RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

BRUNO PINI

Convergenza, fattori di convergenza, convergenza generalizzata per determinanti infiniti

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 17 (1948), p. 160-185

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1948__17__160_0>

CONVERGENZA, FATTORI DI CONVERGENZA, CONVERGENZA GENERALIZZATA PER DETERMINANTI INFINITI

Nota (*) *di* BRUNO PINI (*a Bologna*) (**).

Scopo della presente Nota è l'introduzione dei fattori di convergenza per i determinanti infiniti. Ricordiamo, in proposito, i risultati essenziali relativi ai fattori di convergenza per serie semplici e multiple. Data una successione $\{f_n(P)\}$ di funzioni definite su un insieme E di punti di uno spazio euclideo a un numero qualunque di dimensioni: « Condizione necessaria e sufficente affinchè la serie $\sum_1^\infty {}_n u_n f_n(P)$ sia convergente su E ogniqualvolta è convergente la serie $\sum_1^\infty {}_n u_n$, è che esista una funzione positiva $K(P)$ su E per cui sia $\sum_1^\infty {}_n |\Delta f_n(P)| < K(P)$, $[\Delta f_n(P) = f_n(P) - f_{n+1}(P),\ n = 1, 2, \ldots]$ » (HADAMARD). Se poi P_0 è un punto di accumulazione di E, non appartenente ad E: « Condizione necessaria e sufficente affinchè la serie $\sum_1^\infty {}_n u_n f_n(P)$ sia convergente su E ogniqualvolta è convergente la serie $\sum_1^\infty {}_n u_n$, e sia $\lim_{\substack{P \to P_0 \\ P < E}} \sum_1^\infty {}_n u_n f_n(P) = \sum_1^\infty {}_n u_n$, è che, oltre alle condizioni del teorema precedente, sia $\lim_{\substack{P \to P_0 \\ P < E}} f_n(P) = 1$, $n = 1, 2, \ldots$, ed esista un intorno J del punto P_0 e un numero positivo K'

(*) Pervenuta in Redazione il 22 Febbraio 1948.

(**) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico dell' Università di Bologna.

tale che sia $\sum_{1}^{\infty}{}_n \mid \Delta f_n(P) \mid < K'$ sull'insieme $E' = J \cdot E$» (CARMICHAEL - TAKENAKA ; nella formulazione più generale di C. MOORE). Queste due proposizioni, delle quali la seconda è alla base delle definizioni regolari di sommazione (principio di permanenza di G. HARDY) qualora i fattori di convergenza vengano applicati a serie oscillanti, sono state estese alle serie doppie e successivamente alle serie multiple; ne riportiamo gli enunciati generali dovuti a MOORE [1], in vista dell'applicazione che ne faremo nel seguito. Data la serie n — *pla*

$$(1) \qquad \sum_{1}^{\infty}{}_{i_1\, i_2,\dots\, i_n} u_{i_1\, i_2,\dots\, i_n}$$

e la successione n — *pla* $\{ f_{i_1\, i_2,\dots\, i_n}(P) \}$, $i_1, i_2, \dots, i_n = 1, 2, \dots,$ di funzioni di un punto P variabile in un insieme E del tipo già indicato, poniamo, per ogni numero naturale $k < n$:

$$(2) \qquad \Delta_{\substack{11\dots 100\dots 0\\ 1,2,\dots,n-k,1,2,\dots,k}} f_{i_1\, i_2\dots\, i_n}(P) =$$

$$= \sum_{0}^{1}{}_{p_1\, p_2\dots\, p_{n-k}} (-1)^{p_1+p_2+\dots+p_{n-k}} f_{i_1+p_1,\dots,i_{n-k}+p_{n-k},\, i_{n-k+1},\dots,i_n}(P),$$

e analogamente permutando in tutti i modi possibili gl'indici di Δ; le ridotte della serie

$$(3) \qquad \sum_{1\;1}^{\infty}{}_{i_1\, i_2\dots\, i_n} u_{i_1\, i_2,\dots,\, i_n} f_{i_1\, i_2,\dots,\, i_n}(P),$$

mediante una trasformazione che costituisce una generalizzazione di quella di BRUNACCI–ABEL, si possono scrivere:

(1) C. MOORE, «*Summable series and convergence factors*». - American Mathematical society colloquium publications - Vol. XXII - 1938 - Cap. I, nn. 13-17.

$$\sigma_{m_1 m_2 \ldots m_n}(P) = \sum_{1}^{m_1}{}_{i_1} \ldots \sum_{1}^{m_n}{}_{i_n} u_{i_1 i_2 \ldots i_n} f_{i_1 i_2 \ldots i_n}(P) =$$

$$= \sum_{1}^{m_1-1}{}_{i_1} \ldots \sum_{1}^{m_n-1}{}_{i_n} S_{i_1 i_2 \ldots i_n} \Delta_{11\ldots 1} f_{i_1 i_2 \ldots i_n}(P) +$$

(4)

$$+ \sum_{1}^{n-1}{}_{k} \left[\sum_{1}^{m_1-1}{}_{i_1} \ldots \sum_{1}^{m_{n-k}-1}{}_{i_{n-k}} S_{i_1 i_2 \ldots i_{n-k} m_{n-k+1} \ldots m_n} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \Delta_{\substack{11 \ldots 10 \ldots 0 \\ 1,2,\ldots,n-k,1,\ldots,k}} f_{i_1 i_2 \ldots i_{n-k} m_{n-k+1} \ldots m_n}(P) \right] +$$

$$+ S_{m_1 m_2 \ldots m_n} f_{m_1 m_2 \ldots m_n}(P) ,$$

dove con $S_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ s' intende la somma parziale di (1) di indici $i_1, i_2, \ldots, i_n$, e si conviene di rappresentare con le parentesi quadre la somma di tutti i termini simili a quello scritto ottenuti sostituendo in tutti i modi possibili k indici i coi corrispondenti indici m.

Orbene: « Condizione necessaria e sufficente affinchè (3) sia convergente (nel senso comune di Stolz e Pringhsheim) e perchè le sue somme parziali $\sigma_{i_1 i_2 \ldots i_n}(P)$, $i_1, i_2, \ldots, i_n = 1, 2, \ldots$, restino limitate tutte le volte che la (1) è convergente con somme parziali $S_{i_1 i_2 \ldots i_n}$, $i_1, i_2, \ldots, i_n = 1, 2, \ldots$, limitate, è che esista una funzione positiva $K(P)$ su E per cui sia

(5) $$\sum_{1}^{\infty}{}_{i_1 i_2 \ldots i_n} | \Delta_{11 \ldots 1} f_{i_1 i_2 \ldots i_n}(P) | < K(P) ,$$

e che per ogni numero naturale $k < n$ e, fissato k, per ogni $(n-k)$—*pla* di numeri naturali $i_1, i_2, \ldots, i_{n-k}$, siano soddisfatte le condizioni:

(6) $$\lim_{\substack{i_{n-k+1}, \ldots, i_n \to \infty \\ P < E}} \Delta_{\substack{11 \ldots 10 \ldots 0 \\ 1,2,\ldots,n-k,1,\ldots,k}} f_{i_1 i_2 \ldots i_n}(P) = 0 ,$$

ed $\binom{n}{k} - 1$ condizioni simili a quella scritta in corrispondenza a tutte le possibili permutazioni degli indici di Δ ».

Se poi P_0 è un punto di accumulazione di E, non appartenente ad E:

« Condizione necessaria o sufficente affinchè la (3) oltre che convergente e con somme parziali limitate per ogni punto P di E, abbia somma convergente alla somma di (1) per $P \to P_0$ su E, è che, oltre alle condizioni (5) e (6), sia:

$$(7) \qquad \lim_{\substack{P \to P_0 \\ P < E}} f_{i_1 i_2 \dots i_n}(P) = 1 \qquad i_1, i_2, \dots, i_n = 1, 2, \dots ;$$

che siano soddisfatte le n condizioni:

$$(8) \qquad \lim_{\substack{P \to P_0 \\ P < E}} \sum_1^\infty {}_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} i_{k+1} \dots i_n} \left| \Delta_{11\dots1} f_{i_1 i_2 \dots i_n}(P) \right| = 0$$

$$\begin{cases} k = 1, 2, \dots, n \\ i_k = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

e che esista un numero positivo K' e un intorno J di P_0 per cui sia:

$$(9) \qquad \sum_1^\infty {}_{i_1 i_2 \dots i_n} \left| \Delta_{11\dots1} f_{i_1 i_2 \dots i_n}(P) \right| < K'$$

sull'insieme $E' = J \cdot E$ ».

