamo che una funzione può essere continua rispetto alla x e rispetto alla y separatamente e non essere limitata, da cui la necessità della condizione qui posta.

Indichiamo con $C \equiv (x = x_0(s), y = y_0(s), 0 \leq s \leq L)$ una curva continua e rettificabile appartenente al quadrato Q. Dimostriamo che l'intégrale:

$$\int_C f(x, y)\, dx = \int_0^L f[(x_0(s), y_0(s)]\, x_0'(s)\, ds,$$

(dove $x_0'(s)$ indica la derivata di $x(s)$ dove esiste e 1 dove non esiste) ha senso.

Basterà per ciò dimostrare che $f[x_0(s), y_0(s)]$ come funzione di s risulta quasi continua. A questo fine dimostreremo che il plurintervallo formato con gli archi di C, interni ai rettangoli che si proiettano su Δ_n^x e su Δ_n^y, tende a zero quando n tende all'infinito.

Sia: $\Delta_n^x = (a_1^{(n)}, b_1^{(n)}) + (a_2^{(n)}, b_2^{(n)}) + \ldots + (a_i^{(n)}, b_i^{(n)}) + \ldots,$

$\Delta_n^y = (c_1^{(n)}, d_1^{(n)}) + (c_2^{(n)}, d_2^{(n)}) + \ldots + (c_j^{(n)}, d_j^{(n)}) + \ldots.$

Indichiamo con $R_{i,j}^{(n)}$, il rettangolo $a_i^{(n)} \leq x \leq b_i^{(n)}$, $c_j^{(n)} \leq y \leq d_j^{(n)}$.

Diciamo $\delta_{i,j}^{(n)}$ il plurintervallo formato da tutti gli s per cui $[x_0(s), y_0(s)]$ risulti appartenente a $R_{i,j}^{(n)}$. Poniamo $D^{(n)} = \Sigma\, \delta_{i,j}^{(n)}$. Per costruzione $D^{(n)} \supset D^{(n+1)}$. È chiaro così che non può essere $\lim_{n \to \infty} D^{(n)} = a > 0$, in virtù del lemma precedente.

4. - Diciamo ora K la classe delle curve C rettificabili e continue interne al quadrato Q, tutta formata con curve di lunghezza L, inferiore o uguale a un numero N positivo. Affermiamo allora, se $N \geq L$, che l'integrale:

$$I_C = \int_C f(x, y)\, dx,$$

che dipende in generale dalla curva C, varia con continuità rispetto alla curva C, quando questa sia scelta nella classe K.

Per ottenere questo risultato basta seguire tutti i ragionamenti fatti dal Tonelli (vedere per es. *Fondamenti di calcolo* *delle variazioni*, Vol. I, pp. 261-293) quando dimostra la continuità degli integrali nel caso che la $f(x, y)$ risulti continua rispetto a (x, y), avendo però l'accortezza, seguendo la dimostrazione detta, di fare astrazione di quanto avvenga in tutti i punti del quadrato Q che abbiano e la x e la y appartenenti a Δ_n^x e a Δ_n^y, per un qualche valore di n.

Per rendere più agevoli le proposizioni a venire porremo per convenzione che Δ_n è l'insieme dei punti che hanno la x appartenente a Δ_n e la y appartenente a Δ_n^y.

5. – Per svolgere la teoria dei differenziali esatti e pervenire in maniera agevole al teorema di Looman-Menchoff, è opportuno premettere un lemma particolarmente importante. Questo lemma è chiamato: Lemma di Looman-Menchoff che generalizziamo nel modo seguente:

Se $w(x, y)$ è quasi continua regolare e limitata nel quadrato Q e F indica un sottinsieme chiuso di Q, tale che qualunque sia n un intero positivo, e qualunque siano (x, y) un punto appartenente a F ma non a Δ_n, $(x + h, y)$, $(x, y + k)$ due punti appartenenti a Q ma non a Δ_n sia:

$$\text{(I)} \qquad | w(x+h, y) - w(x, y) | \leq M | h |,$$

$$\text{(I')} \qquad | w(x, y+k) - w(x, y) | \leq M | k |, \; | w(x, y) | \leq M,$$

dove M è un numero indipendente da h, k, e n. Allora se $J \equiv [a_1^*, b_1^*; a_2^*, b_2^*]$ è il rettangolo limite dei più piccoli rettangoli a lati paralleli agli assi, che contengono $F - \Delta_n$; si ha:

$$\text{(2)} \quad \left| \int_{a_1^*}^{b_1^*} [w(x, b_2^*) - w(x, a_2^*)] dx - \iint_F w'_y(x, y) \, dx dy \right| \leq 5M | Q - F |,$$

$$\text{(2')} \quad \left| \int_{a_2^*}^{b_2^*} [w(b_1^*, y) - w(a_1^*, y)] dy - \iint_F w'_x(x, y) \, dx dy \right| \leq 5M | Q - F |.$$

