RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

MARIA FIORE

A proposito di alcune disequazioni lineari

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 17 (1948), p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1948__17__1_0>

A PROPOSITO DI ALCUNE DISEQUAZIONI LINEARI

Nota (*) *di* MARIA FIORE (*a Rovigo*).

In questa Nota [1] mi propongo di indicare un criterio sufficiente perchè le soluzioni non positive [2] del sistema

$$
(1) \qquad \begin{aligned}
&a_{1,1}\, x_1 + \ldots + a_{1,n}\, x_n + a_1 \geq 0\,, \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot\,, \\
&a_{n,1}\, x_1 + \ldots + a_{n,n}\, x_n + a_n \geq 0
\end{aligned}
$$

siano limitate inferiormente [3].

Nei riguardi del sistema (1) si sa che:

Il sistema (1), *nelle variabili reali* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *ammette soltanto soluzioni non negative, se i numeri* $a_{r,s}$ *ed* a_r *sono reali e se*

$$
(2) \qquad a_r \leq 0 \qquad (r = 1, \ldots, n)\,,
$$

se

$$
(3) \qquad a_{r,s} \leq 0 \qquad (r, s = 1, \ldots, n;\ r \neq s)\,,
$$

(*) Pervenuta in Redazione il 23 luglio 1947.

(1) Nella quale espongo alcuni risultati della mia Tesi per la Laurea in Matematica, discussa a Padova nel luglio 1947.

(2) Una soluzione $\xi_1, \ldots, \xi_n$ del sistema (1) è non positiva, se è $\xi_1 \leq 0, \ldots, \xi_n \leq 0$.

(3) Le soluzioni non positive del sistema (1) sono inferiormente limitate, se esiste una $n-pla$ di numeri (reali) $K_1, \ldots, K_n$ tali che, essendo $\xi_1, \ldots, \xi_n$ una soluzione non positiva, risulti: $\xi_1 \geq K_1, \ldots, \xi_n \geq K_n$.

e se

$$D_k = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k,1} & \dots & a_{k,k} \end{vmatrix} > 0 \quad (k = 1, \dots, n) \tag{4}$$

e il risultato è dovuto a ZWIRNER (4); inoltre, a norma di un teorema di CINQUINI (5) e di una osservazione di ZWIRNER (6), si può dire che:

Se i numeri a_r e $a_{r,s}$ sono reali e soddisfanno alle (3) *e alle* (4), *le eventuali soluzioni (reali e) non positive del sistema* (1) *sono inferiormente limitate.*

La natura delle condizioni (4) suggerisce spontaneamente di porre il sistema (1) in relazione con la forma quadratica

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{r,s}^{1\dots n} a_{r,s}\, x_r\, x_s$$

(4) G. ZWIRNER, *Criteri d'unicità per un problema di valori al contorno per equazioni e sistemi di equazioni differenziali ordinarie d'ordine qualunque* [« Rendiconti del Seminario Matematico dell' Università di Padova », vol. XIII (1942), pp. 18-20], n. 4.

Veramente ZWIRNER suppone $a_r = 0$; ma è chiaro che una soluzione delle (1) con $a_r \leq 0$ è anche soluzione per le disuguaglianze che si ottengono dalle (1) ponendo *zero* in luogo di a_r. Inoltre ZWIRNER fa anche un' ipotesi superflua sulle $a_{r,r}$. Egli infatti scrive le (1) sotto la forma

$$\begin{array}{c} (1 - c_{1,1})\, x_1 + \dots + c_{1,n}\, x_n \geq 0\,, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ c_{n,1}\, x_1 + \dots + (1 - c_{n,n})\, x_n \geq 0 \end{array} \tag{c}$$

e suppone $c_{r,s} \geq 0$ per $r, s, = 1, \dots, n$ (si tenga presente che ZWIRNER ricerca criteri sufficienti perchè le (*c*) ammettano soltanto soluzioni non positive).

(5) S. CINQUINI, *Sopra il problema di Nicoletti per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie* [« Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa », vol. X (1941), pp. 127-138], pp. 129-131. Anche CINQUINI fa un' ipotesi superflua analoga a quella dello ZWIRNER.