Orbene, il determinante infinito, riguardato come una serie i cui termini sono serie multiple, trascende le serie multiple, e ciò avverrà di conseguenza per il problema dei fattori di convergenza relativamente a questo, rispetto all'analogo problema relativo a quelle.

Ricordiamo brevemente il concetto di determinante infinito secondo Hill e quello secondo von Koch.

Diremo che la matrice infinita

$$\begin{matrix} 1 + a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & \dots \\ a_{21} & 1 + a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & 1 + a_{nn} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{matrix}$$

dà luogo a un determinante infinito convergente secondo G. W. Hill, se è convergente la successione $\{A_n\}$ dei ridotti:

$$\begin{vmatrix} 1+a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 1+a_{22} \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & 1+a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= 1 + \sum_{1}^{n}{}_{\nu} \sum_{1}^{n-\nu+1}{}_{i_1} \sum_{2}^{n-\nu+2}{}_{i_2} \dots \sum_{\nu}^{n}{}_{i_\nu} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_\nu \\ i_1 & i_2 & \dots & i_\nu \end{pmatrix},$$
$$i_1 < i_2 < \dots < i_\nu$$

indicando, secondo l'uso, con $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \dots & i_\nu \\ i_1 & i_2 \dots & i_\nu \end{pmatrix}$ il minore principale d'ordine ν: $\begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & \dots & a_{i_1 i_\nu} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i_\nu i_1} & \dots & a_{i_\nu i_\nu} \end{vmatrix}$,

e intenderemo come valore del determinante il $\lim\limits_{n \to \infty} A_n$.

Diremo invece che essa dà luogo a un determinante infinito convergente assolutamente o convergente secondo H. von Koch quando riesce convergente la serie avente per termini tutti i prodotti $|a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_\nu j_\nu}|$ che si ottengono in corrispondenza a tutti i numeri naturali ν e, per ciascuno di questi, a tutti i gruppi di ν numeri naturali $i_1, i_2, \dots, i_\nu$ con $i_1 < i_2 < \dots < i_\nu$ e a tutte le permutazioni $j_1, j_2, \dots, j_\nu$ degli $i_1, i_2, \dots, i_\nu$ (2); in tal caso intenderemo come valore del determinante la somma della serie

$$1 + \sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} \sum_{1}^{\infty}{}_{\substack{i_1 i_2 \dots i_\nu \\ i_1 < i_2 < \dots < i_\nu}} \sum_{\left[\substack{i_1 i_2 \dots i_\nu \\ j_1 j_2 \dots j_\nu}\right]} (-1)^{J} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_\nu j_\nu} =$$

$$= 1 + \sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} \sum_{1}^{\infty}{}_{\substack{i_1 i_2 \dots i_\nu \\ i_1 < i_2 < \dots < i_\nu}} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_\nu \\ i_1 & i_2 & \dots & i_\nu \end{pmatrix},$$

(2) F. Riesz, « *Les systèmes d'équations linéaires a une infinité d'inconnues* ». - Paris 1913, Cap. II, n. 26 e segg.

dove la terza sommatoria al lato sinistro è estesa a tutte le $\nu!$ permutazioni $j_1, j_2, \ldots, j_\nu$ degli $i_1, i_2, \ldots, i_\nu$ e dove j indica il numero delle inversioni che si presentano nella permutazione $j_1, j_2, \ldots, j_\nu$.

Nel seguito indicheremo il determinante infinito, in ogni caso, specificando via via il tipo di convergenza che intendiamo, con una delle seguenti notazioni:

$$(10) \qquad \begin{vmatrix} 1+a_{11} & a_{12} \ldots\ldots & a_{1n} \ldots\ldots \\ a_{21} & 1+a_{22} \ldots\ldots & a_{2n} \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots\ldots & 1+a_{nn} \ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{vmatrix} ,$$

$$\mathit{det.}\ (\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}) ,$$

intendendo con $\boldsymbol{E}$ la matrice unità e con $\boldsymbol{A}$ la matrice $\| a_{hk} \|$.

Orbene il problema generale sui fattori di convergenza per un determinante infinito consiste nel ricercare le condizioni necessarie e sufficenti cui deve soddisfare la successione doppia di funzioni $\{ f_{ij}(P) \}$, $P < E$, affinchè il determinante infinito

$$(11) \qquad \begin{vmatrix} 1+a_{11} f_{11}(P) & a_{12} f_{12}(P) \ldots\ldots \\ a_{21} f_{21}(P) & 1+a_{22} f_{22}(P) \ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{vmatrix}$$

sia convergente ogniqualvolta è convergente (10) e sia inoltre soddisfatta la relativa condizione di regolarità. Senonchè tale problema perde ogni interesse se intendiamo che (10) sia convergente assolutamente; infatti in tal caso lo sviluppo di (10) è una serie semplice assolutamente convergente, onde tutto si riduce ad esprimere la condizione che sia limitato l'insieme dei fattori per cui restano moltiplicati i termini $a_{i_1 j_1}\, a_{i_2 j_2} \ldots a_{i_\nu j_\nu}$ di tale serie, e la relativa ovvia condizione di regolarità. D'altra parte la convergenza secondo Hill è troppo ampia (essa esprime in certo qual modo la convergenza per quadrati della serie

$1+\sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} \sum_{i_1<i_2<\dots<i_\nu}^{\infty}{}_{i_1 i_2 \dots i_\nu} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \dots & i_\nu \\ i_1 & i_2 \dots & i_\nu \end{pmatrix}\Bigg)$. Sembra perciò opportuno modificare la definizione di convergenza per un determinante infinito, così da essere più restrittiva di quella secondo HILL e meno di quella secondo von KOCH, e per la quale sia di qualche interesse l'applicazione dei fattori di convergenza; è chiaro che se (10) è convergente secondo una tal nuova definizione, se (11) riesce assolutamente convergente e se il suo valore, per P tendente su E verso un opportuno punto P_0, tende al valore di (10) secondo questa nuova definizione, quest'ultimo si può ritenere come il valore generalizzato del $det.(E+A)$ dal punto di vista della convergenza secondo von KOCH, ch'è poi quella più comunemente accettata. È in quest'ordine d'idee che il problema è stato proposto dal prof. G. CIMMINO e inizialmente trattato da A. ROSOLINI ([3]).

1. – Convergenza semplice per determinanti infiniti.

Consideriamo lo sviluppo formale per dimensioni di (10):

$$1+\sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} \sum_{\substack{1 \\ i_1<i_2<\dots<i_\nu}}^{\infty}{}_{i_1 i_2 \dots i_\nu} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \dots & i_\nu \\ i_1 & i_2 \dots & i_\nu \end{pmatrix}, \tag{12}$$

e poniamo:

$$S^{(\nu)}_{m_1 m_2 \dots m_\nu} = \underset{i_1<i_2<\dots<i_\nu}{\sum_{1}^{m_1}{}_{i_1} \sum_{1}^{m_2}{}_{i_2} \dots \sum_{1}^{m_\nu}{}_{i_\nu}} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \dots & i_\nu \\ i_1 & i_2 \dots & i_\nu \end{pmatrix}, \tag{13}$$

qualunque sia il numero naturale ν, e, per ogni ν, qualunque sia la $\nu-pla$ di numeri naturali $m_1, m_2, \dots, m_\nu$ con $m_1 < m_2 < \dots < m_\nu$;

([3]) A. ROSOLINI, « *Sulla definizione di valore generalizzato per i determinanti infiniti* ». Boll. U.M.I. (V) 2 - 1943, pagg. 95-102.

$$(14) \qquad S^{(\nu)} = \sum_{\substack{1 \\ i_1 < i_2 < \ldots < i_\nu}}^{\infty} {}_{i_1 i_2 \ldots i_\nu} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \ldots & i_\nu \\ i_1 & i_2 \ldots & i_\nu \end{pmatrix}$$

in caso di convergenza della serie al lato destro;

$$(15) \qquad L^{(\nu)} = estr.\ sup. \mid S^{(\nu)}_{m_1 m_2 \ldots m_\nu} \mid$$

in corrispondenza a tutte le ν — *ple* di numeri naturali m_1, $m_2, \ldots, m_\nu$ con $m_1 < m_2 < \ldots < m_\nu$, per ogni fissato valore di ν, nell'ipotesi che sia limitato l'insieme delle somme parziali (13).