($|Q - F|$ significa la misura esterna dell'insieme complementare di F rispetto a Q).

Supponiamo che $F - \Delta_n$ non sia vuoto, poichè Δ_n è aperto, questo insieme è chiuso. Sia $J_n = (a_1^{(n)}, b_1^{(n)}; a_2^{(n)}, b_2^{(n)})$ il più piccolo rettangolo che contiene $F - \Delta_n$. Ovviamente è $J_n \subset J$, Siano $(x', a_2^{(n)})$ e $(x'', b_2^{(n)})$ due punti di F posti rispettivamente sui lati $y = a_2^{(n)}$ e $y = b_2^{(n)}$ di J_n. Se ξ è un punto di $(a_1^{(n)}, b_1^{(n)})$ non appartenente a Δ_n^x è:

$$\text{(A)} \qquad |w(\xi, a_2^{(n)}) - w(\xi, b_2^{(n)})| \leq 4Ml,$$

dove l indica la lunghezza del lato del quadrato Q.

Diciamo A_n l'insieme dei valori di ξ non appartenente a Δ_n^x, ma appartenenti a $(a_1^{(n)}, b_1^{(n)})$, e tali inoltre che la retta $x = \xi$ incontri punti di F.

Indichiamo con $w_{(\xi)}(y)$ la funzione definita nel seguente modo:

$$w_{(\xi)}(y) = w(\xi, y), \text{ per } (\xi, y) \text{ appartenente a } F \text{ e } \xi \text{ in } A_n.$$

$$w_{(\xi)}(a_2^{(n)}) = w(\xi, a_2^{(n)}), \quad w_{(\xi)}(b_2^{(n)}) = w(\xi, b_2^{(n)}).$$

$w_{(\xi)}(y)$ sia inoltre lineare negli intervalli contigui a F_y^ξ, insieme intersezione di F con la retta $x = \xi$, e ξ non appartenente a Δ_n^x. Questo insieme F_y^ξ è chiuso. Indichiamo con $l(\xi)$ la lunghezza del plurintervallo contiguo a F_y^ξ. La funzione $w_{(\xi)}(y)$ è assolutamente continua in virtù della (1'), e quindi:

$$w(\xi, b_2^{(n)}) - w(\xi, a_2^{(n)}) = w_{(\xi)}(b_2^{(n)}) - w_{(\xi)}(a_2^{(n)}) = \int_{a_2^{(n)}}^{b_2^{(n)}} w'_{(\xi)}(y)\, dy.$$

Ma quasi ovunque su $(a_2^{(n)}, b_2^{(n)})$ è:

$$|w'_{(\xi)}(y)| = |w'_y(\xi, y)| \leq M.$$

Sarà dunque:

$$w(\xi, b_\xi^{(n)}) - w(\xi, a_\xi^{(n)}) = \int_{F_y^\xi} w_y'(\xi, y)\, dy + \int_{(a_\xi^{(n)}, b_\xi^{(n)}) - F_y^\xi} w_y'(\xi, y)\, dy\,,$$

per ξ fuori Δ_n^*,

per tanto sarà:

$$| w(\xi, b_\xi^{(n)}) - w(\xi, a_\xi^{(n)}) - \int_{F_y^\xi} w_y'(\xi, y)\, dy \,| \leq Ml(\xi)\,.$$

Integrando rispetto a ξ su A_n, viene:

$$\text{(B)} \quad |\int_{A_n} [w(\xi, b_\xi^{(n)}) - w(\xi, a_\xi^{(n)})]\, d\xi - \iint_{F_n} w_y'(\xi, y)\, dy\, d\xi \,| \leq M \int_{A_n} l(\xi)\, d\xi\,.$$

Dove con F_n si è indicato l'insieme ottenuto da F quando si tolgono le striscie che si proiettano su Δ_n^*.