(6) G. ZWIRNER, *Problemi di valori al contorno per sistemi di equazioni differenziali ordinarie* [« Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti » Tomo CI, Parte II (1941-42), pp. 405-418], pp. 415-416

(i cui coefficienti non soddisfacciano necessariamente alla condizione di simmetria $a_{r,s} = a_{s,r}$). In questo indirizzo si trova per es. che:

Se i numeri a_r *e* $a_{r,s}$ *sono reali, con* $a_r \geq 0$ $(r = 1, \ldots, n)$, *e se la forma* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *è definita positiva, le eventuali soluzioni non positive del sistema* (1) *sono inferiormente limitate;*

il quale teorema (di cui darò in seguito due dimostrazioni) coincide soltanto parzialmente con quello di CINQUINI [7]: invero, io non ho bisogno di fare ipotesi sui segni delle $a_{r,s}$ per $r \neq s$; mentre le condizioni di CINQUINI possono essere soddisfatte senza che lo siano le mie (naturalmente purchè la matrice $\|a_{r,s}\|$ non sia simmetrica). Dopo di ciò farò vedere come il teorema di CINQUINI si possa, volendo, dedurre da quello di ZWIRNER e ampliare lievemente nella sua portata.

1. – Dimostriamo dunque che:

Se $f = \sum_{r,s}^{1\ldots n} a_{r,s}\, x_r\, x_s$ *è una forma quadratica (a coefficienti reali, nelle variabili reali* $x_1, \ldots, x_n$*) definita positiva, se le* a_i $(i = 1, \ldots, n)$ *sono numeri reali e non negativi, le eventuali soluzioni non positive del sistema* (1) *sono inferiormente limitate.*

Prima dimostrazione:

Supposto infatti che $\xi_1, \ldots, \xi_n$ sia una n — *pla* di numeri non positivi soddisfacenti alle

[7] È qui evidente che se f è definita positiva, il sistema

$$\begin{gathered} a_{1,1}\, x_1 + \ldots + a_{1,n}\, x_n \geq 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1}\, x_1 + \ldots + a_{n,n}\, x_n \geq 0 \end{gathered}$$

non ammette soluzioni non positive diverse dalla $x_1 = \ldots = x_n = 0$; ma è chiaro che questa proposizione non ha per il teorema di ZWIRNER un ufficio analogo a quello che la proposizione del testo ha nei riguardi di quello di CINQUINI.

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
&a_{1,1}\,\xi_1 + \ldots + a_{1,n}\,\xi_n + a_1 \geq 0\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,,\\
&a_{n,1}\,\xi_1 + \ldots + a_{n,n}\,\xi_n + a_n \geq 0\,,
\end{aligned}
$$

moltiplicando la prima delle (5) per ξ_1, la seconda per $\xi_2, \ldots$, l'n — *esima* per ξ_n e sommando si ottiene

$$
(6)\qquad \sum_{r,s}^{1\ldots n} a_{r,s}\,\xi_r\,\xi_s + (a_1\,\xi_1 + \ldots + a_n\,\xi_n) \leq 0\,.
$$

Nell'ipotesi che $\xi_1, \ldots, \xi_n$ non siano tutti nulli, posto

$$
(7)\qquad \rho = \sqrt{\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2}
$$

(dove la determinazione del radicale è quella positiva), dalla (6) segue

$$
(8)\qquad \rho^2 \sum_{r,s}^{1\ldots n} a_{r,s}\,\frac{\xi_r}{\rho}\,\frac{\xi_s}{\rho} + \rho\left(a_1\,\frac{\xi_1}{\rho} + \ldots + a_n\,\frac{\xi_n}{\rho}\right) \leq 0\,.
$$

I rapporti $\frac{\xi_r}{\rho}$ $(r = 1, \ldots, n)$ si possono interpretare come coordinate di un punto variabile sull'ipersuperficie sferica dello $S_n \equiv (x_1, \ldots, x_n)$ avente come raggio l'unità e come centro l'origine delle coordinate. Ma la f è una funzione continua e positiva nei punti di questa ipersuperficie; perciò la f ammette ivi un minimo positivo m.