Diciamo che (10) è *semplicemente convergente* se:

1) la serie $\sum_{\substack{1 \\ i_1 < i_2 < \ldots < i_\nu}}^{\infty} {}_{i_1 i_2 \ldots i_\nu} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \ldots & i_\nu \\ i_1 & i_2 \ldots & i_\nu \end{pmatrix}$ è convergente (nel senso di Stolz e Pringsheim) e con somme parziali limitate, qualunque sia il numero naturale ν;

2) la serie $\sum_{1}^{\infty}{}_\nu L^{(\nu)}$ è convergente.

La definizione di convergenza così data è più restrittiva della convergenza secondo Hill e meno restrittiva dell'assoluta convergenza di von Koch.

Per esempio, il determinante per cui $a_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ per } i = j \\ 1 \ \text{»} \ i \neq j \end{cases}$, $i, j = 1, 2, \ldots$, è ovviamente convergente secondo Hill, riuscendo convergente a zero la successione $\{A_n\}$ dei ridotti; esso però non è semplicemente convergente, riuscendo divergenti le serie che ne costituiscono lo sviluppo dimensionale, (12). Il determinate per cui $a_{11} = c_1$, $a_{i1} = 1$ per $i > 1$, $a_{1j} = -c_j$ per $j > 1$, $a_{ij} = 0$ per $i > 1$, $j > 1$, nell'ipotesi che la serie $\sum_{1}^{\infty}{}_n c_n$ sia semplicemente e non assolutamente convergente, è semplicemente convergente poichè il suo sviluppo (12) si riduce a $1+\sum_{1}^{\infty}{}_n c_n$, mentre non è assolutamente convergente secondo von Koch.

Si ha che: *Se det.* $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})$ *è assolutamente convergente, esso è anche semplicemente convergente; se è semplicemente convergente è anche convergente secondo* Hill.

La prima di tali affermazioni è immediata. Per la seconda: detta S la somma della serie (12) e posto per ogni $\nu \leqq n$:

$$S^{(\nu)} = S^{(\nu)}_{n-\nu+1,\ldots\, n} + R^{(\nu)}_{n-\nu+1,\ldots\, n},$$

tenendo presente che

$$A_n = 1 + \sum_{1}^{n}{}_\nu \sum_{1}^{n-\nu+1}{}_{i_1} \sum_{2}^{n-\nu+2}{}_{i_2} \ldots \sum_{\nu}^{n}{}_{i_\nu} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \ldots & i_\nu \\ i_1 & i_2 \ldots & i_\nu \end{pmatrix},$$

si ha:

$$|S - A_n| = |S - (1 + \sum_{1}^{n}{}_\nu S^{(\nu)}_{n-\nu+1,\ldots\, n})| \leqq |S -$$
$$-(1 + \sum_{1}^{n}{}_\nu S^{(\nu)})| + |\sum_{1}^{n}{}_\nu R^{(\nu)}_{n-\nu+1,\ldots\, n}|;$$

e poichè in base alle ipotesi 1) e 2) la serie $1 + \sum_{1}^{\infty}{}_\nu S^{(\nu)}$ riesce (assolutamente) convergente con somma S, il primo termine all'ultimo membro si può rendere $< \frac{\varepsilon}{3}$, comunque sia stato fissato $\varepsilon > 0$, non appena n è abbastanza grande. Si ha poi per $\bar{n} < n$:

$$|\sum_{1}^{n}{}_\nu R^{(\nu)}_{n-\nu+1,\ldots,\, n}| \leqq \sum_{1}^{\bar{n}}{}_\nu R^{(\nu)}_{n-\nu+1,\ldots,\, n}| +$$
$$+ \sum_{\bar{n}+1}^{n}{}_\nu |R^{(\nu)}_{n-\nu+1,\ldots,\, n}| \leqq \sum_{1}^{\bar{n}}{}_\nu |R^{(\nu)}_{n-\nu+1,\ldots\, n}| + \sum_{\bar{n}+1}^{n}{}_\nu |S^{(\nu)}_{n-\nu+1,\ldots\, n}| +$$
$$+ \sum_{\bar{n}+1}^{n}{}_\nu |S^{(\nu)}| \leqq \sum_{1}^{\bar{n}}{}_\nu |R^{(\nu)}_{n-\nu+1,\ldots,\, n}| + 2 \sum_{\bar{n}+1}^{n}{}_\nu L^{(\nu)}.$$

Il secondo termine all'ultimo membro, non appena $\bar{n}$ è abbastanza grande e qualunque sia $n > \bar{n}$, si può rendere $< \frac{\varepsilon}{3}$ in base all'ipotesi 2); per quanto riguarda il primo termine all'ultimo membro, poichè esso è la somma dei resti delle prime $\bar{n}$ serie di (12) ed essendosi queste supposte convergenti, è possibile prendere n in modo tale che esso risulti $< \frac{\varepsilon}{3}$; perciò per n abbastanza grande riesce $| S - A_n | < \varepsilon$, il che prova l'asserto.

II. - Fattori di convergenza per determinanti infiniti semplicemente convergenti.

Non tratteremo il problema dei fattori di convergenza in tutta la sua generalità ma ci limiteremo a un caso particolare che permette di conseguire risultati notevolmente semplici. Precisamente: date due successioni $\{ \alpha_n(P) \}$, $\{ \beta_n(P) \}$ di funzioni di un punto P variabile in un insieme E di uno spazio euclideo a un numero qualunque di dimensioni, consideriamo il determinante infinito:

$$(16) \quad \begin{vmatrix} 1 + a_{11}\ \alpha_1(P)\ \beta_1(P) & a_{12}\ \alpha_1(P)\ \beta_2(P) & \dots \\ a_{21}\ \alpha_2(P)\ \beta_1(P) & 1 + a_{22}\ \alpha_2(P)\ \beta_2(P) & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

il cui sviluppo formale per dimensioni è:

$$(17) \quad 1 + \sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} \left(\sum_{\substack{1 \\ i_1 < i_2 < \dots < i_\nu}}^{\infty}{}_{i_1 i_2 \dots i_\nu} \prod_{1}^{\nu}{}_{h} \alpha_{i_h}(P)\ \beta_{i_h}(P) \begin{pmatrix} i_1\ i_2 \dots i_\nu \\ i_1\ i_2 \dots i_\nu \end{pmatrix} \right).$$

Indicando con $D_\alpha(P)$ e $D_\beta(P)$ le matrici diagonali

$$\begin{Vmatrix} \alpha_1(P) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \alpha_2(P) & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \alpha_3(P) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} \beta_1(P) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \beta_2(P) & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \beta_3(P) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{Vmatrix}$$

rappresenteremo (16) anche con la scrittura *det.* $(\boldsymbol{E}+$ $+\boldsymbol{D}_{\alpha}(P)\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{D}_{\beta}(P))$.