Quando n tende all'infinito, visto che $J_n \subset J_{n+1}$, il rettangolo J_n tende al rettangolo limite che abbiamo chiamato con J.

Viste le ipotesi ammesse sulla funzione $w(x, y)$, qualunque sia $\varepsilon > 0$, si può determinare un $\overline{n}$, tale che, se $n > \overline{n}$ è:

$$| [w(\xi, b_\xi^{(n)}) - w(\xi, a_\xi^{(n)})] - [w(\xi, b_\xi^*) - w(\xi, a_\xi^*)] \,| < \varepsilon$$

per qualunque ξ esterno a $\Delta_{\overline{n}}^*$.

Si può inoltre determinare un $\overline{\overline{n}}$ tale che se $n > \overline{\overline{n}}$ è:

$$| A_n - A^* | < \varepsilon\,,$$

e quindi, se n' è il maggiore dei numeri $\overline{n}$ e $\overline{\overline{n}}$, per $n > n'$ è:

$$\int_{A^*} [w(\xi, b_\xi^*) - w(\xi, a_\xi^*)]\, d\xi - \int_{A_n} [w(\xi, b_\xi^{(n)}) - w(\xi, a_\xi^{(n)})]\, d\xi =$$

$$= \int_{A^* - A_n} [w(\xi, b_\xi^*) - w(\xi, a_\xi^*)]\, d\xi + \int_{A_n} \{ [w(\xi, b_\xi^*) - w(\xi, a_\xi^*)] -$$

$$- [w(\xi, b_\xi^{(n)}) - w(\xi, a_\xi^{(n)})] \}\, d\xi\,.$$

Da cui si ricava che il primo membro di questa relazione è minore in valore assoluto di $(6\,M+Q)\,\varepsilon$. (Il secondo integrale lo si spezzi in due integrali, uno sull'insieme $A_{\bar{n}}$ e l'altro sull'insieme $A_n - A_{\bar{n}}$).

Passando così al limite per n tendente all'infinito nella relazione (B), si ottiene:

$$\Big|\int_{A^*}[w(\xi, b_2^*) - w(\xi, a_2^*)]\,d\xi - \iint_{F^*} w'_y(\xi, y)\,dy d\xi\,\Big| \leq M\int_{A^*} l(\xi)\,d\xi\,,$$

dove F^* indica l'insieme dei punti di F che si proiettano fuori di qualche Δ_n^*. Siccome F^* differisce da F per un insieme di misura superficiale nulla, possiamo scrivere:

$$(\mathrm{B}')\quad \Big|\int_{A^*}[w(\xi, b_2^*) - w(\xi, a_2^*)]\,d\xi - \iint_{F} w'_y(\xi, y)\,dy d\xi\,\Big| \leq M\int_{A^*} l(\xi)\,d\xi\,.$$

D'altro canto dalla (A), passando al limite per n tendente all'infinito e integrando rispetto a ξ sull'insieme $(a_1^*, b_1^*) - A^*$ e procedendo come abbiamo fatto sopra, avremo:

$$(\mathrm{A}')\quad \Big|\int_{(a_1^*,\, b_1^*) - A^*}[w(\xi, b_2^*) - w(\xi, a_2^*)]\,d\xi\,\Big| \leq 4\,M\,l\,|\,(b_1^* - a_1^*) - A^*\,|\,,$$

e sommando (A′) con (B′), otteniamo la relazione (2) del lemma.

Analogamente si ottiene la relazione (2′).

6. - Passiamo ora al teorema di Looman-Menchoff:

$u(x,y)$, $v(x,y)$ sono due funzioni definite in Q e limitate. Supponiamo inoltre che queste funzioni hanno numeri derivati finiti su Q [16], (esclusi al più nei punti d'un insieme D numerabile), *i quali soddisfanno alle equazioni:*

[16] Le funzioni u e v sono pertanto quasi continue in modo regolare, poichè sono continue rispetto a x e rispetto a y, escluso al più nei punti appartenenti a un insieme numerabile D. Dalla dimostrazione di cui al n. 2 (ripetuta con le ovvie modifiche) si osserva che i plurintervalli Δ_n costruiti sono tali che $\prod_{n=1}^{\infty} \Delta_n \subset D$.

$$u'_x = v'_y \,, \quad - u'_y = v'_x \,,$$

quasi ovunque su Q, *allora la funzione* $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ *è olomorfa in* Q.