Attese le $a_1 \geq 0, \ldots, a_n \geq 0$, $\xi_1 \leq 0, \ldots, \xi_n \leq 0$, la somma

$$
a_1\,\frac{\xi_1}{\rho} + \ldots + a_n\,\frac{\xi_n}{\rho}
$$

non scende al di sotto di un conveniente numero non positivo $-n$. Ma allora è

$$
(9)\qquad \rho^2 \sum_{r,s}^{1\ldots n} a_{r,s}\,\frac{\xi_r}{\rho}\,\frac{\xi_s}{\rho} + \rho\left(a_1\,\frac{\xi_1}{\rho} + \ldots + a_n\,\frac{\xi_n}{\rho}\right) \geq \rho^2\, m - \rho\, n\,.
$$

Dalle (8), (9) segue:

$$\rho\,(\rho\, m - n) \leq 0 \;;$$

e quindi, essendo $\rho > 0$, $m > 0$:

$$\rho \leq \frac{n}{m} \,.$$

Di qui e dalla (7), ricordando che $\xi_1 \leq 0, \ldots, \xi_n \leq 0$, si traggono le

$$\xi_1 \geq -\frac{n}{m}, \; \xi_2 \geq -\frac{n}{m}, \ldots, \; \xi_n \geq -\frac{n}{m};$$

donde il teorema.

Seconda dimostrazione:

Supposto che $\xi_1, \ldots, \xi_n$ sia una $n-pla$ di numeri non positivi soddisfacenti alle

$$\begin{aligned} &a_{1,1}\,\xi_1 + \ldots + a_{1,n}\,\xi_n + a_1 \geq 0\,, \\ (10) \qquad &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &a_{n,1}\,\xi_1 + \ldots + a_{n,n}\,\xi_n + a_n \geq 0\,, \end{aligned}$$

moltiplicando la prima delle (10) per $\xi_1, \ldots,$ l'n — sima per ξ_n e sommando si ottiene

$$(11) \qquad \sum_{r,s}^{1\ldots n} a_{r,s}\,\xi_r\,\xi_s + (a_1\,\xi_1 + \ldots + a_n\,\xi_n) \leq 0\,.$$

Sia ora

$$(12) \qquad x_i = \sum_{r}^{1,\ldots n} c_{i,r}\,y_r \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

una sostituzione lineare, omogenea, ortogonale, atta a trasformare la f in forma canonica

$$(13) \qquad F = \lambda_1\,y_1^2 + \ldots + \lambda_n\,y_n^2\,,$$

dove le λ_i $(i=1,\ldots,n)$ sono numeri positivi. Operando la (12) sulla forma lineare

$$a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n \quad .$$

si ottiene

$$\sum_i^{1\ldots n} a_i x_i = \sum_i^{1,\ldots n} a_i \sum_r^{1\ldots n} c_{i,r} y_r = \sum_{i,r}^{1\ldots,n} a_i c_{i,r} y_r \,. \tag{14}$$

Sia ora $y_i = \eta_i$, per $x_i = \xi_i$; dalle (13), (14), per la (11), si ha:

$$\sum_r^{1\ldots n} \lambda_r \eta_r^2 + \sum_{i,r}^{1\ldots n} a_i c_{i,r} \eta_r = \sum_r^{1\ldots n} \left(\lambda_r \eta_r^2 + \sum_i^{1\ldots n} a_i c_{i,r} \eta_r\right) \leq 0 \,.$$

Posto

$$\frac{\sum_i^{1,\ldots n} a_i c_{i,r}}{2\sqrt{\lambda_r}} = b_r \,,$$

(dove b_r sono numeri reali, perchè conto che $\lambda_r > 0$), si ha subito

$$\sum_r^{1,\ldots n} \left(\lambda_r \eta_r^2 + 2\sqrt{\lambda_r}\, b_r \eta_r + b_r^2\right) - \sum_r^{1\ldots n} b_r^2 = \sum_r^{1\ldots n} \left(\sqrt{\lambda_r}\,\eta_r + b_r\right)^2 -$$

$$- \sum_r^{1,\ldots n} b_r^2 \leq 0 \,.$$

Dall' ultima relazione si deduce

$$(\sqrt{\lambda_r}\,\eta_r + b_r)^2 \leq \sum_r^{1\ldots n} b_r^2 \,,$$

da cui evidentemente

$$\frac{-\sqrt{\sum_r^{1\ldots n} b_r^2} - b_r}{\sqrt{\lambda_r}} \leq \eta_r \leq \frac{\sqrt{\sum_r^{1\ldots n} b_r^2} - b_r}{\sqrt{\lambda_r}} \,. \tag{15}$$

Ora, risultando limitate le η, segue che devono essere necessariamente limitate anche le ξ.