Ebbene noi vogliamo le condizioni necessarie e sufficenti cui debbono soddisfare $\{\alpha_n(P)\}$ e $\{\beta_n(P)\}$ affinchè (16) sia semplicemente convergente su E ogniqualvolta lo è (10) e, detto P_0 un punto di accumulazione di E non appartenente a tale insieme, vogliamo le condizioni necessarie e sufficenti affinchè si abbia $\lim\limits_{\substack{P \to P_0 \\ P < E}} \textit{det.}\,(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{D}_{\alpha}(P)\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{D}_{\beta}(P) = \textit{det.}\,(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})$, ogniqualvolta quest'ultimo è semplicemente convergente.

Poniamo $\alpha_i(P)\ \beta_i(P) = \gamma_i(P)$, $i = 1, 2, \dots$;

$$(13') \qquad \sigma^{(\nu)}_{m_1 m_2 \dots m_\nu}(P) = \sum_{1}^{m_1}{}_{i_1} \sum_{2}^{m_2}{}_{i_2} \dots \sum_{\nu}^{m_\nu}{}_{i_\nu} \prod_{1}^{\nu}{}_{h} \gamma_{i_h}(P) \begin{pmatrix} i_1\, i_2 \dots i_\nu \\ i_1\, i_2 \dots i_\nu \end{pmatrix}, \quad i_1 < i_2 < \dots < i_\nu$$

qualunque sia il numero naturale ν e, per ogni ν, qualunque sia la ν—*pla* di numeri naturali $m_1, m_2, \dots, m_\nu$ con $m_1 <$ $< m_2 < \dots < m_\nu$;

$$(14') \qquad \sigma^{(\nu)}(P) = \sum_{\substack{1 \\ i_1 < i_2 < \dots < i_\nu}}^{\infty}{}_{i_1 i_2 \dots i_\nu} \prod_{1}^{\nu}{}_{h} \gamma_{i_h}(P) \begin{pmatrix} i_1\, i_2 \dots i_\nu \\ i_1\, i_2 \dots i_\nu \end{pmatrix}$$

in caso di convergenza della serie al lato destro;

$$(15') \qquad L^{(\nu)}_{\alpha,\beta}(P) = \textit{estr. sup.}\, |\sigma^{(\nu)}_{m_1 m_2 \dots m_\nu}(P)|$$

in corrispondenza a tutte le ν—*ple* di numeri naturali m_1, $m_2, \dots, m_\nu$ con $m_1 < m_2 < \dots < m_\nu$, per ogni fissato valore di ν, nell'ipotesi che sia limitato l'insieme delle somme parziali (13').

Attualmente il fattore $f_{i_1 i_2 \dots i_n}(P)$ viene sostituito dal prodotto $\prod_{1}^{n}{}_{h} \gamma_{i_h}(P)$ ed è immediato verificare che, posto

$$(18) \qquad \Delta\gamma_i(P) = \gamma_i(P) - \gamma_{i+1}(P),$$

la (2) diventa

$$(2') \quad \Delta_{\substack{11\ldots 100\ldots 0\\ 1,2,\ldots,n-k,1,2,\ldots,k}} \prod_{1}^{n}{}_h \gamma_{i_h}(P) = \prod_{1}^{n-k}{}_h \Delta\gamma_{i_h}(P)\cdot \prod_{n-k+1}^{n}{}_h \gamma_{i_h}(P).$$

Per scrivere la relazione analoga alla (4) conviene associare alla serie $n-pla$ $\sum_{\substack{1\\ i_1<i_2<\ldots<i_n}}^{\infty}{}_{i_1 i_2 \ldots i_n} \binom{i_1\, i_2 \ldots i_n}{i_1\, i_2 \ldots i_n}$, $n=1,2,\ldots$, la relativa successione $n-pla$ completa delle somme parziali $\overline{S}^{(n)}_{i_1 i_2 \ldots i_n}$, cioè senza più la restrizione che sia $i_1<i_2<\ldots<i_n$; osservando che:

$$\overline{S}^{(n)}_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \begin{cases} S^{(n)}_{i_1 i_2 \ldots i_n} & \text{se è } i_1<i_2<\ldots<i_n; \\ S^{(n)}_{j_1 j_2 \ldots j_{n-1} i_n} & \text{se non è } i_1<i_2<\ldots<i_n, \text{ indicando con } j_1, j_2, \ldots, j_{n-1} \text{ la } (n-1)-pla \text{ dei massimi interi contenuti rispettivamente in } i_1, i_2, \ldots, i_{n-1} \text{ con la condizione che sia } j_1<j_2<\ldots<j_{n-1}<i_n; \\ 0 & \text{se } i_k<k \text{ per almeno un } k\ (k=1,2,\ldots,n), \end{cases}$$

si vede che la (13′) si può scrivere:

$$(4') \quad \sigma^{(n)}_{\substack{m_1 m_2 \ldots m_n\\ m_1<m_2<\ldots<m_n}}(P) = \sum_{1}^{m_1-1}{}_{i_1} \sum_{2}^{m_2-1}{}_{i_2} \ldots \sum_{n}^{m_n-1}{}_{i_n} \overline{S}^{(n)}_{i_1 i_2 \ldots i_n} \prod_{1}^{n}{}_h \Delta\gamma_{i_h}(P) +$$

$$+ \sum_{1}^{n-1}{}_k \left[\prod_{n-k+1}^{n}{}_h \gamma_{m_h}(P) \cdot \sum_{1}^{m_1-1}{}_{i_1} \sum_{2}^{m_2-1}{}_{i_2} \ldots \right.$$

$$\left. \cdot \sum_{n-k}^{m_{n-k}-1}{}_{i_{n-k}} \overline{S}^{(n)}_{i_1 i_2 \ldots i_{n-k} m_{n-k+1} \ldots m_n} \prod_{1}^{n-k}{}_h \Delta\gamma_{i_h}(P) \right] +$$

$$+ S^{(n)}_{m_1 m_2 \ldots m_n} \prod_{1}^{n}{}_h \gamma_{m_h}(P),$$

dove nelle sommatorie al lato destro non compare più la limitazione $i_1 < i_2 < \dots < i_n$.

Ciò premesso, passiamo a dimostrare il seguente teorema:

Condizione necessaria e sufficente affinchè det. $(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{D}_\alpha(P)\, \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{D}_\beta(P))$ *sia semplicemente convergente ogniqualvolta sussiste per det.* $(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A})$ *la condizione* 2) *di* $\boldsymbol{I}$ (*anche senza che sussista la condizione* 1) *di* $\boldsymbol{I}$) *è che sia:*

$$\sum_{1}^{\infty}{}_i \,|\, \Delta\gamma_i(P) \,| < C(P) \tag{19}$$

con $C(P)$ *funzione positiva di* P *su* E, *e*

$$\lim_{n \to \infty} \gamma_n(P) = 0 \tag{20}$$

per ogni punto P *di* E.

Si tratta di provare che le condizioni (19) e (20) sono necessarie e sufficenti affinchè, qualunque sia il punto P di E, e qualunque sia il *det.* $(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A})$ soddisfacente le condizioni deldell'enunciato:

1) ogni serie (14′) sia convergente con somme parziali limitate;

2) sia convergente la serie il cui termine ν — *mo* è dato dalla (15′).

Intanto la condizione (19) è necessaria e sufficente affinchè sia convergente la serie $\sum_{1}^{\infty}{}_i\, \gamma_i(P)\, a_{ii}$, costituente il secondo termine di (17), tutte le volte che è convergente la serie $\sum_{1}^{\infty}{}_i\, a_{ii}$, se si tiene presente che, in un determinante infinito semplicemente convergente, gli elementi della diagonale principale sono i termini di una serie convergente che può essere del tutto arbitraria (basti pensare al determinante infinito in cui, per ogni $k = 1, 2, \dots$, è $a_{1k} = a_{2k} = \dots = a_{kk} = \dots$; semplicemente convergente tutte le volte che tale è la serie $\sum_{1}^{\infty}{}_k\, a_{kk}$).