Sia F l'insieme dei punti P di Q tali che, comunque piccolo prendiamo un cerchio centrato in P, in esso esiste un rettangolo R, coi lati aparalleli agli assi per cui:

$$\int_R f(z)\, dz = 0 \,.$$

F è chiuso e denso in sè.

Preso n intero e positivo, sia F_n l'insieme dei punti (x, y) di F tali che, se (x, y), $(x + h, y)$, $(x, y + h)$, non appartengono a qualche Δ_n, sia:

$$|u(x + h, y) - u(x, y)| \leq n\,|h|, \quad |u(x, y + h) - u(x, y)| \leq n\,|h|,$$

$$|v(x + h, y) - v(x, y)| \leq n\,|h|, \quad |v(x, y + h) - v(x, y)| \leq n\,|h|,$$
$$|h| \leq 1/n.$$

Quest'insieme è chiuso relativamente all'insieme $Q - \Pi\,\Delta_n$. Infatti sia (x_0, y_0) un punto di accumulazione di punti come (x, y) e supponiamo che (x_0, y_0) non appartenga a qualche Δ_n, per es. non appartenga a Δ_{n_1}. Supponiamo esista qualche h' per cui: $|h'| \leq \frac{1}{n}$ e,

$$|u(x_0 + h', y_0) - u(x_0, y_0)| > n\,|h'|\,.$$

Indichiamo con 3ε la differenza positiva tra il primo e il secondo membro, e supponiamo che $(x_0 + h', y)$ non appartenga a Δ_{n_2}.

Possiamo allora determinare un σ positivo tale che, se (x_1, y_1), (x_2, y_2) distano per meno di σ e sono esterni a qualche $\Delta_{\bar{n}}$ dove $\bar{n} > n_1$, $\bar{n} > n_2$ è:

$$|u(x_1, y_1) - u(x_2, y_2)| < \varepsilon ,$$

e quindi in tutto un intorno σ di (x_0, y_0), per qnalunque (x_1, y_1), esterno a $\Delta_{\bar{n}}$, tale che $(x_1 + h', y)$ sia esterno a $\Delta_{\bar{n}}$ è:

$$| u(x_1 + h', y) - u(x_1, y) | \geq n | h' |$$

per tanto (x_0, y_0) non è punto d'accumulazione, come era stato supposto. È chiaro dopo quanto è stato detto che $F_n + \Pi \Delta_n$ è chiuso.

Siccome u e v hanno numeri derivati parziali finiti escluso nell'insieme numerabile D, sarà:

$$Q = \Sigma (F_n + \Pi \Delta_n) + D .$$

Per un teorema di BAIRE ([17]), esiste un N e un intervallo I_0, tale che, $F \cdot I_0$ non è vuoto e inoltre:

$$F \cdot I_0 \subset F_N + \Delta_N .$$

Sia Q_1 un quadrato di diametro $\delta(Q_1) \leq \frac{1}{N}$ interno a I_0 e contenente un punto di F. Detto J_0 il più piccolo dei rettangoli che contengono $F \cdot Q_1$ (rettangolo che coincide con quello del lemma precedente poichè F è perfetto e $\Pi \Delta_n \subset D$), è:

$$F \cdot J_0 \subset F_N + \Delta_N .$$

Fissato un intero n positivo, se (x, y) appartiene a $F \cdot J_0$, $(x + h, y)$ e $(x, y + k)$ appartengono a J_0 e nessuno di essi appartiene a Δ_N, è:

$$| u(x + h, y) - u(x, y) | \leq N | h | ,$$

([17]) Vedere p. es. SAKS: *Théorie de l' integrale* pag. 144.

giacchè (x, y) non appartenendo a Δ_N appartiene a F_N. Fatte allora le analoghe considerazioni che si riferiscono però a v, si può applicare il lemma che precede. La dimostrazione del teorema prosegue allora come nel caso ordinario, tenendo presente la continuità dell'integrale detta al n. 3.

Per finire osserviamo che questo teorema ammette la generalizzazione portata dal TONELLI [18] nel caso ordinario in cui u e v sono continue.

(18) L. TONELLI: *Sul Teorema di Green.* Rendiconti A. Lincei, Serie VI (1925) pag. 482 e seg.