Osservazioni. – Naturalmente, perchè la forma quadratica $f = \sum_{r,s}^{1..n} a_{r,s}\, x_r\, x_s$, considerata nel teorema precedente, sia definita positiva, è necessario e sufficiente che siano verificate le seguenti relazioni:

$$(16) \qquad \Delta_k = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dfrac{a_{1,2}+a_{2,1}}{2} & \dots & \dfrac{a_{1,k}+a_{k,1}}{2} \\ \dfrac{a_{1,2}+a_{2,1}}{2} & a_{2,2} & \dots & \dfrac{a_{2,k}+a_{k,2}}{2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{a_{1,k}+a_{k,1}}{2} & \dfrac{a_{2,k}+a_{k,2}}{2} & \dots & a_{k,k} \end{vmatrix} > 0,$$

per $k = 1, \dots, n$.

Le eventuali soluzioni non positive del sistema di disequazioni lineari

$$\begin{cases} \dfrac{2}{3}x_1 - \dfrac{1}{4}x_2 - \dfrac{1}{6}x_3 + 1 \geq 0, \\ -\dfrac{3}{4}x_1 + x_2 - \dfrac{1}{2}x_3 + \dfrac{1}{2} \geq 0, \\ -\dfrac{1}{3}x_1 - \dfrac{1}{6}x_2 + \dfrac{1}{2}x_3 + \dfrac{1}{3} \geq 0 \end{cases}$$

sono inferiormente limitate. I coefficienti del precedente sistema soddisfanno infatti alle (3), (4). Non sono invece soddisfatte le relazioni analoghe alle (16).

2. – Deduciamo ora il teorema di Cinquini da quello di Zwirner:

Le eventuali soluzioni non positive del sistema di disequazioni

$$(17) \qquad a_{i,1}\, x_1 + \dots + a_{i,n}\, x_n + a_i \geq 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

dove $a_{r,s}$ $(r, s, = 1, \ldots, n;\ r \neq s)$ *sono numeri* ≤ 0 *per i quali valgono le relazioni*

$$D_k = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,k} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k,1} & a_{k,2} & \ldots & a_{k,k} \end{vmatrix} > 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

sono limitate inferiormente.

Il sistema (17) può infatti scriversi nel seguente modo:

$$\text{(18)} \quad \begin{aligned} & a_{1,1}(x_1 - K_1) + a_{1,2}(x_2 - K_2) + \ldots + a_{1,n}(x_n - K_n) \geq 0\,, \\ & a_{2,1}(x_1 - K_1) + a_{2,2}(x_2 - K_2) + \ldots + a_{2,n}(x_n - K_n) \geq 0\,, \\ & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot\,, \\ & a_{n,1}(x_1 - K_1) + a_{n,2}(x_2 - K_2) + \ldots + a_{n,n}(x_n - K_n) \geq 0\,, \end{aligned}$$

essendo $K_1, K_2, \ldots, K_n$ gli n numeri soddisfacenti alle

$$\begin{aligned} & a_{1,1} K_1 + a_{1,2} K_2 + \ldots + a_{1,n} K_n = -a_1\,, \\ & a_{2,1} K_1 + a_{2,2} K_2 + \ldots + a_{2,n} K_n = -a_2\,, \\ & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot\,, \\ & a_{n,1} K_1 + a_{n,2} K_2 + \ldots + a_{n,n} K_n = -a_n\,; \end{aligned}$$

(si rammenti che è $D_n \neq 0$). Ora, il sistema di disequazioni (18), dove si considerino come variabili le differenze $x_i - K_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, è soddisfatto soltanto da valori non negativi delle variabili, come risulta del teorema di Zwirner; quindi è

$$x_1 - K_1 \geq 0\,,\ x_2 - K_2 \geq 0\,, \ldots,\ x_n - K_n \geq 0\,,$$

cioè

$$x_1 \geq K_1\,,\ x_2 \geq K_2\,, \ldots,\ x_n \geq K_n\,.$$

Osservazione. – Il ragionamento prova che il teorema precedente vale per tutte le soluzioni del sistema (17).