Passiamo ora alla serie $\sum_{1\ i<j}^{\infty}{}_{ij}\ \gamma_i(P)\ \gamma_j(P)\begin{pmatrix} i\ j \\ i\ j \end{pmatrix}$ costituente il terzo termine di (17). La (4′) fornisce per $n = 2$:

$$
(4'') \qquad \sigma^{(2)}_{p,q}(P) = \sum_{1}^{p-1}{}_i \sum_{2}^{q-1}{}_j \overline{S}^{(2)}_{ij}\ \Delta\gamma_i(P)\ \Delta\gamma_j(P) + \atop {p<q}
$$

$$
+ \gamma_p(P) \sum_{2}^{q-1}{}_j \overline{S}^{(2)}_{pj}\ \Delta\gamma_j(P) + \gamma_q(P) \sum_{1}^{p-1}{}_i \overline{S}^{(2)}_{iq}\ \Delta\gamma_i(P) + S^{(2)}_{pq}\ \gamma_p(P)\ \gamma_q(P)\,.
$$

Le condizioni (5) e (6) diventano attualmente:

$$
(5') \qquad \sum_{1}^{\infty}{}_i \sum_{2}^{\infty}{}_j \left| \Delta\gamma_i(P)\ \Delta\gamma_j(P) \right| < K(P)\,,
$$

per un'opportuna funzione positiva $K(P)$ di P su E, e

$$
(6') \qquad \lim_{n\to\infty} \gamma_n(P)\ \Delta\gamma_i(P) = 0 \qquad\qquad i = 1,\ 2, \ldots.
$$

La (5′) è conseguenza della (19) essendo $\sum_{1}^{\infty}{}_i \sum_{2}^{\infty}{}_j |\Delta\gamma_i(P)\ \Delta\gamma_j(P)| =$ $= \sum_{1}^{\infty}{}_i |\Delta\gamma_i(P)| \cdot \sum_{2}^{\infty}{}_j |\Delta\gamma_j(P)|$; la (6′) è soddisfatta quando e solo quando sussiste la (20) (a meno che non sia $\gamma_i(P) = \gamma_j(P)$ per ogni coppia di numeri naturali i, j e qualunque sia il punto P di E, il che escludiamo). Però le condizioni (5′) e (6′) che sono sufficenti, non si potranno senz'altro ritenere necessarie, poichè le serie doppie $\sum_{1\ i<j}^{\infty}{}_{ij} \begin{pmatrix} i\ j \\ i\ j \end{pmatrix}$, che attualmente interessano, sono particolari serie doppie $\sum_{1}^{\infty}{}_{ij}\ u_{ij}$ avendo $u_{ij} = 0$ per $i \geq j$; d'altra parte la (5′) è conseguenza della (19); basta quindi provare la necessità della (6′), ossia della (20). Allo scopo supponiamo che per un certo punto P_1 di E non sia $\lim_{n\to\infty} \gamma_n(P_1) = 0$;

sarà allora

$$|\gamma_{n_k}(P_1)| > \varepsilon$$

per una certa quantità positiva ε e per una certa successione crescente $n_1, n_2, \ldots.$ di numeri naturali. Supponiamo inoltre che sia $\Delta\gamma_1(P_1) \neq 0$, il che non costituisce restrizione.

Ciò premesso, consideriamo il determinante infinito

$$\begin{vmatrix} 1+a_{11} & a_{11} & a_{13} & a_{14} & a_{15}\ldots\ldots \\ -a_{11} & 1-a_{11} & -a_{13} & -a_{14} & -a_{15}\ldots. \\ a_{11} & a_{11} & 1+a_{33} & a_{44} & a_{55}\ldots\ldots \\ a_{11} & a_{11} & a_{33} & 1+a_{44} & a_{55}\ldots\ldots \\ a_{11} & a_{11} & a_{33} & a_{44} & 1+a_{55}\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix},$$

con $a_{11} \neq 0$, il cui sviluppo dimensionale è $1 + \sum_{1}^{\infty}{}_i\, a_{ii} + \sum_{1\ i<j}^{\infty}{}_{ij} \binom{i\,j}{i\,j}$, risultando tutti nulli i minori principali d'ordine superiore a due. La serie semplice sia un'arbitraria serie convergente (si pensi che debbono coesistere la possibilità di scelta per il secondo e terzo termine dello sviluppo (12)); la serie doppia si riduce a:

$$\begin{array}{l} 0 + \binom{1\,3}{1\,3} + \binom{1\,4}{1\,4} + \ldots\ldots \\ \quad - \binom{1\,3}{1\,3} - \binom{1\,4}{1\,4} - \ldots\ldots \\ \qquad\qquad + \;\; 0 \;\; + \ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\quad + \ldots\ldots \end{array}$$

e la relativa successione doppia completa $\{\overline{S}^{(2)}_{ij}\}$ $i = 1, 2, \ldots.;$ $j = 2, 3, \ldots.,$ delle somme parziali è:

$$\begin{array}{llll} 0\,, & \binom{1\,3}{1\,3}\,, & \binom{1\,3}{1\,3}+\binom{1\,4}{1\,4}\,, & \ldots\ldots \\ 0\,, & 0\,, & 0 & ,\ldots\ldots \\ 0\,, & 0\,, & 0 & ,\ldots\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

Assegnamo ora ad a_{13}, a_{14}, a_{15},.... valori tali che sia:

$$\overline{S}^{(2)}_{1,n_k} = (-1)^k \frac{\gamma_{n_k}(P_1)\,\Delta\gamma_1(P_1)}{|\,\gamma_{n_k}(P_1)\,\Delta\gamma_1(P_1)\,|} \qquad k = 1\,,2\,,\ldots.$$

$$\overline{S}^{(2)}_{ij} = 0 \qquad \text{per ogni altro } i, j.$$

Con ciò $\sum_{1\;\;i<j}^{\infty}{}_{i\,j} \binom{i\,j}{i\,j}$ riesce convergente con somma eguale a zero e somme parziali ovviamente limitate, onde il determinante infinito costruito riesce semplicemente convergente.

La (4″), prendendo per esempio $q = p + 1$, fornisce:

$$\sigma^{(2)}_{p,p+1}(P_1) = \sum_{2}^{p}{}_j\, \overline{S}^{(2)}_{1,j}\,\Delta\gamma_1(P_1)\,\Delta\gamma_j(P_1) + \overline{S}^{(2)}_{1,p+1}\,\gamma_{p+1}(P_1)\,\Delta\gamma_1(P_1)\,,$$

non appena è $p > 1$. Ora il primo termine al lato destro converge per $p \to \infty$ in base alla (19), mentre se si fa tendere p all'∞ assègnandole successivamente i valori $n_1 - 1$, $n_2 - 1$,..., allora il secondo termine al lato destro oscillerà tra valori $> \varepsilon\,|\,\Delta\gamma_1(P_1)\,|$ e $< -\varepsilon\,|\,\Delta\gamma_1(P_1)\,|$; la successione $\sigma^{(2)}_{n_1-1,n_1}(P_1)$, $\sigma^{(2)}_{n_2-1,n_2}$,.... è quindi oscillante onde la $\sum_{1\;\;i<j}^{\infty}{}_{i\,j}\, \gamma_i(P_1)\,\gamma_j(P_1)\binom{i\,j}{i\,j}$ non può essere convergente pur essendo convergente la $\sum_{1\;\;i<j}^{\infty}{}_{i\,j}\binom{i\,j}{i\,j}$, con somme parziali limitate. Di qui la necessità di (20).

Passiamo ora alla serie n — *pla* (14') costituente il termine $(n+1)$ — *mo* di (17). Tenendo presente la (4'), le condizioni (5) e (6) diventano:

$$(5'') \qquad \sum_{1}^{\infty}{}_{i_1} \sum_{2}^{\infty}{}_{i_2} \dots \sum_{n}^{\infty}{}_{i_n} \left| \prod_{1}^{n}{}_h \Delta \gamma_{i_h}(P) \right| < K(P) ,$$

per un'opportuna funzione positiva $K(P)$ di P su E, e

$$(6'') \qquad \lim_{i_{n-k+1}, \dots, i_n \to \infty} \prod_{1}^{n-k}{}_h \Delta \gamma_{i_h}(P) \cdot \prod_{n-k+1}^{n}{}_h \gamma_{i_h}(P) = 0 ,$$

per ogni numero naturale k e, fissato k, per ogni $(n-k)$ — *pla* di numeri naturali $i_1, i_2, \dots, i_{n-k}$ soddisfacenti la sola limitazione inferiore $i_m \geq m$, $m = 1, 2, \dots, n$. Ora

$$(21) \quad \sum_{1}^{\infty}{}_{i_1} \sum_{2}^{\infty}{}_{i_2} \dots \sum_{n}^{\infty}{}_{i_n} \left| \prod_{1}^{n}{}_h \Delta \gamma_{i_h}(P) \right| = \prod_{1}^{n}{}_h \left(\sum_{h}^{\infty}{}_i \left| \Delta \gamma_i(P) \right| \right),$$

onde la condizione (19) è sufficente ad assicurare la (5''), mentre la (20) porta di conseguenza la (6''). Si ha poi dalla (4'):

$$\sigma'^{n)}(P) = \lim_{m_1, m_2, \dots, m_n \to \infty} \sigma^{n)}_{m_1 m_2 \dots m_n}(P) =$$

$$= \sum_{1}^{\infty}{}_{i_1} \sum_{2}^{\infty}{}_{i_2} \dots \sum_{n}^{\infty}{}_{i_n} \left(\bar{S}^{n)}_{i_1 i_2 \dots i_n} \prod_{1}^{n}{}_h \Delta \gamma_{i_h}(P) \right) ,$$

onde la (14') sarà convergente con somme parziali limitate ogniqualvolta la (14) ha somme parziali limitate senza essere necessariamente convergente. Con ciò resta provata completamente la prima parte della dimostrazione.

Passiamo ora alla seconda parte, cioè a provare la convergenza della serie $\sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} L^{(\nu)}_{\alpha, \beta}(P)$.

Riprendendo il teorema generale sui fattori di convergenza per serie multiple riportato all' inizio, ricordiamo che (MOORE, l. c.) sotto le condizioni (5) e (6) si ha:

$$\sum_{m_{n-k+1}}^{\infty} {}_{i_{n-k+1}} \cdots \sum_{m_n}^{\infty} {}_{i_n} \Delta_{11\ldots1} f_{i_1 i_2 \ldots i_n}(P) =$$
$$= \Delta_{\substack{11\,\ldots\,10\,\ldots\,0 \\ 1,2,\ldots,n-k,1,\ldots,k}} f_{i_1 i_2 \ldots i_{n-k} m_{n-k+1} \ldots m_n}(P)$$

e simili, onde la (4) si può scrivere:

$$\sigma_{m_1 m_2 \ldots m_n} = \sum_{1}^{m_1-1} {}_{i_1} \cdots \sum_{1}^{m_n-1} {}_{i_n} S_{i_1 i_2 \ldots i_n} \Delta_{11\ldots1} f_{i_1 i_2 \ldots i_n}(P) +$$
$$+ \sum_{1}^{n-1} {}_k \left[\sum_{1}^{m_1-1} {}_{i_1} \cdots \sum_{1}^{m_{n-k}-1} {}_{i_{n-k}} S_{i_1 i_2 \ldots i_{n-k} m_{n-k+1} \ldots m_n} \sum_{m_{n-k+1}}^{\infty} {}_{i_{n-k+1}} \cdots \right.$$
$$\left. \cdots \sum_{m_n}^{\infty} {}_{i_n} \Delta_{11\ldots1} f_{i_1 i_2 \ldots i_n}(P) \right] + S_{m_1 m_2 \ldots m_n} f_{m_1 m_2 \ldots m_n}(P) ,$$

e quindi nel nostro caso:

$$\left| \sigma^{(n)}_{\substack{m_1\, m_2\, \ldots\, m_n \\ m_1 < m_2 < \ldots < m_n}}(P) \right| \leq L^{(n)} \left(\sum_{1}^{\infty} {}_{i_1} \sum_{2}^{\infty} {}_{i_2} \cdots \sum_{n}^{\infty} {}_{i_n} \left| \prod_{1}^{n} {}_h \Delta \gamma_{i_h}(P) \right| + \right.$$
$$\left. + \left| \prod_{1}^{n} {}_h \gamma_{m_h}(P) \right| \right) .$$

Pertanto, essendo $\lim\limits_{n \to \infty} \gamma_n(P) = 0$, fissato un numero positivo ε minore dell' unità, sia $\overline{n}_p$ il più piccolo intero positivo tale che per $n > \overline{n}_p$ sia $|\gamma_n(P)| < \varepsilon$, e sia $M_p = max\, |\gamma_i(P)|$, $i = 1, 2, \ldots$; sarà quindi

$$\left| \sigma^{(n)}_{\substack{m_1\, m_2\, \ldots\, m_n \\ m_1 < m_2 < \ldots < m_n}}(P) \right| \leq L^{(n)} \left(\prod_{1}^{n} {}_h \sum_{h}^{\infty} {}_i \left| \Delta \gamma_i(P) \right| + M_p^{\overline{n}_p} \right)$$

qualunque sia la n — *pla* di numeri naturali $m_1, m_2, .., m_n$ soddisfacenti la sola condizione $m_1 < m_2 < \ldots < m_n$. Ma la successione $\left\{ \prod_1^n{}_h \sum_h^\infty{}_i \left| \Delta \gamma_i(P) \right| \right\}$ è manifestamente limitata perchè convergente a zero, onde dall'ipotesi 2) di I segue la convergenza della serie $\sum_1^\infty{}_\nu L_{\alpha.\beta}^{(\nu)}(P)$, e con ciò il teorema è completamente provato.

Occupiamoci ora delle condizioni di regolarità. Si ha che:

Condizione sufficente affinchè det. $(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{D}_\alpha(P)\, \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{D}_\beta(P))$ *sia semplicemente convergente su tutto* E *e sia* $\lim\limits_{\substack{P \to P_0 \\ P < E}} det. (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{D}_\alpha(P)\, \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{D}_\beta(P)) = det. (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A})$ *tutte le volte che quest'ultimo è semplicemente convergente, è che, oltre alle condizioni* (19) e (20), *sia*

$$\lim_{\substack{P \to P_0 \\ P < E}} \gamma_i(P) = 1 \qquad i = 1, 2, \ldots. ; \tag{22}$$

esistano due numeri positivi C' *e* C'' *e un intorno* J *del punto* P_0 *tali che nell'insieme* $E' = E \cdot J$ *sia*

$$\sum_1^\infty{}_i \left| \Delta \gamma_i(P) \right| < C' \tag{23}$$

$$\prod_1^n{}_h \sum_h^\infty{}_i \left| \Delta \gamma_i(P) \right| < C'' \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{24}$$

Notiamo subito che la condizione (24), certamente soddisfatta dalla (23) se $C' \leq 1$, non è però in generale conseguenza delle condizioni (20), (22) e (23). Sia per esempio E una successione $\{P_k\}$ di punti convergente al punto P^0 non di E. Definiamo la successione $\{\gamma_n(P)\}$ nel modo seguente:

$$\gamma_i(P_k) = \begin{cases} 1 & \text{per } 1 \leq i \leq k \\ 2 & \text{»}\ \ i = k+1 \\ 0 & \text{»}\ \ i > k+1 \end{cases}$$

le condizioni (20), (22) e (23) sono soddisfatte, mentre riesce:

$$\prod_1^n{}_h \sum_h^\infty{}_i \left| \Delta \gamma_i (P_k) \right| = \begin{cases} 3^{n-1} 2 & \text{per } n \leq k+1 \\ 0 & \text{» } n > k+1 \,. \end{cases}$$

Ciò premesso, poichè $\sum_1^\infty{}_i \, a_{ii}$ è un'arbitraria serie convergente, si vede che le condizioni (22) e (23) sono necessarie e sufficenti per il secondo termine dello sviluppo (17).

Passando ora al termine $(n+1)$ — *mo* di (17) si vede che le condizioni (7), (8) e (9) forniscono:

$$\lim_{\substack{P \to P_0 \\ P < E}} \prod_1^\infty{}_h \gamma_{i_h}(P) = 1 \qquad i_1, i_2, \ldots, i_n = 1, 2 \ldots; \tag{7'}$$

$$\lim_{\substack{P \to P_0 \\ P < E}} \left| \Delta \gamma_{i_k}(P) \right| \sum_1^\infty{}_{i_1} \sum_2^\infty{}_{i_2} \ldots \sum_{k-1}^\infty{}_{i_{k-1}} \sum_{k+1}^\infty{}_{i_{k+1}} \ldots \tag{8'}$$

$$\ldots \sum_n^\infty{}_{i_n} \prod_1^{k-1}{}_h \left| \Delta \gamma_{i_h}(P) \right| \cdot \prod_{k+1}^n{}_h \left| \Delta \gamma_{i_h}(P) \right| = 0 \qquad \begin{array}{l} k = 1, 2, \ldots, n \\ i_k = 1, 2, \ldots; \end{array}$$

$$\sum_1^\infty{}_{i_1} \sum_2^\infty{}_{i_2} \ldots \sum_n^\infty{}_{i_n} \prod_1^n{}_h \left| \Delta \gamma_{i_h}(P) \right| < K_n^1 , \tag{9'}$$

per un opportuno numero positivo K_n^1, relazioni che debbono essere soddisfatte per ogni valore di n.

L'ipotesi che la somma della serie al lato sinistro di (23) sia limitata in E' assicura la (9') qualunque sia n, in base alla (21). La (8') è assicurata dalla (23) e dalla (22). Perciò, intanto, le condizioni (22) e (23), insieme alle (19) e (20), sono necessarie e sufficenti affinchè la somma di ciascuna delle serie multiple che costituiscono i termini dello sviluppo (17) di *det.* $(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{D}_\alpha(P) \, \boldsymbol{A} \, \boldsymbol{D}_\beta(P))$ converga, per $P \to P_0$ su E, verso la somma della corrispondente serie dello sviluppo (12) di *det.* $(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A})$, ogniqualvolta quest'ultimo è semplicemente convergente.

Si ha poi che la serie

$$1+\sum_1^\infty{}_n\sigma^{(n)}(P)=1+$$

$$+\sum_1^\infty{}_n\left(\sum_1^\infty{}_{i_1}\sum_2^\infty{}_{i_2}\ldots\sum_n^\infty{}_{i_n}\overline{S}^{(n)}_{i_1 i_2\ldots i_n}\prod_1^n{}_h\Delta\gamma_{i_h}(P)\right),$$

sotto la condizione (24), riesce totalmente convergente su E'; basta ricordare la 2) di I tenendo presente che

$$\left|\sum_1^\infty{}_{i_1}\sum_2^\infty{}_{i_2}\ldots\sum_n^\infty{}_{i_n}\overline{S}^{(n)}_{i_1 i_2\ldots i_n}\prod_1^\infty{}_h\Delta\gamma_{i_h}(P)\right|\leq L^{(n)}\sum_1^\infty{}_{i_1}\sum_2^\infty{}_{i_2}\ldots$$

$$\ldots\sum_n^\infty{}_{i_n}\prod_1^\infty{}_h|\Delta\gamma_{i_h}(P)|=L^{(n)}\prod_1^n{}_h\sum_h^\infty{}_i|\Delta\gamma_i(P)|<L^{(n)}C''.$$

Di qui la sufficenza delle condizioni dell'enunciato.

Vogliamo ora mostrare la necessità della condizione (24), almeno nel caso che la successione $\{\gamma_n(P)\}$ sia monotona, per esempio non crescente, su E, o, per lo meno, su E'.

Intanto, anche nel caso attuale, non è detto che la (24) sia conseguenza delle condizioni (20) e (22), (la (23) essendo ovviamente soddisfatta). Sia infatti E una successione di punti $\{P_k\}$ convergente al punto P_0 non di E. Poniamo $\gamma_i(P_k)=$ $=\begin{cases}\dfrac{k+i}{k+i-1} & \text{per } 1\leq i\leq k^2\\ 0 & \phantom{\text{per }} i>k^2\end{cases}$; le condizioni (20) e (22) sono soddisfatte e ciononostante riesce:

$$\prod_1^{k^2}{}_h\sum_h^\infty{}_i\Delta\gamma_i(P_k)=k+1.$$

Supponiamo dunque che la (24) non sia soddisfatta; sarà allora possibile scegliere una successione $\{P_k\}$ di punti di E', convergente a P_0, e una successione crescente $\{n_k\}$ di numeri naturali per cui sia $\prod_{1}^{n_k}{}_h \sum_{h}^{\infty}{}_i \Delta\gamma_i(P_k) > k^3$. Se allora consideriamo il determinante infinito

$$\begin{vmatrix} 1+a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\dots \\ -a_{21} & 1 & a_{23} & a_{24} & 0 & 0 & 0\dots \\ a_{31} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\dots \\ 0 & 0 & -a_{43} & 1 & a_{45} & a_{46} & 0\dots \\ 0 & 0 & a_{53} & 0 & 1 & 0 & 0\dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{65} & 1 & a_{67}\dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{75} & 0 & 1\dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

il cui sviluppo è:

$$1+a_{11}+a_{12}\ a_{21}+a_{12}\ a_{23}\ a_{31}+\dots\dots\dots+a_{12}\ a_{24}\dots\dots$$
$$\dots a_{2(n-1),2n}\ a_{2n,2n-1}\ a_{2n-1,2n-3}\dots\dots\dots a_{31}+a_{12}\ a_{24}\dots\dots$$
$$\dots a_{2(n-1),2n}\ a_{2n,2n+1}\ a_{2n+1,2n-1}\ a_{2n-1,2n-3}\dots\dots a_{31}+\dots\dots\dots$$

e se si scelgono le a_{hk} in modo che la serie ora scritta abbia il termine di posto n_k+1, $k=1, 2, \dots,$ eguale a $\frac{1}{k^2}$ e i rimanenti termini tutti nulli (il che è possibile perchè ogni termine del precedente sviluppo, a cominciare dal terzo, contiene un fattore $a_{2n,2n-1}$ oppure $a_{2n,2n+1}$ che non compare in nessun altro termine dello sviluppo), il determinante riesce semplicemente convergente, perchè lo è assolutamente, riuscendo per ogni k: $L^{(n_k)} = \dot{S}^{(n_k)}_{i_1 i_2 \dots i_{n_k}} = \frac{1}{k^2}$, qualunque sia la $n_k - pla$ di numeri naturali $i_1, i_2, \dots, i_{n_k}$, con $i_h \geq h$; si ha:

$$1+\sum_{1}^{\infty}{}_n\, \sigma^{(n)}(P_k) > \frac{1}{k^2} \prod_{1}^{n_k}{}_h \sum_{h}^{\infty}{}_i \Delta\gamma_i(P_k) > k\ ,$$

onde per $P \to P_0$ percorrendo la successione $\{P_k\}$, la somma della serie $1 + \sum_{1}^{\infty} {}_n \sigma^{(n)}(P_k)$ diverge anzichè convergere a $1 + \sum_{1}^{\infty} {}_n S^{(n)}$.

È immediato che una dimostrazione perfettamente simile si può fare anche nell'ipotesi meno restrittiva che la successione $\{\gamma_n(P)\}$ sia monotona su E' almeno per n maggiore di un certo $\bar{n}$.

III. - Convergenza generalizzata e osservazioni varie.

1) Successioni particolarmente semplici di fattori di convergenza $\{\alpha_n(P)\}$, $\{\beta_n(P)\}$ sono quelle per cui la successione $\{\gamma_n(P)\}$ riesce monotona convergente a zero in ogni punto di E con $\lim\limits_{\substack{P \to P_0 \\ P < E}} \gamma_n(P) = 1$ per ogni n e per cui la serie $\sum_{1}^{\infty} {}_n |\Delta \gamma_n(P)|$ (che riesce convergente su tutto E poichè $\sum_{n+1}^{n+p} {}_k |\Delta \gamma_k(P)| = |\gamma_{n+1}(P) - \gamma_{n+p}(P)|$) abbia somma non superiore all'unità in tutti i punti di E sufficentemente prossimi a P_0. In particolare se P varia sulla retta ed E è l'insieme dei punti di ascissa positiva minore di uno e P_0 è il punto di ascissa uno, prendendo $\alpha_n(P) = \beta_n(P) = \rho^{n-1}$ (ρ ascissa di P) si hanno successioni di fattori di convergenza di tipo abeliano [4] soddisfacenti tutte le condizioni di regolarità.

Altre successioni di fattori di convergenza sono quelle per cui le serie $\sum_{1}^{\infty} {}_n \alpha_n^2(P)$ e $\sum_{1}^{\infty} {}_n \beta_n^2(P)$ riescono convergenti su

[4] A. Rosolini - l. c.

tutto E con $\lim\limits_{\substack{P \to P_0 \\ P < E}} \gamma_n(P) = 1$ per ogni n e per cui la serie $\sum_1^\infty {}_n | \Delta \gamma_n(P) |$ (la quale riesce convergente su tutto E perchè, riuscendo assolutamente convergente la $\sum_1^\infty {}_n \gamma_n(P) = \sum_1^\infty {}_n \alpha_n(P) \, \beta_n(P)$ per un noto teorema di HELLINGER–TOEPLITZ, risulta $\sum_1^\infty {}_n | \Delta \gamma_n(P) | < 2 \sum_1^\infty {}_n | \gamma_n(P) |$) abbia la somma non superiore all'unità in tutti punti di E sufficientemente prossimi a P_0.

2) Si noti che facendo uso per esempio di successioni di quest'ultimo tipo, poichè la serie semplice $\sum_1^\infty {}_h \alpha_h(P) \, \beta_h(P)$ e la serie doppia $\sum_1^\infty {}_{hk} \alpha_h^2(P) \, \beta_k^2(P)$ riescono assolutamente convergenti su tutto E, se la successione doppia $\{ a_{ij} \}$ è limitatata, il *det.* $(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{D}_\alpha(P) \, \boldsymbol{A} \, \boldsymbol{D}_\beta(P))$ è assolutamente convergente, insieme a tutti i suoi minori, su tutto E (5), onde, per la condizione di regolarità, il *det.* $(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A})$ si può ritenere convergente in senso generalizzato dal punto di vista della convergenza assoluta di von KOCK.

3) Il teorema primo di ***II*** conduce naturalmente alla seguente considerazione: se *det.* $(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A})$ non è semplicemente convergente ma le serie che costituiscono i termini del suo sviluppo formale hanno somme parziali limitate e sussiste l'ipotesi 2) di ***I***, *det.* $(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{D}_\alpha(P) \, \boldsymbol{A} \boldsymbol{D}_\beta(P))$ riesce semplicemente convergente. Ora se $\{ \alpha_n(P) \}$ e $\{ \beta_n(P) \}$ sono successioni di fattori di convergenza che verificano le condizioni di regolarità, può darsi che esista il $\lim\limits_{\substack{P \to P_0 \\ P < E}}$ *det.* $(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{D}_\alpha(P) \, \boldsymbol{A} \, \boldsymbol{D}_\beta(P)$; è naturale allora

(5) F. RIESZ l. c., pagg. 35–48.

assumere questo come valor generalizzato di *det.* $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})$. In tal senso è per esempio da considerare il limite della successione dei ridotti del *det.* $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})$, qualora esso sia convergente secondo Hill, ferme restando le ipotesi indicate sulle somme parziali delle serie che figurano nello sviluppo formale per dimensioni. Infatti se E è la successione dei punti P_ν di ascissa intera positiva sulla retta, ove si consideri P_0 come il punto improprio, le successioni $\{\alpha_n(P_\nu)\}$ e $\{\beta_n(P_\nu)\}$ con $\alpha_n(P_\nu)=\beta_n'(P_\nu)=\begin{cases}1 & \text{per } n\leq\nu \\ 0 & \text{»} \ n>\nu\end{cases}$, che soddisfano le condizioni di regolarità, forniscono $A_\nu=$ $=\mathit{det.}\,(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{D}_\alpha(P_\nu)\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{D}_\beta(P_\nu)).$

Ciò è in armonia col fatto che:

« Se una serie doppia $\sum_{hk}^{\infty}{}_{1}\, u_{hk}$, a somme parziali S_{hk}, $h, k=1, 2, \ldots$, limitate, è convergente per quadrati, la sua somma S per quadrati si può sempre considerare come somma generalizzata secondo opportuni fattori di convergenza ».

Infatti sia $\{f_n(P)\}$, $P<E$, secondo i simboli già usati, una successione di fattori regolari di convergenza per una serie semplice, tali cioè che $\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta f_n(P)| < \begin{cases} K(P) & \text{su } E \\ K' & \text{»} \ E' \end{cases}$, $\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\ P<E}} f_n(P)=1$, $n=1.2,\ldots$. Aggiungiamo ancora la condizione che sia $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(P)=0$ per ogni punto P di E.

Consideriamo ora la successione doppia $\{f_{hk}(P)\}$ così definita:

$$f_{hk}(P)=\begin{cases} f_h(P) & \text{per } k=1, 2, \ldots, h \\ f_k(P) & \text{»} \ h=1, 2, \ldots, k \end{cases}.$$

Riesce $\Delta_{11} f_{hk}=\begin{cases}\Delta f_h & \text{per } h=k \\ 0 & \text{»} \ h\neq k\end{cases}$. Sono perciò soddisfatte le condizioni di regolarità per fattori di convergenza relativi a serie doppie, cioè le (5), (6), (7), (8) e (9) per $n=2$.

Ora

$$\sigma_{m,n}(P)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} u_{ij}\, f_{ij}(P)=\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1} S_{ij}\,\Delta_{11} f_{ij}(P)+$$

$$+\sum_{1}^{m-1}{}_i S_{in}\,\Delta_{10} f_{in}(P)+\sum_{1}^{n-1}{}_j S_{mj}\,\Delta_{01} f_{mj}(P)+S_{mn} f_{mn}(P)$$

onde

$$\lim_{m,n\to\infty} \sigma_{m,n}(P)=\sum_{1}^{\infty}{}_k S_{kk}\,\Delta f_k(P)\,.$$

Ma:

« Condizione necessaria e sufficente affinchè $\sum_{1}^{\infty}{}_k S_k\,\varphi_k(P)$, $P<E$, sia convergente qualunque sia la successione convergente $\{S_n\}$, è che sia $\sum_{1}^{\infty}{}_k |\varphi_k(P)|<M(P)$, dove $M(P)$ è una opportuna funzione positiva di P su E».

Inoltre: « Condizione necessaria e sufficente affinchè sia $\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\ P<E}} \sum_{1}^{\infty}{}_k S_k\,\varphi_k(P)=S$, $S=\lim\limits_{k\to\infty} S_k$, essendo P_0 un punto di accumulazione di E non appartenente ad E, è che esista un numero positivo M' e un intorno J del punto P_0 per cui sia

$$\sum_{1}^{\infty}{}_k |\varphi_k(P)|<M' \qquad \text{su} \quad E'=J\cdot E\,;$$

$$\lim_{\substack{P\to P_0\\ P<E}} \varphi_n(P)=0 \qquad n=1,2,\ldots,$$

$$\lim_{\substack{P\to P_0\\ P<E}} \sum_{1}^{\infty}{}_n \varphi_n(P)=1$$

[Silvermam-Toeplitz] (6) ».

Queste condizioni sono soddisfatte dalle ipotesi già fatte qualora si ponga $\Delta f_i(P)=\varphi_i(P)$.

Esisterà perciò il $\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\ P<E}}\ \lim\limits_{m,n\to\infty} \sigma_{m,n}(P)$ e questo sarà S, somma per quadrati della serie $\sum_{1}^{\infty}{}_{ij} u_{ij}$.

(6) C. Moore - l. c., cap. I, nn. 3 e 6.